Versione: 5 settembre 2012

Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi in più variabili 2

a.a. 2011/12

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi in più Variabili 2 consistono solitamente di otto problemi a cui dare una soluzione articolata. Di questi, i primi quattro sono relativamente semplici, nel senso che ammettono una soluzione di poche righe o comunque possono essere facilmente ricondotti a fatti e/o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una traccia delle soluzioni.

Programma del corso. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Spazi L^p
   - 1.1 Richiamo delle teoria dell'integrazione secondo Lebesgue: teorema di convergenza monotona, di convergenza dominata, lemma di Fatou, teorema di Fubini, formula di cambio di variabile.
   - 1.2 Spazi L^p. Disuguaglianze di Hölder e di Minkowski. Completezza degli spazi L^p.
2. Spazi di Hilbert
   - 2.1 Spazio di Hilbert sul campo reale; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini della base.
   - 2.2 Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz). Esistenza della proiezione su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione come elemento di minima distanza. *Proiezione su un comvesso chiuso.*
   - 2.3 *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*
3. Serie di Fourier ed applicazioni
   - 3.1 Le funzioni esponenziali e^{inx} come base di Hilbert di $L^2(-\pi,\pi)$. Serie di Fourier complessa per funzioni in $L^2(-\pi,\pi)$. Convergenza della serie di Fourier in L^2. Convergenza uniforme per le funzioni di periodo 2π e classe $\mathscr{C}^1$. Regolarità di una funzione di periodo 2π e comportamento asintotico dei coefficienti.
   - 3.2 *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde tramite serie di Fourier. Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.
   - 3.3 *Varianti della serie di Fourier: caso reale; per funzioni sull'intervallo $[0,\pi]$; per funzioni sul quadrato $[-\pi,\pi]^2$. Altri esempi di basi ortonormali date da autovettori di operatori autoaggiunti.*
4. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - 4.1 Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^n$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
   - 4.2 *Rappresentazione di una funzione su $\mathbb{R}$ come combinazione integrale delle funzioni trigonometriche complesse: derivazione euristica della formula a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier per funzioni in $L^1(\mathbb{R})$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier.
   - 4.3 Dimostrazione della formula di inversione. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma L^2. Trasformata di Fourier per funzioni in $L^2(\mathbb{R})$.
   - 4.4 *Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier, e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore.*
   - 4.5 *Trasformata di Fourier per funzioni di più variabili.*
5. Superfici e integrazione su superfici
   - 5.1 Superfici (sottovarietà) senza bordo di dimensione d e classe $\mathscr{C}^k$ in $\mathbb{R}^n$. Spazio tangente ad una superfice in un punto e sue caratterizzazioni.
   - 5.2 Mappe di classe $\mathscr{C}^k$ tra superfici; definizione e caratterizzazione del differenziale.
   - 5.3 Superfici con bordo: definizione e risultati principali (senza dimostrazioni).
   - 5.4 Determinante Jacobiano di una mappa tra superfici e formula dell'area. Espressioni alternative per lo Jacobiano, formula di Binet. Definizione misura di volume d-dimensionale su una superficie tramite la formula dell'area.
   - 5.5 Orientazione di una superficie e del suo bordo.

5.6 Applicazioni k-lineari alternanti e k-forme, rappresentazione di una k-forma in coordinate, Prodotto esterno, differenziale e pull-back di k-forme. Teorema di Stokes.
5.7 *Forme chiuse ed esatte. Una forma chiusa su un aperto stellato è esatta.*
5.8 *Casi particolari del teorema di Stokes: il teorema di Gauss-Green e il teorema della divergenza, il teorema di Stokes per campi di vettori.*

6. Funzioni armoniche

6.1 Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Principio del massimo e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato.
6.2 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier (determinazione del nucleo di Poisson per il disco).

T E S T I

1. Sia X il sottospazio di $L^2(-1,1)$ dato dalle funzioni della forma $at^2 + bt^3$ con $a, b \in \mathbb{R}$. trovare una base ortonormale di X e scrivere esplicitamente l'operatore di proiezione su X.

2. Calcolare la trasformata di Fourier di $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$.

3. a) Sia f una funzione in $L^1(\mathbb{R}^n)$ e A una matrice $n \times n$ invertibile. Esprimere la trasformata di Fourier di $f(Ax)$ in termini di quella di f.

   b) Dimostrare che se f è una funzione radiale allora anche $\widehat{f}$ lo è.

4. Caratterizzare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di periodo 2π e di classe $\mathscr{C}^\infty$ in termini del comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier $c_n(f)$.

5. Sia $I := [-1, 1]$, e sia X il sottospazio di $L^2(I)$ dato dalle funzioni di classe $\mathscr{C}^2$ che si annullano in ± 1. Presi $a, b \in \mathbb{R}$, si consideri l'operatore $T : X \to L^2$ definito da
$$Tu := (a + x^2)\, \ddot{u} + bx\, \dot{u}\,.$$
   a) Dire per quali a e b l'operatore T risulta essere autoaggiunto rispetto al prodotto scalare standard di $L^2(I)$, e per quali risulta anche essere definito positivo (cioè $\langle Tu\,;\, u\rangle > 0$ per ogni $u \neq 0$).

   b) Cosa cambia se si sostituisce X con tutto lo spazio delle funzioni di classe $\mathscr{C}^2$ su $[-1, 1]$?

6. a) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di $4\sin^2 x$.

   b) Trovare una soluzione $u : [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ del problema
$$\begin{cases} u_{ttt} = 2u_{xx} \\ u(\cdot, -\pi) = u(\cdot, \pi) \text{ e } u_x(\cdot, -\pi) = u_x(\cdot, \pi) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \text{ e } u_t(0, \cdot) = u_{tt}(0, \cdot) = 0 \end{cases} \tag{*}$$
   per $u_0(x) := 4\sin^2 x$.

   c) Discutere l'unicità della soluzione trovata al punto precedente.

   d) Dire se il problema (*) ammette soluzione per ogni $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^\infty$ e 2π-periodica.

7. a) Usando la trasformata di Fourier, dimostrare che il prodotto di convoluzione non ammette elemento neutro in $L^1(\mathbb{R})$.

   b) È possibile trovare $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ non nulle tali che $f * g = f$?

8. Sia f una funzione in $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ tale che $f \in L^1$ e $f' \in L^2$.

   a) Dimostrare che anche in questo caso vale la formula $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$. [*Suggerimento: regolarizzare f per convoluzione e ricordare che $f' * \rho = f * \rho'$.*]

   b) Dimostrare che $\widehat{f}$ appartiene a L^1.

1. Sia ω la 2-forma su $\mathbb{R}^3$ data da $\omega(x) := x_1 x_2 \, dx_2 \wedge dx_3$, e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la mappa data da $g(t) := (t_1^2, t_2^2, 2t_1 t_2)$. Calcolare $d\omega$, $g^\# \omega$ e $g^\#(d\omega)$.

2. Dato $a \in \mathbb{R}$, si ponga $\omega(x) := (x_1 + a x_3) \, dx_1 \wedge dx_2 + (a x_1 + x_3) \, dx_2 \wedge dx_3$ per ogni $x \in \mathbb{R}^3$. Dire per quali a la forma ω è chiusa, ed in tal caso calcolarne una primitiva.

3. Sia ω una k-forma di classe $\mathscr{C}^1$ con differenziale nullo in $\mathbb{R}^n$, e siano S_1 ed S_2 due superfici compatte, orientate e di dimensione k e classe $\mathscr{C}^1$ in $\mathbb{R}^n$ i cui bordi coincidono (come insiemi e come orientazione). Dimostrare che $\int_{S_1} \omega = \int_{S_2} \omega$.

4. Dato $a = (a_1, \dots, a_n)$ vettore non nullo in $\mathbb{R}^n$, definiamo $\lambda \in \wedge^1(\mathbb{R}^n)$ e $\omega \in \wedge^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ come segue:
$$\lambda := \sum_{i=1}^n a_i \, dx_i \quad \text{e} \quad \omega := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i \, \omega_i \text{ dove } \omega_i := \bigwedge_{j \neq i} dx_j \, .$$
a) Calcolare $\lambda \wedge \omega$.
b) Calcolare $\omega(e_1, \dots, e_{n-1})$ dove $(e_1, \dots, e_{n-1})$ è una base ortonormale di $a^\perp$.

5. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la mappa data da $g(t, u) := \big((2 + \cos t) \cos u, (2 + \cos t) \sin u, \sin t\big)$.
a) Dimostrare che $S := g(\mathbb{R}^2)$ è una superficie compatta, senza bordo e di classe $\mathscr{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^3$, esibendo sia un'equazione che delle parametrizzazioni.
b) Calcolarne l'area di S.

6. Sia S l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $x^3 - 3(y^4 + z^4)x + y^{12} + z^{12} = 0$.
a) Dimostrare che la proiezione di S sul piano yz è surgettiva.
b) Dimostrare che per i punti di S si ha $x = O(y^2 + z^2)$ per $(y, z) \to 0$.
c) Dire se S è una superficie regolare o meno.

7. a) Trovare una funzione v su $\mathbb{R}^2$ tale che $\Delta v(x_1, x_2) = x_1 x_2$.
b) Detto D il disco aperto di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$, risolvere il seguente problema:
$$\begin{cases} \Delta u = x_1 x_2 & \text{in } D, \\ u = 0 & \text{su } \partial D. \end{cases} \qquad (*)$$

8. Sia X uno spazio vettoriale (reale) di dimensione n, e sia ω un elemento di $\wedge^k X$ con $k > 1$. Per ogni $x \in X$, indichiamo con ω_x l'elemento di $\wedge^{k-1} X$ definito da
$$\omega_x(x_1, \dots, x_{k-1}) := \omega(x, x_1, \dots, x_{k-1}) \quad \text{per ogni } x_1, \dots, x_{k-1} \in X,$$
e con V il sottospazio di tutti gli x tali che $\omega_x = 0$.
a) Dimostrare che se $\dim V > n - k$ allora $\omega = 0$.
b) Dimostrare che se ω si scrive come prodotto esterno di k elementi di $\wedge^1 X$ (vale a dire del duale di X), allora $\dim V \geq n - k$.
c) Calcolare V nel caso in cui $X := \mathbb{R}^4$ e $\omega := dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$, e dimostrare che ω non può essere scritta come prodotto di 2 elementi di $\wedge^1 X$.

1. Sia $\omega(x) := \exp(|x|^2)\,(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$. Calcolare $d\omega$ e $\omega \wedge \omega$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier di $e^{-|x|}\cos x$.

3. Sia dato p tale che $1 \le p \le +\infty$. Dare un esempio di successione limitata in $L^p(\mathbb{R})$ che converge a 0 quasi ovunque, ma non converge a 0 in norma L^p.

4. Sia $I := [-1, 1]$, e sia W il sottospazio di $L^2(I)$ dato dalle funzioni pari (vale a dire le funzioni f tali che $f(x) = f(-x)$ per quasi ogni x).

   a) Dimostrare che W è un sottospazio chiuso di $L^2(I)$.

   b) Determinare $W^\perp$.

   c) Scrivere in forma esplicita l'operatore di proiezione su W.

5. a) Calcolare i coefficienti della funzione $g(x) := 1 - \cos(2x)$ in $L^2(0, \pi)$ rispetto al sistema ortogonale $\{\sin(nx) : n = 1, 2, \dots\}$.

   b) Dimostrare che il problema
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + g \\ u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = 0 \end{cases} \tag{*}$$
   ammette una soluzione $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^2$ in x e $\mathscr{C}^1$ in t.

   c) Si può dire di più sulla regolarità di questa soluzione?

6. Siano f ed f_n con $n = 1, 2, \dots$ funzioni continue su $\mathbb{R}^m$ tali che f_n converge ad f in $L^1(B)$ per ogni palla B centrata nell'origine.

   a) Dimostrare che f_n converge ad f in $L^1(E)$ per ogni insieme misurabile e limitato E.

   b) Dimostrare che se le funzioni f_n sono armoniche allora anche f è armonica.

7. a) Dimostrare che $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ dotato della norma del sup.

   b) Sia $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier: dimostrare che l'immagine di $\mathscr{F}$ è densa in $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$.

8. Sia S una superfice senza bordo di dimensione d e classe $\mathscr{C}^k$ in $\mathbb{R}^n$, e sia $f : S \to \mathbb{R}^m$ una mappa iniettiva e di classe $\mathscr{C}^k$ tale che $df(x) : \mathrm{Tan}(S, x) \to \mathbb{R}^m$ ha rango d per ogni $x \in S$.

   a) Dimostrare che se S è compatta allora $f(S)$ è una superfice senza bordo di dimensione d e classe $\mathscr{C}^k$ in $\mathbb{R}^m$.

   b) Far vedere che l'ipotesi di compattezza nell'enunciato a) è necessaria e proporre un'ipotesi aggiuntiva su f che permetta di rimuoverla.

1. Sia $e(x) := \frac{1}{\sqrt{6\pi}}(1 + e^{ix} + e^{2ix})$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$. Completare $\{e\}$ ad una base di Hilbert dello spazio di Hilbert complesso $L^2(-\pi, \pi)$.

2. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \dfrac{1}{5 + 2x + x^2}$.

3. Calcolare $f^{\#}\omega$ dove $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è data da $f(x_1, x_2) := (-x_1x_2, x_1x_2, x_1^2 + x_2^2)$ e ω è la 2-forma su $\mathbb{R}^3$ data da $\omega = \exp(y_1)\, dy_2 \wedge dy_3$.

4. Trovare una soluzione $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dell'equazione $u_t = u_{xx}$ che soddisfa le condizioni al bordo $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$ per ogni $t \geq 0$ e la condizione iniziale $u(0, x) = \cos^2 x$ per ogni $x \in [0, \pi]$.

5. a) Date $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^2$, calcolare $\Delta(f \circ u)$.

   b) Trovare tutte le funzioni f tali che $f \circ u$ è armonica per ogni u armonica.

6. Sia X lo spazio delle matrici reali simmetriche $n \times n$, e sia $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to X$ la mappa data da $f : A \mapsto A^tA + A + A^t$.

   a) Calcolare $df(A)$.

   b) Dimostrare che se $f(A) = 0$ allora $A + I$ è una matrice invertibile.

   c) Dimostrare che $S := f^{-1}(0)$ è una superficie senza bordo di classe $\mathscr{C}^\infty$ e dimensione $d := \frac{1}{2}n(n-1)$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

7. a) Sia V una matrice $n \times n$ tale che la prima colonna v è ortogonale a tutte le altre, e sia W la matrice $n \times (n-1)$ ottenuta eliminando la prima colonna di V. Dimostrare che
$$|\det V| = |v|\sqrt{\det(W^tW)}\,.$$
   b) Sia D un insieme compatto e convesso con frontiera di classe $\mathscr{C}^1$ in $\mathbb{R}^n$ tale che 0 è un punto interno di D, e dato $r > 0$ poniamo $D(r) := \{rx : x \in D\}$. Sia inoltre $f : D(r) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che se D è la palla di raggio 1 centrata nell'origine allora
$$\int_{D(r)} f(x)\, dx = \int_0^r \rho^{n-1}\left[\int_{\partial D} f(\rho x)\, d\sigma_{n-1}(x)\right] d\rho\,. \tag{*}$$
   [*Suggerimento: usare (e magari dimostrare) che esiste una mappa $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ di classe $\mathscr{C}^1$ ed un insieme misurabile E in $\mathbb{R}^{n-1}$ tale che g è una bigezione da E in ∂D.*]

   c) Cosa succede se D è una palla di raggio 1 ma non è centrata nell'origine?

8. Sia H lo spazio di Hilbert complesso $L^2(\mathbb{R})$, e sia $\mathscr{F} : H \to H$ la trasformata di Fourier.

   a) Calcolare $\mathscr{F}^4$ e l'aggiunta $\mathscr{F}^*$.

   b) Calcolare gli autovalori di $\mathscr{F}$.

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := (1-x^2)\exp(-x^2/2)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la 2-forma $\omega := (3x_1^2+ax_3)\,dx_1\wedge dx_2 + 2(ax_3+x_1)\,dx_2\wedge dx_3$ ha differenziale nullo, ed in tal caso calcolarne una primitiva.

3. Per ogni n intero positivo, si ponga
$$f_n(x) := \frac{n}{1+n^4(x-n)^2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
Dire per quali $p \in [1,+\infty)$ la successione f_n converge in $L^p(\mathbb{R})$ e calcolarne il limite.

4. a) Sia $\omega \in \wedge^k(\mathbb{R}^n)$ e siano $v_1,\dots,v_k$ vettori linearmente *dipendenti* in $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che $\omega(v_1,\dots,v_k)=0$.

   b) Dimostrare che se $T:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lineare con rango strettamente minore di k allora $T^\#\omega = 0$.

5. Dato $d \geq 3$, trovare tutte le funzioni $u:\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ che sono armoniche e radiali.

6. a) Trovare una soluzione $u:[0,+\infty)\times[0,\pi]\to\mathbb{R}$ dell'equazione $u_t = -u_{xxxx}$ che soddisfa le condizioni al bordo $u(t,0)=u(t,\pi)=0$ per ogni $t\geq 0$ e la condizione iniziale $u(0,x) = (1+4\cos x)\sin x$ per ogni $x\in[0,\pi]$.

   b) Tale soluzione è unica?

7. Posto $I := [0,1]$ e presa $\varphi : I \to \mathbb{R}$ funzione misurabile limitata, si consideri la forma bilineare $(\ ;\ )$ sullo spazio $L^2(I)$ definita da
$$(f;g) := \int_I f(t)\,g(t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$
   a) Caratterizzare le funzioni φ per cui la forma $(\ ;\ )$ è un prodotto scalare, cioè è simmetrica e definita positiva.

   b) Far vedere che se esiste $m>0$ tale che $\varphi \geq m$ quasi ovunque, allora la norma su $L^2(I)$ definita da $\|f\|_\varphi := \sqrt{(f;f)}$ risulta essere completa.

   c) Dare un esempio di φ per cui $(\ ;\ )$ è un prodotto scalare ma $\|\cdot\|_\varphi$ non è completa.

   d) Caratterizzare le funzioni φ per cui $(\ ;\ )$ è un prodotto scalare e $\|\cdot\|_\varphi$ è completa.

8. Dato $d\geq 1$, sia ω una $(d-1)$-forma di classe $\mathscr{C}^1$ su $\mathbb{R}^{d+1}$, e sia $S := g(\mathbb{R}^d)$ dove $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d+1}$ la mappa data da
$$g(s) := \Big(\frac{s}{1+|s|^2}, |s|^2\Big)\,.$$
   a) Dimostrare che S è una superficie di dimensione d e classe $\mathscr{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^{d+1}$, orientabile, senza bordo e *non compatta*.

   b) Dimostrare che, per ogni orientazione su S, se ω ha supporto compatto allora $\int_S d\omega = 0$.

   c) Cosa succede se ω non ha supporto compatto?

1. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ una funzione della forma $g(x_1, x_2) = g_1(x_1)\, g_2(x_2)$ con $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R})$. Scrivere la trasformata di Fourier di g in termini di quelle di g_1 e g_2.

2. Trovare i coefficienti di Fourier complessi di $(\sin x \cos x)^2$.

3. Sia X il sottospazio di $L^2(0,1)$ costituito dalle funzioni $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe $\mathscr{C}^2$ tali che $\dot{u}(0) = \dot{u}(1) = 0$, e sia $T : X \to L^2(0,1)$ l'operatore dato da $Tu := -\ddot{u}$. Dimostrare che T è un operatore autoaggiunto e semidefinito positivo (nel senso che la forma quadratica $u \mapsto \langle Tu\,;\, u\rangle$ è semidefinita positiva su X).

4. Per ogni $i = 1, 2, 3$ sia S_i una superficie senza bordo di classe $\mathscr{C}^1$ e dimensione d_i in $\mathbb{R}^{n_i}$, e siano $g_1 : S_1 \to S_2$ e $g_2 : S_2 \to S_3$ mappe di classe $\mathscr{C}^1$. Dimostrare che $g := g_2 \circ g_1 : S_1 \to S_3$ è una mappa di classe $\mathscr{C}^1$ e che per ogni $x \in S_1$ si ha
$$dg(x) = dg_2(g_1(x)) \circ dg_1(x)\,.$$

5. Per ogni coppia di funzioni reali g_1, g_2 definite su $\mathbb{R}$ sia $g_1 \otimes g_2$ la funzione su $\mathbb{R}^2$ definita da $g_1 \otimes g_2(x_1, x_2) := g_1(x_1)\, g_2(x_2)$.
   a) Dimostrare che $L^p(\mathbb{R}) \otimes L^p(\mathbb{R})$ è contenuto in $L^p(\mathbb{R}^2)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.
   b) Dimostrare che lo span di $L^p(\mathbb{R}) \otimes L^p(\mathbb{R})$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^2)$ per ogni $p \in [1, +\infty)$.
   c) Far vedere che se $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ è una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R})$ allora le funzioni $e_m \otimes e_n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ formano una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R}^2)$.

6. Trovare una soluzione del problema $\begin{cases} u_t = 2u + u_{xx} & \text{su } [0,+\infty) \times [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{per ogni } t \geq 0, \\ u(0,x) = 2(1-\cos x)\sin x & \text{per ogni } x \in [0,\pi]. \end{cases}$

7. Sia K l'insieme delle funzioni u in $L^2(0,1)$ tali che $u \geq 0$ quasi ovunque.
   a) Dimostrare che K è convesso e chiuso in $L^2(0,1)$.
   b) Dimostrare che la proiezione su K è l'applicazione T che ad ogni $f \in L^2(0,1)$ associa la funzione Tf data da
$$[Tf](x) := \max\{f(x), 0\}\,.$$

8. Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$) una mappa di classe $\mathscr{C}^1$ tale che
   (i) g è periodica di periodo 1 in ciascuna variabile;
   (ii) $\nabla g(x)$ ha rango 2 in tutti i punti;
   (iii) g è iniettiva su $[0,1) \times [0,1)$.
   a) Dimostrare che $S := g(\mathbb{R}^2)$ è una 2-superficie compatta e senza bordo di classe $\mathscr{C}^1$.
   b) Dire se l'enunciato a) resta valido rimuovendo l'ipotesi (iii).

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := x^2 e^{-|2x|}$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la mappa data da
$$f(x_1, x_2, x_3) := (x_1 x_2, x_3^2 - 2x_1 x_2)\,,$$
e sia ω la 2-forma su $\mathbb{R}^2$ data da $\omega := y_1\, dy_1 \wedge dy_2$. Calcolare $f^\# \omega$ e $d(f^\# \omega)$.

3. Sia A un aperto di $\mathbb{R}^d$ e sia $F : A \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed armonica rispetto alla prima variabile (vale a dire che $F(\cdot, t)$ è armonica per ogni $t \in [0,1]$). Si ponga
$$f(x) := \int_0^1 F(x,t)\, dt \quad \text{per ogni } x \in A.$$
Dimostrare che f è una funzione armonica su A.

4. Sia S la semisfera data dai punti $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $|x| = 1$ e $x_3 \geq 0$. Supponiamo che S sia orientata in modo tale che $[e_1, e_2]$ è l'orientazione dello spazio tangente a S nel punto $p_0 := (0,0,1)$. Scrivere l'orientazione dello spazio tangente a ∂S nel punto $p_1 := (1,0,0)$.

5. Per ogni $k = 0, 1, 2, \dots$, sia
$$g_k(x) := (x^2 - \pi^2)^k\,,$$
e siano $(c_{k,n})_{n \in \mathbb{Z}}$ i coefficienti di Fourier complessi della restrizione di g_k a $[-\pi, \pi]$.
a) Calcolare $c_{0,n}$ e $c_{1,n}$.
b) Scrivere $\ddot{g}_k$ come combinazione lineare di g_{k-1} e g_{k-2} e derivarne una formula ricorsiva che esprime $c_{k,n}$ in termini di $c_{k-1,n}$ e $c_{k-2,n}$ (per $n \neq 0$).
c) Cosa si può dire sul comportamento asintotico di $c_{k,n}$ per $|n| \to \infty$?

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa definita da
$$f(t,u) := (e^t \cos u, e^t \sin u, e^u \cos t, e^u \sin t)\,.$$
a) Calcolare lo Jacobiano di f.
b) Dire se f è iniettiva.
c) Dire se f è propria (cioè $f^{-1}(K)$ è compatta per ogni compatto K in $\mathbb{R}^4$).

7. Sia D il disco di centro l'origine e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$. Risolvere l'equazione $\Delta u = 0$ su D con la condizione al bordo $u = u_0$ dove $u_0(x) := (x_1 x_2)^3$.

8. Fissato un intero $n > 1$, sia $\mathbb{R}^{n \times n}$ lo spazio della matrici reali $n \times n$, sia Ω il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n \times n}$ costituito dalle matrici invertibili, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^{n \times n}$ la mappa data da $f : A \mapsto A^{-1}$.
a) Dimostrare che Ω è aperto in $\mathbb{R}^{n \times n}$ ed f è una mappa di classe $\mathscr{C}^\infty$.
b) Calcolare $df(I)$, limitandosi se opportuno al caso $n = 2$.
c) Calcolare $df(A)$ per ogni $A \in \Omega$, limitandosi se opportuno al caso $n = 2$.

S O L U Z I O N I

1. Le funzioni t^2 e t^3 sono già ortogonali (per una questione di parità) e quindi la base ortonormale di X la si ottiene rinormalizzandole: $\sqrt{5/2}\,t^2$, $\sqrt{7/2}\,t^3$. L'operatore di proiezione $P : L^2 \to X$ è quindi dato da

$$Pf(t) := \frac{5}{2}\Big[\int_{-1}^{1} f(s)\,s^2\,ds\Big]t^2 + \frac{7}{2}\Big[\int_{-1}^{1} f(s)\,s^3\,ds\Big]t^2\,.$$

2. La soluzione è ottenuta combinando i seguenti fatti noti: a) $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$; b) $\mathscr{F}\big(\frac{1}{1+x^2}\big) = \pi e^{-|y|}$; c) $\mathscr{F}\big(e^{i\alpha x} f(x)\big) = \mathscr{F}f(y-\alpha)$. Infatti

$$\mathscr{F}\Big(\frac{\sin x}{1+x^2}\Big) = \frac{i}{2}\left[\mathscr{F}\Big(\frac{e^{-ix}}{1+x^2}\Big) - \mathscr{F}\Big(\frac{e^{+ix}}{1+x^2}\Big)\right] = \frac{i}{2}\big[e^{-|y+1|} - e^{-|y-1|}\big]\,.$$

3. a) Sia $g(x) := f(Ax)$. Allora

$$\begin{aligned}\widehat{g}(y) &:= \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\,e^{-i\langle y\,;\,x\rangle}\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\,e^{-i\langle (A^{-1})^t y\,;\,t\rangle}\,\frac{dt}{|\det A|} = \frac{1}{|\det A|}\widehat{f}((A^{-1})^t y)\end{aligned}$$

(per ottenere la seconda uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile $t = Ax$ e il fatto che $\langle y\,;\,x\rangle = \langle y\,;\,A^{-1}Ax\rangle = \langle (A^{-1})^t y\,;\,Ax\rangle = \langle (A^{-1})^t y\,;\,t\rangle$).
b) Osserviamo che f è radiale se e solo se $f(Ax) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni matrice A in $SO(n)$. Applicando la trasformata di Fourier a questa identità ed usando quando visto al punto a) più il fatto che in questo caso $(A^{-1})^t = A$ e $\det A = 1$, otteniamo che $\widehat{f}(Ay) = \widehat{f}(y)$, da cui segue che anche $\widehat{f}$ è radiale.

4. Si è visto a lezione che presa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di periodo 2π e detti c_n i coefficienti di Fourier complessi di f, allora $f \in \mathscr{C}^k$ implica $c_n = O(|n|^{-k})$ per $n \to \pm\infty$, e viceversa $c_n = O(|n|^{-k})$ implica $f \in \mathscr{C}^{k-2}$. Da queste due implicazioni segue immediatamente che $f \in \mathscr{C}^\infty$ se e solo se $c_n = O(|n|^{-k})$ per ogni $k > 0$ (o equivalentemente $c_n = o(|n|^{-k})$ per ogni $k > 0$).

5. a) Cominciamo scrivendo $\langle Tu\,;\,v\rangle$ in una forma più "simmetrica": date $u, v \in X$ si ha infatti

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle &= \int_{-1}^{1} (a+x^2)\,v\,\ddot{u}\,dx + \int_{-1}^{1} bx\,v\,\dot{u} \\ &= \Big|(a+x^2)\,v\,\dot{u}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} [(a+x^2)\,v]'\,\dot{u}\,dx + \int_{-1}^{1} bx\,v\,\dot{u} \qquad (1) \\ &= \int_{-1}^{1} -(a+x^2)\,\dot{v}\dot{u} + (b-2)x\,v\dot{u}\,dx\end{aligned}$$

(la seconda uguaglianza è stata ottenuta integrando per parti il primo integrale nella prima riga, la terza uguaglianza segue dal fatto che il primo addendo nella seconda riga si annulla poiché $v(\pm 1) = 0$). Pertanto

$$\langle Tu\,;\,v\rangle - \langle u\,;\,Tv\rangle = (b-2)\int_{-1}^{1} x(v\dot{u} - u\dot{v})\,dx\,. \qquad (2)$$

Da questo segue immediatamente che T è autoaggiunto se $b = 2$. Se invece $b \neq 2$ allora T non è autoaggiunto, e per dimostrarlo ci basta esibire u e v in X tali che l'integrale in (2) è diverso da 0, per esempio $u := x^2 - 1$ e $v := x^4 - 1$.

Supponiamo ora $b = 2$. Usando la (1) otteniamo

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = \int_{-1}^{1} -(a+x^2)\,\dot{u}^2\,dx\,. \qquad (3)$$

Pertanto se $a \leq -1$ si ha che $-(a+x^2) > 0$ per ogni $x \in (-1,1)$, da cui segue che $\langle Tu\,;\,u\rangle \geq 0$, e vale l'uguaglianza se e solo se $\dot{u} = 0$, ovvero u è costante, ovvero $u = 0$ (si ricordi che ogni $u \in X$ vale 0 in ± 1). Dunque T è definito positivo.

Viceversa, se $a > -1$ allora $-(a + x^2) < 0$ per $x = 1$, e quindi anche per x in un opportuno intorno I di 1. Prendendo quindi una funzione u non identicamente nulla con supporto contenuto in I, dalla (3) si ottiene che $\langle Tu\,;\,u\rangle < 0$, da cui segue che T non è definito positivo.

Riassumendo: T è autoaggiunto se e solo se $b = 2$, ed in tal caso è definito positivo se e solo se $a \le -1$.

b) Consideriamo ora l'operatore T su tutto $\mathscr{C}^2(I)$ invece che solo su X. Se $b \ne 2$ l'operatore T non è autoaggiunto su X e quindi non lo è neanche su $\mathscr{C}^2$. Supponiamo dunque $b = 2$: in questo caso ripetendo i conti fatti in (1) otteniamo

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = (1+a)\Big| v\,\dot u \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (a + x^2)\,\dot v\,\dot u\,dx\,,$$

da cui segue che

$$\langle Tu\,;\,v\rangle - \langle u\,;\,Tv\rangle = (a+1)\Big| v\dot u - u\dot v \Big|_{-1}^{1} \tag{4}$$

Quindi se $a = -1$ l'operatore T è autoaggiunto, e non lo è se $a \ne -1$. Per dimostrare quest'ultima affermazione basta esibire u, v tali che il termine di destra della (4) non si annulla, per esempio $u := x^2 - 1$ e $v := x + 1$.

Infine per $b = 2$ e $a = -1$ si ha

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\dot u^2\,dx\,,$$

da cui segue che $\langle Tu\,;\,u\rangle \ge 0$ per ogni u e vale l'uguaglianza se e solo se u è costante. Dunque T è semidefinito positivo ma non definito positivo.

Riassumendo: T è autoaggiunto su $\mathscr{C}^2(I)$ se e solo se $b = 2$ e $a = -1$, ed in tal caso è semidefinito positivo ma non definito positivo.

6. a) Poiché

$$4\sin^2 x = 4\Big(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\Big)^2 = 2 - e^{2ix} - e^{-2ix}\,,$$

i coefficienti di Fourier c_n^0 di $4\sin^2 x$ sono dati da $c_0^0 = 2$, $c_{\pm 2}^0 = -1$, e $c_n^0 = 0$ per $n \ne 0, \pm 2$.

b) Indichiamo con $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier di $u(t,\cdot)$ per ogni $t \ge 0$. Procedendo come visto a lezione si ottiene, almeno a livello formale, che u risolve il problema (*) se e solo se per ogni n la funzione $c_n(t)$ risolve

$$\dddot y = -2n^2 y \quad \text{con le condizioni iniziali } y(0) = c_n^0 \text{ e } \dot y(0) = \ddot y(0) = 0, \tag{1}$$

dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier di u_0.

Siccome questa equazione differenziale è lineare ed omogenea, $c_n(t) = 0$ per tutti gli n tale che $c_n^0 = 0$, vale a dire (nel caso specifico in cui $u_0 = 4\sin^2 x$) per $n \ne 0, \pm 2$. Per $n = 0$ la soluzione dell'equazione è un polinomio di grado al piú due, e tra questi polinomi quello che soddisfa le condizioni iniziali è ovviamente $c_0(t) = 2$. Per $n = \pm 2$ la soluzione dell'equazione è della forma

$$y(t) = a_0 e^{-2t} + a_1 e^t \cos(\sqrt{3}t) + a_2 e^t \sin(\sqrt{3}t) \quad \text{con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C},$$

e le condizioni iniziali diventano

$$\begin{cases} -1 = y(0) = a_1 + a_2 \\ 0 = \dot y(0) = -2a_1 + a_2 + \sqrt{3}a_3 \\ 0 = \ddot y(0) = 4a_1 - 2a_2 + 2\sqrt{3}a_3\,, \end{cases} \quad \text{cioé} \quad \begin{cases} a_1 = -1/3 \\ a_2 = -2/3 \\ a_3 = 0\,. \end{cases}$$

Pertanto $c_{\pm 2}(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^t\cos(\sqrt{3}t)$, e quindi $u(t,x) = \sum c_n(t)e^{inx}$ diventa

$$u(t,x) = 2 - \frac{2}{3}\big[e^{-2t} - 2e^t\cos(\sqrt{3}t)\big]\cos(2x)\,.$$

È facile verificare che questa formula definisce effettivamente una soluzione di (*).

c) Sia $u : [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ una funzione di classe $\mathscr{C}^3$ che risolve (*). Procedendo come visto a lezione si ottiene che i coefficienti di Fourier $c_n(t)$ di u sono funzioni di classe $\mathscr{C}^3$ che soddisfano il problema di Cauchy (1), e pertanto sono univocamente determinati. Dall'unicità dei coefficienti di Fourier segue quella di u.

d) La risposta è negativa. Sia infatti u una soluzione di (*) per una qualche funzione u_0. Per quanto detto al punto c), i coefficienti di Fourier $c_n(t)$ di u devono necessariamente risolvere il problema di Cauchy (1). Osserviamo ora che per ogni $n \neq 0$ la soluzione dell'equazione in (1) è della forma

$$y(t) = a_0 e^{-2at} + a_1 e^{at} \cos(\sqrt{3}at) + a_2 e^{at} \sin(\sqrt{3}at)$$
$$\text{con } a := 2^{-2/3} n^{2/3} \text{ e } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}.$$

e imponendo condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} c_n^0 = y(0) = a_1 + a_2 \\ 0 = \dot{y}(0) = a(-2a_1 + a_2 + \sqrt{3}a_3 \\ 0 = \ddot{y}(0) = 2a^2(2a_1 - a_2 + \sqrt{3}a_3)\,, \end{cases} \qquad \text{cioé} \qquad \begin{cases} a_1 = c_n^0/3 \\ a_2 = 2c_n^0/3 \\ a_3 = 0\,. \end{cases}$$

Dunque

$$c_n(t) = \frac{c_n^0}{3}\big[\exp(-2^{1/3}n^{2/3}t) - 2\exp(2^{-2/3}n^{2/3}t)\,\cos(3^{1/2}2^{-2/3}n^{2/3}t)\big] \tag{2}$$

Vogliamo far vedere che scegliendo opportunamente u_0 e t_0, la successione $c_n(t_0)$ non è infinitesima per n che tende a $\pm\infty$, in contraddizione col fatto che si tratta dei coefficienti di Fourier di una funzione limitata. Se ne deduce che per tale u_0 il problema (*) non ammette alcuna soluzione u definita nell'intervallo di tempo $[0, +\infty)$.

Sia infatti u_0 la funzione con coefficienti di Fourier $c_{\pm n}^0 := e^{-n^{1/3}}$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$. Tale funzione è reale e pari perché c_n^0 è reale e coincide con c_{-n}^0, ed è di classe $\mathscr{C}^\infty$ perché $c_n = O(|n|^{-k})$ per ogni $k > 0$ (cfr. Esercizio 4).

Fissiamo ora $t_0 := 2\pi/\sqrt{3}$. Per ogni n della forma $n = 2m^3$ con m intero si ha che il coseno che appare nel termine di destra della (2) vale esattamente 1, e quindi

$$c_n(t_0) \sim -\frac{2}{3}c_n^0 \exp(2^{-2/3}n^{2/3}t_0) = -\frac{2}{3}\exp(m^2 t_0 - 2^{1/3}m) \to -\infty \quad \text{per } m \to +\infty.$$

7. a) Supponiamo per assurdo che esista $g \in L^1(\mathbb{R})$ tale che $f * g = f$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$. Ne consegue che $\widehat{f}\cdot\widehat{g} = \widehat{f}$, e quindi, presa f tale che $\widehat{f}(y)$ non è mai nulla (per esempio $f(x) := e^{-|x|}$) otteniamo che $\widehat{g} = 1$ in ogni punto. Ma questo contraddice il fatto che la trasformata di Fourier di una funzione in L^1 tende a 0 all'infinito.

   b) La risposta è affermativa. Siano ϕ e γ funzioni in $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ pari, con supporto compatto, e tali che $\gamma = 1$ in tutti i punti del supporto di ϕ. Dunque $\phi\cdot\gamma = \phi$, e per concludere la dimostrazione basta osservare che ϕ e γ possono essere ottenute come trasformate di Fourier di opportune funzioni f e g in $L^1(\mathbb{R})$. Poniamo infatti $f := \frac{1}{2\pi}\widehat{\phi}$: siccome $\phi \in \mathscr{C}^1 \cap L^1$ e $\phi' \in L^1 \cap L^2$, sappiamo dalla teoria che $\widehat{\phi}$, e quindi f, appartengono a L^1 e vale inoltre la formula di inversione, per cui, tenuto conto del fatto ϕ è pari, $\widehat{f} = \phi$. Analogo discorso vale per γ.

8. a) Osserviamo innanzitutto che per dimostrare la tesi basta trovare una successione di funzioni f_n in $\mathscr{C}^1 \cap L^1$ tali che f_n' appartiene ad L^1, f_n tende a f in L^1, e f_n' tende a f' in L^2. In tal caso si ha che
   a) $\widehat{f_n'} = iy\widehat{f_n}$ (fatto noto);
   b) $\widehat{f_n'}$ converge a $\widehat{f'}$ in L^2 (perché a meno di un fattore costante la trasformata di Fourier un'isometria di L^2);
   c) $\widehat{f_n}$ converge a $\widehat{f}$ uniformemente, e quindi $iy\widehat{f_n}(y)$ converge a $iy\widehat{f}(y)$ per ogni y.

L'identità $\widehat{f'} = iy\widehat{f}$ q.o. è un'immediata conseguenza di questi fatti e della seguente osservazione: supponiamo che le funzioni φ_n convergano a φ nella norma di $L^2(\mathbb{R})$, e a $\tilde{\varphi}$ puntualmente quasi ovunque, allora $\varphi = \tilde{\varphi}$ quasi ovunque (per dimostrarlo basta osservare che per un'opportuna sottosuccessione n_m si ha che le funzioni φ_{n_m} convergono a φ puntualmente quasi ovunque).

La successione desiderata la si può ottenere prendendo $f_n := f * g_n$ dove $g_n(x) := \delta_n^{-1}\, g(x/\delta_n)$, g è una funzione positiva in $\mathscr{C}^1$ con supporto compatto e integrale uguale a 1, e (δ_n) è una qualunque successione infinitesima di numeri reali positivi. Sappiamo infatti dalla teoria che ciascuna f_n è di classe $\mathscr{C}^1$, inoltre $f_n = f * g_n$ converge a f in L^1 perché f appartiene a L^1, ed analogamente $f_n' = (f * g_n)' = f' * g_n$ converge a f' in L^2 perché f' appartiene a L^2. Per dimostrare che f_n' appartiene anche a L^1 basta osservare che $f_n' = (f * g_n)' = f * g_n'$, e che sia f che g_n' appartengono a L^1.

b) Si tratta di ripetere la dimostrazione vista a lezione.

COMMENTI

- Esercizio 3, punto a). Diversi dei presenti hanno impostato il calcolo della trasformata di Fourier di $g(x) := f(Ax)$ scrivendo
$$\widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\, e^{-i\langle y\,;\,Ax\rangle}\, dx \quad \text{invece di} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax)\, e^{-i\langle y\,;\,x\rangle}\, dx\,.$$

- Esercizio 3, punto b). Sembra non essere chiaro a tutti i presenti che per una matrice A in $O(n)$ si ha $(A^{-1})^t = A$.

- Esercizio 5, punto a). Una via alternativa per determinare quando T è autoaggiunto consiste nel determinare l'aggiunta di T: integrando per parti l'integrale nell'ultima riga della formula (1) si ottiene infatti
$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_{-1}^{1} \big[(a+x^2)\,\ddot v + (4-b)x\,\dot v + (2-b)\,v\big]u\,dx\,,$$
da cui segue che l'aggiunta di T è espressa dalla formula
$$T^*u := (a+x^2)\,\ddot u + (4-b)x\,\dot u + (2-b)\,u\,.$$
Pertanto $(T-T^*)u = (b-2)(2x\,\dot u + u)$, e si vede facilmente che $T-T^* = 0$ se e solo se $b=2$ (il "se" è ovvio, e per il "solo se" basta esibire una funzione u tale che $2x\,\dot u + u \neq 0$, per esempio $u := x^2-1$).
Ad essere precisi bisogna osservare che questa dimostrazione usa implicitamente il fatto che l'aggiunta è unica, cosa che segue dalla densità di X in $L^2(I)$. Quest'ultimo fatto è stato dimostrato a lezione.

- Esercizio 5, punto a). Nel dimostrare che T è autoaggiunto se e solo se $b=2$, molti hanno dato per scontato il "solo se", che invece richiede una qualche motivazione, seppur minima.

- Esercizio 6, punto b). Per far vedere che $c_n(t) = 0$ per $n \neq 0, \pm 2$ molti hanno scritto la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dddot y = -2n^2 y$ nella forma
$$y(t) = a_1 e^{at} + a_2 e^{awt} + a_3 e^{aw^2 t}$$
dove $a := -2^{1/3} n^{2/3}$ e w è una radice cubica primitiva dell'unità; hanno quindi scritto esplicitamente il sistema lineare che determina i coefficienti a_1, a_2, a_3 in base ai dati iniziali, ed invocato l'invertibilità della matrice associata a questo sistema (una matrice di Vandermonde) per far vedere che l'unica soluzione è $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Questo è indubbiamente corretto, ma che l'unica soluzione di un'equazione differenziale lineare omogenea con condizioni iniziali nulle sia quella banale è un fatto di validità generale, e conseguenza immediata dal teorema di unicità per le equazioni differenziali ordinarie.
Val la pena di notare che conoscere la forma della matrice associata al sistema torna invece assai utile per determinare esplicitamente $c_n(t)$ quando $n = \pm 2$, cosa che però ha fatto una sola persona.

- Esercizio 6, punto d). Modificando leggermente la dimostrazione si ottiene che t_0 può essere preso arbitrariamente piccolo. Ne segue che il problema (*) non ammette soluzione per alcun intervallo di tempo $[0,T)$ con $T>0$.

- Esercizio 7, punto a). Molti hanno dato per scontato che l'identità $\widehat{f}\cdot\widehat{g} = \widehat{f}$ implichi $\widehat{g} = 1$. Bisognerebbe perlomeno osservare che questo è vero perché per ogni y esiste una funzione f tale che $\widehat{f}(y) \neq 0$.

- Esercizio 8, punto a). La soluzione più gettonata è stata la seguente: presa g_n come sopra, si ha che
$$\mathscr{F}(f' * g_n) = \mathscr{F}((f * g_n)') = \mathscr{F}(f * g_n') = \widehat{f} \cdot wdhg_n' = \widehat{f} \cdot iy\, \widehat{g}_n$$
(la prima uguaglianza vale perché sia f' che g_n stanno in L^2, la seconda uguaglianza vale perché f sta in L^1 e che g_n' sta in L^∞, la terza perché sia f che g_n' stanno in L^1, e la quarta è la formula vista a lezione).

  A questo punto si osserva che $f' * g_n$ converge a f' in L^2 e quindi lo stesso vale per le corrispondenti trasformate di Fourier. Viceversa $\widehat{f} \cdot iy\, \widehat{g}_n$ converge puntualmente a $\widehat{f} \cdot iy$ perché $\widehat{g}_n$ converge puntualmente a 1. Anche questa dimostrazione usa l'osservazione fatta sopra su convergenza puntuale e convergenza L^2.

- Esercizio 8, punto a). Diversi hanno dato una dimostrazione sostanzialmente corretta, senza però specificare in che senso le varie successioni convergono, e senza verificare che fossero soddisfatte le ipotesi dei risultati utilizzati.

1. $d\omega = d(x_1x_2) \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2) \wedge dx_2 \wedge dx_3 = x_2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.
$g^\# \omega = t_1^2 t_2^2\, d(t_1^2) \wedge d(2t_1t_2) = t_1^2 t_2^2\, (2t_1\, dt_1) \wedge (2t_2\, dt_1 + 2t_1\, dt_2) = -4t_1^2 t_2^4\, dt_1 \wedge dt_2$.
$g^\#(d\omega) = 0$ perché ogni 3-forma su $\mathbb{R}^2$ è nulla.

2. $d\omega = 2a\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ e quindi ω è chiusa se e solo se $a = 0$. In tal caso si ha
$$\omega = (x_1\, dx_1 - x_3\, dx_3) \wedge dx_2 = \frac{1}{2} d(x_1^2 - x_3^2) \wedge dx_2 = \frac{1}{2} d\big((x_1^2 - x_3^2)\, dx_2\big)$$
(l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $d(f\alpha) = df \wedge \alpha$ per ogni funzione f ed ogni forma α con $d\alpha = 0$, ed in particolare per ogni α costante). Dunque una primitiva di ω è
$$\frac{1}{2}(x_1^2 - x_3^2)\, dx_2\,.$$

3. Siccome $\mathbb{R}^n$ è stellato (rispetto ad ogni suo punto) la forma ω è esatta, ovvero ammette una primitiva α. Pertanto, applicando il teorema di Stokes,
$$\int_{S_1} \omega = \int_{S_1} d\alpha = \int_{\partial S_1} \alpha = \int_{\partial S_2} \alpha = \int_{S_2} d\alpha = \int_{S_2} \omega\,.$$

4. a) Usando il fatto che $dx_i \wedge \omega_j = 0$ se $i \neq j$ e $dx_i \wedge \omega_j = (-1)^{i-1} dx$, dove $dx := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, si ottiene
$$\lambda \wedge \omega = \sum_{i,j} a_j\, dx_i \wedge (-1)^{j-1} a_j\, \omega_j = \sum_i a_i^2\, dx = |a|^2 dx\,.$$
b) Scelgo e_0 in modo tale che $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con l'orientazione canonica, vale a dire $\det(e_0, \dots, e_{n-1}) = 1$. Allora, per quanto fatto al punto precedente,
$$\lambda \wedge \omega(e_0, \dots, e_{n-1}) = |a|^2 \det(e_0, \dots, e_{n-1}) = |a|^2\,. \tag{1}$$
D'altra parte, usando la definizione di prodotto esterno ed il fatto che $\lambda(e_j) = 0$ per $j > 0$,
$$\begin{aligned} \lambda \wedge \omega(e_0, \dots, e_{n-1}) &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \lambda(e_{\sigma(0)})\, \omega(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n-1)}) \\ &= \lambda(e_0)\, \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(0)=0}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n-1)}) \\ &= \lambda(e_0)\, \omega(e_1, \dots, e_{n-1}) \end{aligned} \tag{2}$$
(dove S_n è il gruppo delle permutazioni dell'insieme degli indici $\{0, 1, \dots, n-1\}$). Mettendo insieme la (1) e la (2) e ricordando che e_0 è parallelo ad a otteniamo infine
$$\omega(e_1, \dots, e_{n-1}) = \frac{|a|^2}{\lambda(e_0)} = \begin{cases} a & \text{se } e_0 \text{ ha la stessa direzione di } a, \\ -a & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

5. a) *Compattezza*: Siccome g è 2π-periodica in entrambe le variabili, $S = g(\mathbb{R}^2) = g([0, 2\pi]^2)$ è compatto in quanto immagine di un compatto secondo una mappa continua.

Equazione: Preso $(x, y, z) \in S$ si ha $z = \sin t$ e $x^2 + y^2 = (2 + \cos t)^2$, ovvero $\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = \cos t$, e quindi
$$1 = \cos^2 t + \sin^2 t = \big(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\big)^2 + z^2\,.$$
Posto dunque $f(x, y, z) := \big(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\big)^2 + z^2 - 1$ si ha che $S \subset f^{-1}(0)$.

Per far vedere che $f = 0$ è l'equazione di S non resta che dimostrare che $S \supset f^{-1}(0)$. A questo proposito ricordo che dati a, b, r numeri reali tali che $a^2 + b^2 = r^2$, esiste sempre un numero reale α tale che $a = r \cos \alpha$ e $b = r \sin \alpha$. Preso dunque (x, y, z) tale che $f(x, y, z) = 0$, possiamo trovare t tale che $\sqrt{x^2 + y^2} - 2 = \cos t$ e $z = \sin t$. Ne segue che $x^2 + y^2 = (2 + \cos t)^2$ e quindi esiste u tale che $x = (2 + \cos t) \cos u$ e $y = (2 + \cos t) \sin u$. Dunque (x, y, z) è uguale a $g(t, u)$ e quindi appartiene ad S.

Regolarità: Osserviamo ore che f è una funzione definita su $\mathbb{R}^3$ e di classe $\mathscr{C}^\infty$ sul complementare della retta $\{(0, 0)\} \times \mathbb{R}$, e questo aperto contiene S. Inoltre $\nabla f = 0$ se e solo se $z = 0$ e $4 = x^2 + y^2$, e nessuno di questi punti appartiene ad S. Da questo consegue che S è una superficie senza bordo di classe $\mathscr{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^3$.

Parametrizzazioni: Una famiglia di parametrizzazioni di S è data per esempio dalle restrizioni di g a qualunque aperto A di $\mathbb{R}^2$ con diametro inferiore a 2π. Siccome è ovvio che le immagini di queste parametrizzazioni ricoprono S, per dimostrare questa affermazione non resta che verificare quanto segue:

(i) g è una mappa di classe $\mathscr{C}^\infty$ e ∇g ha rango 2 in ogni punto;

(ii) $g(A)$ è aperto in S e g è un omeomorfismo di A in $g(A)$.

Che g sia di classe $\mathscr{C}^\infty$ è ovvio; il fatto che ∇g ha sempre rango 2 equivale a dire che lo Jacobiano Jg non si annulla mai, e in effetti un semplice calcolo mostra che

$$Jg = \sqrt{\det(\nabla g^t \nabla g)} = 2 + \cos t\,. \tag{3}$$

Si verifica facilmente che $g(t,u) = g(t',u')$ *se e solo se* $t'-t$ e $u'-u$ sono multipli di 2π. Pertanto $g : \mathbb{R}^2 \to S$ ammette un sollevamento *iniettivo* $\tilde{g}$ da $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ in S, e siccome $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ è compatto, $\tilde{g}$ è un omeomorfismo. Tenendo conto che la proiezione p di $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ è aperta si ottiene infine che (ii) vale per ogni aperto A tale che π è iniettiva su A, ed in particolare per ogni aperto A con diametro inferiore a 2π.

b) Usando la formula (3) ed il fatto che g è una bigezione da $[0,2\pi)\times[0,2\pi)$ in S si ottiene

$$\text{Area}(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} Jg(t,u)\,dt\,du = 8\pi^2\,.$$

6. a) Riscriviamo l'equazione che definisce S come

$$x^2 - 3ax + b = 0 \tag{4}$$

con $a := y^4 + z^4$ e $b := y^{12} + z^{12}$. Osserviamo ora che la surgettività della proiezione di S sul piano yz è equivalente al fatto che la (4) ammette soluzione per ogni y e z, e questo è vero perché ogni equazione algebrica di terzo grado ammette almeno una soluzione reale.

b) Studiando il grafico della funzione $x^2 - 3ax + b$ con $a, b > 0$ (il caso che ci riguarda) si vede senza troppe difficoltà che per $b < 2a^{3/2}$ l'equazione (4) ha tre soluzioni reali comprese tra $\pm 2a^{1/2}$. La condizione $b < 2a^{3/2}$ si traduce in

$$y^{12} + z^{12} < 2(y^4 + z^4)^{2/3}$$

ed è verificata in un intorno di $(y,z) = (0,0)$ perché $y^{12} + z^{12} = O((y^4+z^4)^3)$. Ne segue che per ogni (y,z) in tale intorno si ha

$$|x| \le 2a^{1/2} = 2(y^4+z^4)^{1/2} = O(y^2+z^2)\,.$$

c) S non è una superficie regolare, e per la precisione non è regolare nell'origine. Infatti, se per assurdo lo fosse, sapremmo dal punto b) che il piano tangente a S nell'origine è il piano yz, e quindi in un opportuno intorno dell'origine S dovrebbe coincidere con il grafico di una funzione, in contraddizione con il fatto che quando $y, z \to 0$ l'equazione (4) ha tre soluzioni che convergono a 0 (come osservato sopra).

7. a) Una possibilità è $v := \frac{1}{12}(x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) = \frac{1}{12}(x_1^2 + x_2^2)x_1 x_2$.

b) Ponendo $w := u - v$ il problema (*) diventa

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } D, \\ w = -\frac{1}{12}x_1 x_2 & \text{su } \partial D \end{cases} \tag{5}$$

(ho usato il fatto che $v = \frac{1}{12}x_1x_2$ su ∂D). Si vede subito che una soluzione di questo problema è proprio $w = -\frac{1}{12}x_1x_2$, e quindi

$$u = v + w = \frac{1}{12}(x_1^2 + x_2^2 - 1)x_1x_2\,.$$

8. a) se $\dim V > n-k$ possiamo trovare una base $(v_1, \dots, v_n)$ di X tale che $v_i \in V$ per tutti gli indici i tranne al più $k-1$. Ne segue che

$$\omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = 0 \quad \text{per ogni multi-indice } (i_1, \dots, i_k) \in I_{n,k},$$

e per quanto visto a lezione questo implica $\omega = 0$.

b) Supponiamo che $\omega = \lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_k$ con $\lambda_i \in \wedge^1 X$ per ogni i. Vale allora la seguente generalizzazione della formula per il prodotto esterno (che può essere dimostrata per induzione su k)

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \lambda_1(x_{\sigma(1)}) \cdots \lambda_k(x_{\sigma(k)})$$

dove S_k è il gruppo delle permutazioni dell'insieme degli indici $\{1, \dots, k\}$. Usando questa formula si vede subito che $\omega_x = 0$ se $x \in \ker(\lambda_i)$ per ogni i. Dunque V contiene l'intersezione dei $\ker(\lambda_i)$, e poiché questo sottospazio ha dimensione almeno $n - k$, lo stesso vale per V.

c) Dati $x, x' \in \mathbb{R}^4$ si ha che

$$\begin{aligned} \omega_x(x') := \omega(x, x') &= \langle dx_1 \wedge dx_2\, ;\, x, x' \rangle + \langle dx_3 \wedge dx_4\, ;\, x, x' \rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} x_3 & x_3' \\ x_4 & x_4' \end{pmatrix} \\ &= (-x_2, x_1, -x_4, x_3) \cdot x' \end{aligned}$$

e dunque $\omega_x = 0$ se e solo se $x = 0$, cioè $V = \{0\}$. Questo dimostra che ω non può essere scritta come prodotto esterno di due elementi di $\wedge^1(\mathbb{R}^4)$, perché in quel caso si avrebbe $\dim(V) \geq 2$ per quanto visto al punto precedente.

Commenti

- Esercizio 4b). Una soluzione alternativa consiste nel calcolare direttamente $\omega(e_1, \dots, e_{n-1})$: usando il fatto (noto!) che $\omega_i(e_1, \dots, e_{n-1})$ coincide con il determinante del minore della matrice $(e_1, \dots, e_{n-1})$ ottenuto rimuovendo la riga i-esima. Questo permette di riconoscere in $\omega(e_1, \dots, e_{n-1})$ lo sviluppo del determinante della matrice $(a, e_1, \dots, e_{n-1})$ rispetto alla prima colonna. Quindi, definendo e_0 come nella soluzione data sopra ed usando il fatto che $a = \pm|a|\, e_0$ (dove il segno è positivo o negativo a seconda che a abbia la stessa direzione di e_0 o meno) si ottiene
$$\omega(e_1, \dots, e_{n-1}) = \det(a, e_1, \dots, e_{n-1}) = \pm a \det(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) = \pm a\,.$$
- Esercizio 5. La superfice S considerata qui è (omeomorfa a) un toro di dimensione due.
- Esercizio 5a). Molti hanno proposto delle parametrizzazioni corrette, senza però verificare che queste mappe fossero iniettive e aperte in S (e senza neanche dire che questa era una delle verifiche da fare). Alcuni hanno definito le parametrizzazioni su insiemi non aperti.
- Esercizio 6c). Si verifica facilmente che il gradiente della funzione $x^3 - 3(y^4 + z^4)x + y^{12} + z^{12}$ non si annulla in alcun punto di S tranne l'origine, e dunque S è una superfice senza bordo di classe $\mathscr{C}^\infty$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Un modo alternativo di vedere che S non è una superfice in $\mathbb{R}^3$ è il seguente: presa una palla aperta B sufficientemente piccola e centrata nell'origine, segue da quanto visto nella dimostrazione del punto b) che l'insieme $S \cap B$ è omeomorfo all'unione di tre dischi i cui centri sono stati identificati ad un punto. Pertanto rimuovendo questo punto $S \cap B$ diventa sconnesso, contrariamente a quanto succederebbe se S fosse una superfice.
- Esercizio 7b). In mancanza di colpo d'occhio è comunque possibile ricavare la soluzione del problema (5) usando la formula vista a lezione.
- Esercizio 7b). Usando l'unicità per la soluzione del problema (5) dimostrata a lezione, si ottiene che anche la soluzione del problema (*) è unica.
- Esercizio 8b). Si potrebbe dimostrare un risultato più preciso: $\omega \neq 0$ si scrive come prodotto di k elementi di $\wedge^1 X$ se e solo se $\dim V = n - k$.

1. Detto ω_i il prodotto dei dx_j con $j \neq i$, si ha che

$$\begin{aligned} d\omega &= d\exp(|x|^2) \wedge (dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4) \\ &= 2\exp(|x|^2)\,(x_2\omega_1 + x_1\omega_2 + x_4\omega_3 + x_3\omega_4)\,. \end{aligned}$$

Infine $\omega \wedge \omega = 2\exp(2|x|^2)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_4$.

2. Usando il fatto che $\mathscr{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+y^2}$ e la formula $\mathscr{F}(e^{iax}g) = \widehat{g}(y-a)$ si ottiene

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(e^{-|x|}\cos x) &= \frac{1}{2}\big[\mathscr{F}(e^{ix}e^{-|x|}) + \mathscr{F}(e^{-ix}e^{-|x|})\big] \\ &= \frac{1}{1-(y-1)^2} + \frac{1}{1-(y+1)^2} = \frac{4+2y^2}{4+y^4}\,. \end{aligned}$$

3. Per esempio $f_n(x) := g(x-n)$ dove g è una qualunque funzione limitata a supporto compatto (non quasi ovunque nulla).

4. a) Si osservi che f è pari se e solo se

$$f(x) - f(-x) = 0 \tag{1}$$

dove l'identità (1) è intesa nel senso dello spazio L^2. Data una successione (f_n) che converge a f in L^2, si verifica subito che $f_n(-x)$ converge a $f(-x)$ in L^2, e quindi se le funzioni f_n soddisfano la (1), passando al limite si ottiene che anche f soddisfa la (1) e quindi è pari.

b) Detto V il sottospazio delle funzioni dispari, vale a dire le f tali che $f(x) = -f(-x)$ q.o., si ha che data $f \in W$ e $g \in V$ la funzione $f \cdot g$ è dispari e quindi ha integrale zero, ovvero $\langle f\,;\,g\rangle = 0$. Dunque $W \perp V$ e modificando la dimostrazione al punto precedente si ottiene anche che V è chiuso. Inoltre possiamo scrivere ogni funzione $f \in L^2(I)$ come somma di $f_p \in W$ e $f_d \in V$ ponendo

$$f_p(x) := \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{e} \quad f_d(x) := \frac{f(x)-f(-x)}{2}\,. \tag{2}$$

Questo mostra che $L^2(I) = W + V$, e dunque $V = W^\perp$.

c) Segue immediatamente dalla (2) che $f \mapsto f_p$ è la proiezione ortogonale di $L^2(I)$ su W.

5. a) I coefficienti di $g(x)$ rispetto al sistema ortogonale $\{\sin(nx) : n = 1,2,\dots\}$ sono dati da

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left[1 - \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}\right] \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\,dx \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_0^\pi e^{i(n+2)x} - 2e^{inx} + e^{i(n-2)x} - e^{-i(n+2)x} + 2e^{-inx} - e^{-i(n-2)x}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi -\sin((n+2)x) + 2\sin(nx) - \sin((n-2)x)\,dx \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari,} \\ -\dfrac{16}{\pi n(n^2-4)} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Per risolvere il problema (*) procediamo come al solito, scrivendo l'incognita u nella forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty c_n(t)\,\sin(nx)\,.$$

Scrivendo l'equazione e la condizione iniziale in (*) in termini dei coefficienti c_n otteniamo che per ogni $n = 1,2,\dots$ la funzione c_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = -n^2 y + a_n \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi un semplice calcolo dà

$$c_n(t) = \frac{a_n}{n^2}\big(1 - e^{-n^2 t}\big)\,.$$

Dunque la soluzione del problema (*) dovrebbe essere

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n^2}\big(1 - e^{-n^2 t}\big)\,\sin(nx)}_{u_n(t,x)}\,. \tag{3}$$

Per dimostrare che così è, cominciamo con lo studiare la convergenza totale della serie di funzioni u_n e delle loro derivate di ordine uno in t e x e di ordine due in x. Si vede facilmente che detta $\|\cdot\|$ la norma del sup per funzioni su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}
\|u_n\| &= n^{-2}|a_n| = O(n^{-5})\\
\|(u_n)_x\| &= n^{-1}|a_n| = O(n^{-4})\\
\|(u_n)_{xx}\| &= |a_n| = O(n^{-3})\\
\|(u_n)_t\| &= |a_n| = O(n^{-3})
\end{aligned}$$

e dunque la serie di funzioni in (3) converge totalmente e lo stesso vale per la serie delle derivate di ordine uno in t e x e di ordine due in x. Quindi u è una funzione continua ben definita su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, di classe $\mathscr{C}^1$ in t e d i classe $\mathscr{C}^2$ in x. A questo punto la verifica del fatto che u risolve (*) è la solita.

c) Procedendo come al punto b) si dimostra che u è di classe $\mathscr{C}^3$ nella variabile x su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$.

Si può inoltre dimostrare che u è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Osserviamo infatti che a_n/n^2 sono i coefficienti di una funzione $h(x)$ tale che $h''(x) = -g(x)$ e $h(0) = h(\pi) = 0$, vale a dire

$$h(x) = \frac{1}{2}x(\pi - x) + \frac{1}{4}(1 - \cos(2x))\,,$$

e quindi la formula (3) può essere riscritta come

$$u(t,x) = h(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} e^{-n^2 t}\sin(nx)\,;$$

ora è facile vedere che la serie di funzioni in questa formula converge totalmente con tutte le sue derivate su $[\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$ per ogni $\delta > 0$ (un conto del genere è stato fatto a lezione) e quindi dà luogo ad una funzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ su $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.

Si può infine dimostrare che non è di classe $\mathscr{C}^4$ in x su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Infatti, derivando l'equazione $u_t = u_{xx} + g$ rispetto a t si ottiene

$$u_{tt} = u_{xxt} = (u_{xx} + g)_{xx} = u_{xxxx} + \cos(2x)\,; \tag{4}$$

inoltre derivando la condizione $u(t,0) = 0$ due volte rispetto a t si ottiene $u_{tt}(t,0) = 0$, che insieme alla (4) ci dà $u_{xxxx}(t,0) = -1$ per ogni $t > 0$. D'altra parte la condizione $u(0,x) = 0$ implica che $u_{xxxx}(0,x) = 0$ e dunque u_{xxxx} è discontinua in $(0,0)$. Pertanto u non è di classe $\mathscr{C}^4$ in x. Usando la (4) si ottiene quindi che u non è neanche di classe $\mathscr{C}^2$ in t (su $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$).

6. a) Siccome E è limitato, possiamo trovare una palla B centrata nell'origine che contiene E. Pertanto la convergenza di f_n a f in $L^1(B)$ implica anche quella in $L^1(E)$.

b) Indichiamo con $M(f,x,r)$ la media di f sulla palla di centro x e raggio r. Siccome l'integrale di f_n su un qualunque insieme E converge a quello di f (cfr. il punto precedente), abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} M(f_n,x,r) = M(f,x,r) \tag{5}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r > 0$). Inoltre, siccome ciascuna f_n ha la proprietà della media, $M(f_n,x,r) = M(f_n,x,r')$ per ogni $r,r' > 0$, e quindi usando la (5) si ottiene che $M(f,x,r) = M(f,x,r')$, ovvero che $M(f,x,r)$ è costante in r. D'altra parte $f(x)$ è il limite di $M(f,x,r)$ per $r\to 0$ perché f è continua e quindi $M(f,x,r) = f(x)$ per ogni x ed ogni r. Dunque f ha la proprietà della media, e pertanto è armonica.

7. a) Facciamo vedere innanzitutto che $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ è denso in $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ rispetto alla norma del sup, che indichiamo con $\|\cdot\|$. Data infatti $f \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ ed $\varepsilon > 0$, esiste m tale che $|f(x)| \leq \varepsilon$ per $|x| \geq m$; quindi, presa una funzione $g : \mathbb{R} \to [0,1]$ continua e con supporto compatto tale che $g(x) = 1$ per $|x| \leq m$, si ha che $f_\varepsilon := fg \in \mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ e $\|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. La densità di $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ in $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ segue dall'arbitrarietà di f e di ε.

   Per concludere questa parte dell'esercizio ci basta dimostrare che $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ è denso in $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$, e questo lo si ottiene approssimando una qualunque funzione f in $\mathscr{C}_c(\mathbb{R})$ con le regolarizzate per convoluzione $f * g_\delta$ dove g è un nucleo regolarizzante a supporto compatto e di classe $\mathscr{C}^\infty$. Si è infatti visto a lezione che le regolarizzate $f * g_\delta$ sono di classe $\mathscr{C}^\infty$ e convergono ad f uniformemente quando f è uniformemente continua, come in questo caso, e per concludere basta osservare che se f e g_δ hanno supporto compatto lo stesso vale per $f * g_\delta$ (per la precisione il supporto di $f * g_\delta$ è contenuto nella somma dei supporti di f e g_δ).

   b) Sappiamo che per ogni $f \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$ la trasformata $\mathscr{F} f$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ e $\mathscr{F}^*(\mathscr{F} f) = 2\pi f$, ovvero $\mathscr{F}(\mathscr{F} f) = 2\pi f(-x)$. Dunque $2\pi f(-x)$ appartiene a $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R}))$. Da questo consegue che $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R}))$ contiene tutto $\mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$, ed in particolare contiene $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, che per quanto visto al punto a) è denso in $\mathscr{C}_0(\mathbb{R})$ rispetto alla norma del sup. Quindi lo stesso vale per $\mathscr{F}(L^1(\mathbb{R}))$.

8. a) L'insieme $f(S)$ è compatto in quanto immagine continua di compatto, e quindi f, essendo una bigezione continua da S in $f(S)$, è anche un omeomorfismo.

   Dato $y \in f(S)$, prendiamo $x \in S$ tale che $y = f(x)$. Siccome S è una superfice senza bordo di classe $\mathscr{C}^k$ esiste U intorno aperto di y in S, A aperto di $\mathbb{R}^d$ e $g : A \to U$ omeomorfismo tale che g è di classe $\mathscr{C}^k$ (come mappa a valori in $\mathbb{R}^n$) e preso t tale che $x = g(t)$, il differenziale $dg(t)$ ha rango d e la sua immagine coincide con $\mathrm{Tan}(S, x)$. (Stiamo usando una formulazione della nozione di superfice leggermente diversa da quella data a lezione.)

   Vogliamo far vedere che $g' := f \circ g$ è la parametrizzazione che ci serve per dimostrare che $f(S)$ è una superfice di dimensione d e classe $\mathscr{C}^k$ in $\mathbb{R}^m$. Siccome f è un omeomorfismo, $U' := f(U)$ è aperto in $f(S)$ e contiene y, la mappa $g' := f \circ g$ è un omeomorfismo da A in U' ed è di classe $\mathscr{C}^k$ (in quanto composizione di omeomorfismi di classe $\mathscr{C}^k$), ed infine $dg'(t) = df(x) \circ dg(t)$ ha rango d (si usa il fatto che l'immagine di $dg'(t)$ coincide con l'immagine di $\mathrm{Tan}(S, x)$ secondo $df(x)$, ed ha quindi dimensione d perché $df(x)$ ha rango d per ipotesi).

   b) Sia S la retta $\mathbb{R}$, e sia $f : S \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) := (e^x, 0)$. In tal caso S è una "superfice" senza bordo di dimensione 1 (in $\mathbb{R}$, ma volendo anche in $\mathbb{R}^n$), f soddisfa le ipotesi richieste, ma l'insieme $f(s)$ non è una superfice in $\mathbb{R}^2$ perché non è chiuso.

   Se S non è compatta ed f è propria (ovvero $f(x_n)$ tende all'infinito per ogni successione (x_n) in S che tende all'infinito), allora $f(S)$ è ancora una superfice. Il punto chiave è far vedere che f è una mappa chiusa, da cui segue che $f(S)$ è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^m$ e f è un omeomorfismo da S in $f(S)$; il resto della dimostrazione procede come sopra.

Commenti

- Esercizio 8a). Quasi nessuno ha messo in evidenza il ruolo della compattezza nella dimostrazione di questo enunciato.

- Esercizio 8b). Se S non è compatta è possibile dare un esempio in cui $f(S)$ è chiusa, anzi compatta, ma non è una superficie: si prende come S la retta $\mathbb{R}$ e
$$f(x) := \Big(\frac{x - x^3}{1 + x^4}, \frac{x}{1 + x^2} \Big).$$
  In tal caso $f(S)$ è una curva compatta a forma di "otto".

1. Una base di Hilbert di $L^2(-\pi,\pi)$ è data dalle funzioni $e_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ con $n \in \mathbb{Z}$; inoltre
$$e = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_0 + e_1 + e_2)\,.$$
Cominciamo con il completare $\{e\}$ ad una base ortonormale di $\mathrm{Span}(e_0, e_1, e_2)$, aggiungendo per esempio
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(e_0 - e_1) \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(e_0 + e_1 - 2e_2)\,.$$
Per ottenere una base di tutto lo spazio basta quindi aggiungere tutti gli e_n con $n \neq 0, 1, 2$.

2. Riscriviamo f in termini della funzione $g(x) := (1 + x^2)^{-1}$, la cui trasformata è nota:
$$f(x) = \frac{1}{4 + (x+1)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \big(\frac{1}{2}(x+1)\big)^2} = \frac{1}{4}(\tau_{-1}\sigma_{1/2}g)(x)\,,$$
dove, al solito, si è posto $\tau_h f(x) := f(x-h)$ e $\sigma_\delta f(x) := f(\delta x)$. Pertanto, ricordando le formule per la trasformata di $\tau_h f$ e di $\sigma_\delta f$ e il fatto che $\hat{g}(y) = \pi e^{-|y|}$, otteniamo
$$\hat{f}(y) = \frac{1}{4}\mathscr{F}(\tau_{-1}\sigma_{1/2}g)(y) = \frac{1}{4}e^{iy}\,\mathscr{F}(\sigma_{1/2}g)(y) = \frac{1}{4}e^{iy}\,2\,\hat{g}(2y) = \frac{\pi}{2}e^{iy-|2y|}\,.$$

3. Si tratta di un semplice conto:
$$\begin{aligned} f^{\#}\omega &= e^{-x_1x_2} d(x_1x_2) \wedge d(x_1^2 + x_2^2) \\ &= e^{-x_1x_2}(x_2dx_1 + x_1dx_2) \wedge (2x_1dx_1 + 2x_2dx_2) = 2(x_2^2 - x_1^2)e^{-x_1x_2}dx_1 \wedge dx_2\,. \end{aligned}$$

4. Osserviamo che se u risolve il problema assegnato, allora $v := u_x$ risolve
$$\begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(t,0) = v(t,\pi) = 0 \\ v(0,x) = -\sin(2x) \end{cases} \tag{1}$$
e quindi possiamo trovare v al solito modo, vale a dire scrivendola come
$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\,\sin(nx)\,.$$
Così facendo otteniamo che ciascun c_n deve soddisfare l'equazione differenziale $\dot{y} = -n^2 y$ con la condizione iniziale $y(0) = 0$ per $n \neq 2$, e $y(0) = -1$ per $n = 2$. Dunque $c_n(t) = 0$ per $n \neq 2$ e $c_2(t) = -e^{-4t}$, e pertanto una soluzione del problema (1) è
$$v(t,x) = -e^{-4t}\,\sin(2x)\,.$$
Integrando rispetto ad x abbiamo quindi
$$u(t,x) = e^{-4t}\,\cos^2 x + a\,,$$
ed è facile verificare che per $a = 0$ questa funzione risolve effettivamente il problema originale.

5. a) Posto $v := f(u)$ un semplice calcolo dà
$$\nabla v = f'(u)\,\nabla u \quad \text{e} \quad \nabla^2 v = f'(u)\,\nabla^2 u + f''(u)\,\nabla u \otimes \nabla u$$
(dato un vettore $a \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $a \otimes a$ la matrice $n \times n$ definita da $(a \otimes a)_{ij} := a_i a_j$). Pertanto, siccome il laplaciano è la traccia della derivata seconda,
$$\Delta v = f'(u)\,\Delta u + f''(u)\,|\nabla u|^2\,.$$
Da questo formula segue che se u è armonica allora
$$\Delta v = f''(u)\,|\nabla u|^2\,,$$
ed in particolare v è armonica se $f'' = 0$, ovvero se f è affine. Questa condizione è anche necessaria (basta considerare una funzione armonica u con gradiente mai nullo e immagine uguale a $\mathbb{R}$, per esempio $u(x) := x_1$).

6. a) Sia $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to X$ l'applicazione lineare data da $T(A) := A + A^t$, e sia I la matrice identità. Un semplice calcolo mostra che per ogni $A, H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si ha

$$f(A+H) = f(A) + \underbrace{A^tH + H^tA + H^t + H}_{\text{lineare in } H} + \underbrace{H^tH}_{o(|H|)}$$

e quindi

$$df(A) : H \mapsto A^tH + H^tA + H^t + H = T((A^t+I)H)\,. \tag{2}$$

b) Possiamo riscrivere $f(A)$ come $(A^t + I)(A + I) - I$, e dunque $f(A) = 0$ equivale a dire che $(A^t + I)(A + I) = I$, da cui segue che sia $A^t + I$ che $A + I$ sono matrici invertibili (e per la precisione sono una l'inversa dell'altra).

c) Siccome f è una mappa di classe $\mathscr{C}^\infty$ dallo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{n\times n}$ di dimensione n^2 allo spazio vettoriale X di dimensione $\frac{1}{2}n(n+1) = n^2 - d$, ci basta far vedere che l'applicazione lineare $df(A) : \mathbb{R}^{n\times n} \to X$ è di rango massimo, ovvero surgettiva, per ogni A tale che $f(A) = 0$. Tenendo presente la formula (2) ed il fatto che $T : \mathbb{R}^{n\times n} \to X$ è surgettiva, ci basta dimostrare che $H \mapsto (A^t + I)H$ è surgettiva da $\mathbb{R}^{n\times n}$ in sé, e questo segue dal fatto che $A^t + I$ è invertibile.

7. a) Usando il fatto che v è ortogonale a tutte le altre colonne di V si ottiene

$$V^tV = \begin{pmatrix} v^t \\ W^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |v|^2 & 0 \\ 0 & W^tW \end{pmatrix}$$

e quindi

$$|\det V|^2 = \det(V^tV) = |v|^2 \det(W^tW)\,.$$

b) Sia $g : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ una mappa di classe $\mathscr{C}^1$ ed E un insieme misurabile in $\mathbb{R}^{n-1}$ tali che g è una bigezione da E in ∂D. Posto $G(\rho, t) := \rho\, g(t)$ per ogni $\rho \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}^n$, si ha che G è una bigezione da $(0, r) \times E$ in $D(r) \setminus \{0\}$ e quindi

$$\int_{D(r)} f(x)\,dx = \int_0^r \int_E f(G(\rho,t))\,|\det(\nabla G(\rho,t))|\,dt\,d\rho\,. \tag{3}$$

Osserviamo ora che

$$\nabla G(\rho,t) = \big(g(t)\,,\ \rho\,\nabla g(t)\big)\,;$$

inoltre, poiché g parametrizza la sfera di raggio 1 centrata nell'origine, si ha che $|g|^2 = 1$, e derivando questa identità si ottiene $g^t\,\nabla g = 0$, il che significa che in ogni punto g è ortogonale a tutte le colonne di ∇g. Possiamo quindi applicare quanto visto al punto a) alla matrice ∇G, ottenendo

$$|\det(\nabla G)| = |g|\sqrt{\det[\rho^2\,(\nabla g)^t\,\nabla g]} = \rho^{n-1} Jg\,.$$

Dunque l'integrale su E nella formula (3) diventa

$$\begin{aligned}\int_E f(G(\rho,t))\,|\det(\nabla G(\rho,t))|\,dt &= \rho^{n-1}\int_E f(\rho\,g(t))\,Jg(t)\,dt \\ &= \rho^{n-1}\int_{\partial D} f(\rho x)\,d\sigma_{n-1}(x)\,,\end{aligned}$$

e sostituendo la formula (3) diventa infine la (*).

c) Se la palla D non è centrata nell'origina bensì in un qualche punto x_0 la formula (*) non è corretta. Questo lo si verifica prendendo $f(x) := \langle x_0\,;\,x - x_0\rangle$: per ragioni di simmetria si ha che l'integrale di f su $D(1)$ deve essere uguale a 0, ma è facile vedere che l'integrale di f su $\partial D(\rho)$ è strettamente negativo per ogni $\rho < 1$, per cui il termine di sinistra della (*) è nullo mentre quello di destra è strettamente negativo.

8. a) L'aggiunta di $\mathscr{F}$ è l'anti-trasformata: prese infatti $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, si è visto a lezione che

$$\langle \hat{f}\,;\,g\rangle = \langle f\,;\,\check{g}\rangle\,,$$

e chiaramente questa uguaglianza si estende a tutte le possibili funzioni f, g in $L^2(\mathbb{R})$ per densità. Il fatto che l'aggiunta della trasformata sia l'anti-trasformata giustifica l'uso della notazione $\mathscr{F}^*$ per quest'ultima.

Per calcolare $\mathscr{F}^4$ partiamo dal fatto che $\mathscr{F}^*\mathscr{F} = 2\pi I$, dove I è l'identità su H, e dal fatto che $\mathscr{F}^*f(x) = \mathscr{F}f(-x)$ (questa formula segue dalla definizione dell'anti-trasformata di funzioni in $L^1(\mathbb{R})$, e si estende alle funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ per densità). Pertanto $\mathscr{F}^2 f(x) = 2\pi\, f(-x)$, da cui segue immediatamente che $\mathscr{F}^4 = 4\pi^2 I$.

b) Siccome $\mathscr{F}^4 = 4\pi^2 I$, ogni autovalore λ di $\mathscr{F}$ deve soddisfare $\lambda^4 = 4\pi^2$, ovvero

$$\lambda = \pm\sqrt{2\pi},\ \pm i\sqrt{2\pi}\,.$$

Mostriamo che ciascuno di questi valori di λ è effettivamente un autovalore di $\mathscr{F}$ esibendo un autovettore non banale. Presa una qualunque funzione $f \in H$, poniamo

$$g := \sum_{k=0}^{3} \lambda^{-k} \mathscr{F}^k f\,;$$

usando il fatto che $\mathscr{F}^4 = 4\pi^2 I$ si vede facilmente che

$$\mathscr{F} g = \lambda g\,,$$

e quindi ci resta solo da far vedere che esiste f tale che $g \neq 0$; per $\lambda = \pm\sqrt{2\pi}$ basta prendere $f(x) := e^{-|x|}$, mentre per $\lambda = \pm i\sqrt{2\pi}$ possiamo prendere $f(x) := xe^{-|x|}$ (omettiamo le verifiche).

Commenti

- Esercizio 4b). Un modo alternativo di risolvere l'esercizio consiste nel rappresentare la funzione incognita $u(t,\cdot)$ in termini di una base di autovettori della derivata seconda definiti su $[0,\pi]$ e con derivata nulla in 0 e π. Una tale base è data dalle funzioni $\{\cos(nx)\}$ con $n = 1, 2, \dots$

- Esercizio 4b). Alcuni hanno risolto l'esercizio semplicemente scrivendo $u(t,\cdot)$ come combinazione lineare di e^{inx} con $n \in \mathbb{Z}$, e verificando alla fine che la soluzione così trovata soddisfa le condizioni al bordo richieste (oltre che quelle naturalmente associate a questa base). Il risultato è corretto, ma il motivo per cui questo modo di procedere funziona non è immediato.

- Esercizio 7b). Completiamo la dimostrazione esibendo una parametrizzazione della sfera di raggio 1 centrata nell'origine:

$$g(t) := \begin{pmatrix} \cos t_1 \\ \sin t_1 \cos t_2 \\ \sin t_1 \sin t_2 \cos t_3 \\ \vdots \\ \sin t_1 \dots \sin t_{n-2} \cos t_{n-1} \\ \sin t_1 \dots \sin t_{n-2} \sin t_{n-1} \end{pmatrix}$$

  con $t_1, \dots, t_{n-2} \in [0,\pi]$ e $t_{n-1} \in [0, 2\pi]$ (così facendo g non è proprio iniettiva, ma lo diventa rimuovendo un opportuno insieme trascurabile di t).

- Esercizio 7b). Per errore nel testo originale non era stato specificato che la palla D fosse unitaria. Notare che la formula (*) è stato usata a lezione dimostrandola solo in dimensione $n = 2$; il punto dell'esercizio era di dare una dimostrazione per n qualunque.

- Esercizio 8b). Sviluppando la dimostrazione data sopra si può ottenere un risultato più preciso: detti λ_h con $h = 1, \dots, 4$ gli autovalori di $\mathscr{F}$ e posto $S_h := P_h(H)$ dove $P_h : H \to H$ è dato da

$$P_h f := \sum_{k=0}^{3} \lambda_h^{-k} \mathscr{F}^k f\,,$$

  abbiamo che gli spazi S_h sono a due a due ortogonali, coincidono con gli autospazi dei rispettivi λ_h, e la loro somma diretta è tutto H; inoltre P_h è la proiezione ortogonale di H su S_h. Per dimostrare questo enunciato cominciamo con l'osservare che ciascun S_h *è contenuto* nell'autospazio di λ_h (lo abbiamo dimostrato sopra); inoltre un semplice calcolo mostra che

$$f = \frac{1}{4}(P_1 f + \dots + P_4 f)\,, \tag{4}$$

e di conseguenza la somma diretta degli S_h coincide con tutto H (e pertanto ciascun S_h *coincide* con l'autospazio di λ_h. L'ortogonalità degli S_h segue da un semplice calcolo, e insieme alla (4) implica che P_h è la proiezione ortogonale su S_h.

- Esercizio 8b). Usando il fatto che $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathscr{F}$ è un'isometria di H si ottiene che gli autovalori λ di questa applicazione lineare soddisfano $|\lambda| = 1$. Alcuni dei presenti ne hanno quindi dedotto che $\lambda = \pm 1$, dimenticando che gli autovalori possono essere (anzi sono) complessi.

1. Partendo dai fatti noti
$$\mathscr{F}(-ixu) = (\mathscr{F}u)' \quad \text{e} \quad \mathscr{F}\big(e^{-x^2/2}\big) = \sqrt{2\pi}\, e^{-y^2/2}$$
si ottiene che $\mathscr{F}(-x^2u) = (\widehat{u})''$ e quindi
$$\mathscr{F}\big((1-x^2)e^{-x^2/2}\big) = \sqrt{2\pi}\big[e^{-y^2/2} + (e^{-y^2/2})''\big] = \sqrt{2\pi}\, y^2\, e^{-y^2/2}\,.$$

2. Poiché $d\omega = (a+2)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, si ha che $d\omega = 0$ se e solo se $a = -2$. In tal caso, inoltre,
$$\begin{aligned} \omega &= \big[3x_1^2 dx_1 - 2(x_3 dx_1 + x_1 dx_3) + 4x_3 dx_3\big] \wedge dx_2 \\ &= d(x_1^3 - 2x_1x_3 + 2x_3^2) \wedge dx_2 = d\big((x_1^3 - 2x_1x_3 + 2x_3^2)\, dx_2\big)\,, \end{aligned}$$
e quindi la primitiva cercata è $(x_1^3 - 2x_1x_3 + 2x_3^2)\, dx_2$.

3. Chiaramente $f_n(x)$ converge a 0 per ogni x, e quindi il limite in $L^p(\mathbb{R})$ della successione (f_n), se esiste, deve essere la funzione 0. Resta da capire per quali p si ha che (f_n) converge a 0 in norma, ovvero $\|f_n\|_p \to 0$. Ora, utilizzando il cambio di variabile $y = n^2(x-n)$ si ottiene
$$\|f_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{n}{1+n^4(x-n)^2}\right)^p dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{n^{p-2}}{(1+y^2)^p}\, dy = c_p\, n^{p-2}$$
dove $c_p := \int (1+y^2)^{-p}\, dy$ è un numero finito per ogni p. Pertanto si ha che $\|f_n\|_p \to 0$ se e solo se $p < 2$.

4. a) se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti, uno di loro può essere scritto come combinazione lineare dei rimanenti, per esempio $v_1 = \sum_{i=2}^k a_i v_i$ (gli altri casi sono analoghi), e quindi
$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i=2}^k a_i \omega(v_i, v_2, \dots, v_k) = 0$$
dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\omega(v_i, v_2, \dots, v_k) = 0$ per ogni $i \geq 2$.
Dati $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}^m$, si ha che
$$T^\#\omega(w_1, \dots, w_k) := \omega(Tw_1, \dots, Tw_k) = 0$$
dove l'ultima uguaglianza la si ottiene applicando il punto a) ai vettori $Tw_1, \dots, Tw_k$ (che sono linearmente dipendenti perché il rango di T è strettamente minore di k).

5. Data u della forma $u(x) := v(|x|)$ con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzione di classe $\mathscr{C}^2$, semplici calcoli danno
$$\begin{aligned} D_i u(x) &= \dot v(|x|)\, \frac{x_i}{|x|} \quad \text{per } i = 1, \dots, d, \\ D_i^2 u(x) &= \ddot v(|x|)\, \frac{x_i^2}{|x|^2} + \dot v(|x|)\, \frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3} \quad \text{per } i = 1, \dots, d, \\ \Delta u(x) &= \ddot v(|x|) + \dot v(|x|)\, \frac{d-1}{|x|}\,, \end{aligned}$$
e pertanto u è armonica se e solo se la funzione $v = v(\rho)$ soddisfa l'equazione differenziale lineare
$$\ddot v + \frac{d-1}{\rho} \dot v = 0\,.$$
Possiamo risolvere questa equazione partendo dal fatto che si tratta di un'equazione lineare del primo ordine (a coefficienti non costanti) nella variabile $\dot v$, ottenendo quindi che v deve essere della forma $v(\rho) = c_1\rho^{2-d} + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Pertanto
$$u(x) = c_1|x|^{2-d} + c_2 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

6. a) Viste le condizioni al bordo, procediamo come al solito cercando u della forma
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty a_n(t)\, \sin(nx)\,.$$

Sotto queste ipotesi si ha che

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a}_n \sin(nx) \quad \text{e} \quad u_{xxxx} = \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n \sin(nx)\,,$$

e quindi il problema di partenza si riduce ad un sistema di equazioni differenziali indipendenti per ciascuno dei coefficienti $a_n(t)$, e per la precisione

$$\begin{cases} \dot{a}_n = -n^4 a_n \\ a_n(0) = c_n \end{cases} \qquad \text{vale a dire} \quad a_n(t) = c_n e^{-n^4 t} \tag{1}$$

dove c_n sono i coefficienti del dato iniziale $(1+4\cos x)\sin x$ rispetto alla base $\{\sin(nx)\}$. Siccome

$$(1 + 4\cos x)\sin x = \sin x + 2\sin(2x)\,,$$

abbiamo che $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ e $c_n = 0$ per $n > 2$. Quindi

$$u(t, x) = e^{-t} \sin x + 2e^{-16t} \sin(2x)\,,$$

ed essendo questa somma finita, u risulta chiaramente essere una soluzione di classe $\mathscr{C}^\infty$ del problema di partenza.

b) Indichiamo con a_n i coefficienti di un'eventuale soluzione u del problema di partenza (nel senso che $a_n(t)$ sono i coefficienti di $u(t, \cdot)$ rispetto alla base $\{\sin(nx)\}$ di $L^1(0, \pi)$ per ogni $t \geq 0$). Il modo usuale di ottenere l'unicità di u consiste nel dimostrare che questi coefficienti soddisfano il problema di Cauchy in (1) e sono pertanto univocamente determinati. A questo scopo, ci serve far vedere che i coefficienti di u_{xxxx} sono dati da $n^4\, a_n$. Ora, usando la condizione al bordo $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ si ottiene che i coefficienti di u_{xx} sono $-n^2 a_n$, ma non avendo fatto ipotesi sui valori al bordo di u_{xx}, non possiamo dedurne che i coefficienti di u_{xxxx} sono $n^4 a_n$ (mentre lo sarebbero aggiungendo la condizione al bordo $u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi)$).

Questo suggerisce che la soluzione del problema non sia unica. Per convincercene ci basta esibire una funzione v che soddisfa l'equazione, le condizioni al bordo $v(t, 0) = v(t, \pi) = 0$, la condizioni iniziale $v(0, x) = 0$, e che non sia identicamente nulla. Per esempio possiamo cercare una funzione v che oltre alle condizioni dette sopra soddisfa anche $v_{xx}(t, 0) = v_{xx}(t, \pi) = 2$ (questo garantisce che v non sia identicamente nulla). Per trovare questa v usiamo il cambio di variabile $v(t, x) = w(t, x) + x(x - \pi)$, riducendoci quindi a trovare una soluzione w di

$$\begin{cases} w_t = -w_{xxxx} \\ w(t, 0) = w(t, \pi) = 0 \\ w_{xx}(t, 0) = w_{xx}(t, \pi) = 0 \\ w(0, x) = -x(x - \pi) \end{cases} .$$

Questo problema lo possiamo risolvere cercando ancora una volta una soluzione del tipo $w(t, x) = \sum a_n(t) \sin(nx)$, e così facendo si ottiene infatti

$$w(t, x) = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{8}{\pi n^3} e^{-n^4 t} \sin(nx)$$

(omettiamo conti e verifiche).

7. a) Osserviamo che la forma bilineare $(\;;\;)$ è ben definita su tutto $L^2(I)$: che il valore di $(f; g)$ dipenda solo dalle classi di equivalenza di f e g è ovvio, mentre per far veder che l'integrale che definisce $(f; g)$ esiste ed è finito per ogni $f, g \in L^2$ si usa l'ipotesi che φ è limitata in valore assoluto da una costante finita M, e dunque $\int |f\, g\, \varphi| \leq M \int |f|\, |g| \leq M \|f\|_2 \|g\|_2$ che è finito. Inoltre la forma $(\;;\;)$ è chiaramente simmetrica.

Osserviamo ora che se $\varphi > 0$ quasi ovunque allora $(\;;\;)$ è definita positiva. In questo caso, infatti, il valore di $(f; f) := \int f^2 \varphi$ risulta essere chiaramente positivo, e vale 0 solo se $f^2 \varphi = 0$ q.o., vale a dire se $f = 0$ q.o. Facciamo ora vedere che vale anche il viceversa, cioè che se $(\;;\;)$ è definita positiva allora $\varphi > 0$ q.o. Se per assurdo così non fosse, l'insieme $E := \{x : \varphi(x) \leq 0\}$ avrebbe misura positiva, e quindi la funzione indicatrice 1_E sarebbe un elemento non nullo di $L^2(I)$ per cui $(1_E; 1_E) := \int_E \varphi \leq 0$.

b) Siccome $m \leq \varphi \leq M$, si ha che

$$\sqrt{m}\, \|f\|_2 \leq \|f\|_\varphi \leq \sqrt{M}\, \|f\|_2\,. \tag{2}$$

La prima disuguaglianza implica che una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\varphi$ è di Cauchy anche rispetto alla norma standard di L^2, e pertanto converge ad un qualche limite rispetto a questa norma; a questo punto la seconda disuguaglianza implica la convergenza anche rispetto alla norma $\|\cdot\|_\varphi$ (queste considerazione possono essere riassunte dicendo che la (2) significa che $\|\cdot\|_\varphi$ e $\|\cdot\|_2$ sono norme equivalenti, e pertanto se una è completa deve esserlo anche l'altra).

c) Basta prendere $\varphi(x) := x$ ed applicare quanto dimostrato al punto d).

d) Facciamo vedere che la norma $\|\cdot\|_\varphi$ è completa se e solo se esiste una costante $m > 0$ tale che $\varphi \geq m$ quasi ovunque. La parte "se" dell'implicazione è stata dimostrata al punto b) e quindi non ci resta che far vedere il "solo se".

Supponiamo dunque che questa condizione non sia verificata. L'idea è costruire una successione di funzioni positive f_n tali che

(i) la serie $\sum \|f_n\|_\varphi$ sia finita;

(ii) la funzione $g(x) := \sum f_n(x)$ non appartiene a $L^2(I)$ — si noti che $g(x)$ che è ben definita in ogni x in quanto somma di una serie a termini positivi.

Una volta fatto questo, avremo che per via di (i) e di un lemma visto a lezione le somme parziali g_n della serie $\sum f_n$ formano una successione di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_\varphi$, ma questa successione non ammette limite in $L^2(\mathbb{R})$ rispetto a questa norma. Per dimostrare quest'ultimo punto facciamo vedere che se la successione g_n convergesse ad un qualche limite $\tilde{g} \in L^1(I)$ rispetto alla norma $\|\cdot\|_\varphi$, allora si avrebbe $\tilde{g}(x) = g(x)$ q.o., in contraddizione con l'ipotesi (ii). In effetti, se $\|g_n - \tilde{g}\|_\varphi$ tende a zero, allora, usando dei ragionamenti già visti a lezione, si ha che passando ad un'opportuna sottosuccessione di n il valore di $g_n(x)$ tende a $\tilde{g}(x)$ per quasi ogni x, e dunque $\tilde{g}(x) = g(x)$ q.o.

Resta ora da far vedere che possiamo costruire delle funzioni f_n che soddisfano (i) e (ii). In effetti, se non esiste alcun $m > 0$ tale che $\varphi \geq m$ quasi ovunque, per ogni $n = 1, 2, \dots$ possiamo trovare un insieme misurabile A_n di misura a_n strettamente positiva tale che $\varphi \leq 1/n^4$ su A_n. Basta allora porre

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{a_n}} 1_{A_n}(x)$$

dove 1_A sta per la funzione indicatrice dell'insieme A. Osserviamo infatti che

$$\|f_n\|_\varphi = \left(\int_{A_n} \frac{\varphi}{a_n} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{n^2}$$

e quindi la condizione (i) è soddisfatta. Inoltre per ogni m si ha che

$$\|f\|_2^2 \geq \sum_{n=1}^{m} \|f_n\|_2^2 = m \tag{3}$$

e dunque $\|f\|_2 = +\infty$, ovvero f non appartiene a $L^2(I)$. La disuguaglianza in (3) segue dal fatto che le funzioni f_m sono tutte positive, e quindi per ogni $x \in I$ si ha

$$\big(f(x)\big)^2 \geq \big(f_1(x) + \cdots + f_m(x)\big)^2 \geq \big(f_1(x)\big)^2 + \cdots + \big(f_m(x)\big)^2 \,;$$

l'uguaglianza in (3) segue dal fatto che $\|f_n\|_2^2 = 1$.

8. a) La mappa g è chiaramente di classe $\mathscr{C}^\infty$ e propria, vale a dire che $|g(s_n)| \to +\infty$ per ogni successione di punti s_n tali che $|s_n| \to +\infty$. Questo dimostra che S è un sottoinsieme chiuso e non compatto di $\mathbb{R}^{n+1}$.

Per far vedere che S è una superficie senza bordo ci basta quindi dimostrare che g è una parametrizzazione, vale a dire è iniettiva (sappiamo già che è propria) e con differenziale di rango massimo. Fatto vedere questo, possiamo prendere su S l'orientazione indotta da g e dall'orientazione canonica di $\mathbb{R}^d$, cioè prendiamo come base dello spazio tangente ad S in $x = g(s)$) i vettori $(dg(s)\, e_1, \dots, dg(s)\, e_d)$ dove $(e_1, \dots, e_d)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^d$.

Verifichiamo che g è iniettiva: dati s ed s' tali che $g(s) = g(s')$, allora

$$\frac{s}{1+|s|^2} = \frac{s'}{1+|s'|^2} \quad \text{e} \quad |s|^2 = |s'|^2 \,,$$

e usando la seconda identità, la prima diventa $s = s'$.

Resta da dimostrare che la matrice $\nabla g(s)$ ha rango d in ogni punto. Osserviamo che

$$\nabla g(s) = \begin{pmatrix} (1+|s|^2)^{-2} M(s) \\ 2s \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad M(s) := (1+|s|^2)I - 2s^t s\,,$$

dove I è la matrice identità $d \times d$, s viene visto come un vettore riga, e s^t è il corrispondente vettore colonna (cosicché $s^t s$ è una matrice $d \times d$). Vogliamo ora calcolare il determinante di $M(s)$. Osserviamo che preso un qualunque vettore riga s' con $|s'| = |s|$ e scelta una matrice di rotazione U tale che $sU = s'$, allora $U^t\, M(s)\, U = M(s')$, e quindi $M(S)$ e $M(s')$ hanno lo stesso determinante. In particolare prendendo $s' = |s| e_1$ la matrice $M(s')$ risulta essere diagonale e quindi ne possiamo facilmente calcolare il determinate:

$$\det(M(s)) = \det \begin{pmatrix} 1-|s|^2 & & & \\ & 1+|s|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+|s|^2 \end{pmatrix} = (1-|s|^2)(1+|s|^2)^{d-1}\,.$$

Pertanto quando $|s| \neq 1$ il determinante della matrice $M(s)$ è diverso da 0, e quindi $M(s)$ ha rango d, da cui segue che anche $\nabla g(s)$ ha rango d. Quando $|s| = 1$ mostriamo invece che il minore di $\nabla g(s)$ formato dalle *ultime* d righe (che indichiamo con N) ha determinante diverso da 0. Di nuovo, possiamo ricondurci al caso in cui $s = e_1$, ottenendo che

$$\det N = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} I \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \pm 2^{2-d}\,.$$

b) Siccome S non ha bordo, se potessimo applicare il teorema di Stokes avremmo subito che $\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega = 0$. Tuttavia la superficie S non è compatta, e quindi non è possibile applicare direttamente il teorema di Stokes. Osserviamo allora che siccome g è propria ed il supporto di ω è compatto, lo stesso vale anche per il supporto di $g^\# \omega$, che è quindi contenuto all'interno di un'opportuna palla chiusa D. Pertanto

$$\int_S d\omega = \int_{\mathbb{R}^d} g^\#(d\omega) = \int_D d(g^\# \omega) = \int_{\partial D} g^\# \omega = 0$$

(la seconda uguaglianza segue dal fatto che $g^\#(d\omega) = d(g^\# \omega)$ e che il supporto di $d(g^\# \omega)$ è contenuto in D, la terza uguaglianza segue dal teorema di Stokes applicato alla "superficie" compatta D, mentre la quarta segue dal fatto che $g^\# \omega = 0$ su ∂D.

c) Se non si assume che S sia compatta può succedere un po' di tutto, a cominciare dal fatto che l'integrale di $d\omega$ su S è infinito. Questo capita se per esempio $d(g^\# \omega) = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, ovvero se $g^\# \omega = x_1\, dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d$, cioè se si prende $\omega := h_1\, dh_2 \wedge \cdots \wedge dh_d$ dove la mappa $h = (h_1, \dots, h_d) : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ è una qualunque estensione regolare dell'inversa $g^{-1} : S \to \mathbb{R}^d$.

Commenti

- Esercizio 5. Questo esercizio ha creato (sorprendentemente) molte difficoltà, di cui alcune dovute ad una cattiva scelta della notazione (come per esempio esprimere il fatto che u è una funzione radiale scrivendo "$u(x) = u(|x|)$").

- Esercizio 7d). Un modo concettualmente più elegante di far vedere che la norma $\|\cdot\|_\varphi$ non è completa se φ non è limitata dal basso da una costante positiva consiste nel definire lo spazio L^2_φ rispetto alla misura $\varphi(x)\,dx$ su I, ed osservare che questo spazio non è contenuto nell'usuale L^2. A questo punto, presa una qualunque funzione $g \in L^2_\varphi \setminus L^2$, le funzioni troncate $g_n(x) := (g(x) \wedge n) \vee -n$ appartengono a L^2, convergono a g rispetto a $\|\cdot\|_\varphi$ (e quindi sono una successione di Cauchy) ma il limite non apprtiene a L^2.

1. Usando il teorema di Fubini si ottiene

$$\begin{aligned}\widehat{g}(y_1,y_2) &:= \iint g(x_1,x_2)\, e^{-i(x_1y_1+x_2y_2)}\, dx_1\, dx_2 \\ &= \iint g_1(x_1)\, g_2(x_2)\, e^{-ix_1y_1}\, e^{-ix_2y_2}\, dx_1\, dx_2 \\ &= \left[\int g_1(x_1)\, e^{-ix_1y_1}\, dx_1\right]\left[\int g_2(x_2)\, e^{-ix_2y_2}\, dx_2\right] = \widehat{g}_1(y_1)\, \widehat{g}_2(y_2)\,.\end{aligned}$$

2. Usando il fatto che

$$\sin x\, \cos x = \frac{\sin(2x)}{2} = \frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{4i}$$

si ottiene che

$$(\sin x\, \cos x)^2 = \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{4i}\right)^2 = \frac{e^{4ix}-2+e^{-4ix}}{-16}\,,$$

e quindi i coefficienti di Fourier complessi di questa funzione sono dati da

$$c_n = \begin{cases} 1/8 & \text{per } n=0, \\ -1/16 & \text{per } n=\pm 4, \\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

3. Integrando per parti ed utilizzando il fatto che $\dot u(0)=\dot u(1)=0$ si ottiene che

$$\langle Tu\,;\, v\rangle = \int_0^1 -\ddot u\, v\, dx = \Big| -\dot u\, v\Big|_0^1 + \int_0^1 \dot u\, \dot v\, dx = \int_0^1 \dot u\, \dot v\, dx = \langle \dot u\,;\, \dot v\rangle\,,$$

da cui segue immediatamente che

$$\langle Tu\,;\, v\rangle = \langle Tv\,;\, u\rangle \quad \text{e} \quad \langle Tu\,;\, u\rangle = \|\dot u\|_2^2 \geq 0\,.$$

4. Per quanto visto a lezione, la mappa g_1 ammette un'estensione $\tilde g_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ di classe $\mathscr{C}^1$, e per ogni $x \in S_1$ l'applicazione lineare $dg_1(x)$ coincide con la restrizione di $d\tilde g_1(x)$ a $\mathrm{Tan}(S_1,x)$. E ovviamente lo stesso vale per g_2.

Ma allora $\tilde g := \tilde g_2 \circ \tilde g_1 : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ è un'estensione di classe $\mathscr{C}^1$ di g, e pertanto $dg(x)$ è la restrizione di $d\tilde g(x)$ a $\mathrm{Tan}(S_1,x)$. Ma è noto dal corso di analisi del secondo anno che $d\tilde g(x) = d\tilde g_2(g_1(x)) \circ d\tilde g_1(x)$, e da questo otteniamo infine

$$dg(x) = dg_2(g_1(x)) \circ dg_1(x)\,.$$

5. a) Usando il teorema di Fubini si ottiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |g_1 \otimes g_2|^p\, dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |g_1(x_1)|^p |g_2(x_2)|^p dx_1\, dx_2 \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}} |g_1(x_1)|^p dx_1\right]\left[\int_{\mathbb{R}} |g_2(x_2)|^p dx_2\right],\end{aligned}$$

e quindi

$$\|g_1 \otimes g_2\|_p = \|g_1\|_p\, \|g_2\|_p\,.$$

In particolare $g_1 \otimes g_2$ appartiene a $L^p(\mathbb{R}^2)$ se g_1 e g_2 appartengono a $L^p(\mathbb{R})$.

b) Ricordo i seguenti fatti noti: ogni funzione in $L^p(\mathbb{R}^2)$ si approssima (in norma L^p) con combinazioni lineari di funzioni indicatrici (di insiemi misurabili di misura finita); la funzione indicatrice di un insieme misurabile di misura finita si approssima con funzioni indicatrici di aperti (perché posso approssimare un misurabile dall'esterno con aperti); la funzione indicatrice di un insieme aperto si approssima con combinazioni lineari di funzioni indicatrici di rettangoli (perché posso approssimare aperto dall'interno con dei plurirettangoli). Siccome queste ultime appartengono a $L^p(\mathbb{R}) \otimes L^p(\mathbb{R})$, ne segue che ogni funzione in $L^p(\mathbb{R}^2)$ si approssima con combinazioni lineari di funzioni in $L^p(\mathbb{R}) \otimes L^p(\mathbb{R})$.

c) Procedendo come al punto a) si vede che

$$\langle f_1 \otimes f_2\,;\, g_1 \otimes g_2\rangle = \langle f_1\,;\, g_1\rangle\, \langle f_2\,;\, g_2\rangle\,,$$

e usando questa identità si ottiene facilmente che $\mathscr{F} := \{e_m \otimes e_n : m, n \in \mathbb{N}\}$ è un sistema ortonormale.

Lo span di $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$, e quindi lo span di $\mathscr{F}$ è denso in $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$, ed anche nello span di $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$, che a sua volta è denso in $L^2(\mathbb{R}^2)$ per via del punto b). Dunque lo span di $\mathscr{F}$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^2)$, e da questo segue che $\mathscr{F}$ è un sistema ortonormale massimale.

6. Al solito, sviluppiamo la funzione incognita u in termini della base $\{\sin(nx)\}$ rispetto alla variabile x, ovvero scriviamo u nella forma
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(nx) .$$
In questo caso i coefficienti a_n devono soddisfare l'equazione differenziale $\dot{y} = (2-n^2)y$, e quindi
$$a_n(t) = a_n(0)\, e^{(2-n^2)t} .$$
Inoltre, poiché il dato iniziale è
$$2(1-\cos x)\sin x = 2\sin x - \sin(2x) ,$$
abbiamo che $a_1(0) = 2$, $a_2(0) = -1$, e $a_n(0) = 0$ per $n \geq 3$. Quindi
$$u(t,x) = 2e^t \sin x - e^{-2t}\sin(2x) .$$

7. a) Che K sia convesso è immediato: se $f_1(x) \geq 0$ q.o., cioè per ogni x al di fuori da un insieme trascurabile N_1, e $f_2(x) \geq 0$ per ogni x al di fuori da un insieme trascurabile N_2, allora ogni combinazione convessa f di f_1 e f_2 soddisfa $f(x) \geq 0$ per ogni x al di fuori dall'insieme trascurabile $N_1 \cup N_2$, e dunque f appartiene a K.

Per mostrare che K è chiuso consideriamo una successione di elementi f_n di K che converge ad f in L^2, e facciamo vedere che anche f appartiene a K. Passando ad una sottosuccessione possiamo supporre che $f_n(x)$ converga ad $f(x)$ q.o., ovvero per ogni x al di fuori di un insieme trascurabile N; inoltre sappiamo per ipotesi che $f_n(x) \geq 0$ per ogni x al di fuori da un insieme trascurabile N_n. Mettendo insieme questi fatti si ottiene che $f(x) \geq 0$ per ogni x al di fuori dall'insieme trascurabile $N \cup N_1 \cup N_2 \cup \dots$, e dunque f appartiene a K.

b) Osserviamo innanzitutto che T porta effettivamente $L^2(0,1)$ in K. Non ci resta quindi che verificare che per ogni $g \in K$ si ha $\|f-g\|_2 \geq \|f - Tf\|_2$. In effetti, detto A l'insieme dei punti x in cui $f(x) < 0$, per ogni x in A si ha che $g(x) - f(x) \geq -f(x) > 0$ e quindi
$$\|f-g\|_2^2 = \int_0^1 (f(x)-g(x))^2\, dx \geq \int_A (f(x)-g(x))^2\, dx \geq \int_A f(x)^2\, dx$$
ed è immediato verificare che quest'ultimo integrale è proprio uguale a $\|f - Tf\|_2^2$.

8. a) Il testo dell'esercizio suggerisce chiaramente di usare g come parametrizzazione di S. La difficoltà è che non si può usare come dominio di parametrizzazione l'insieme $D := [0,1) \times [0,1)$, sia perché D non è aperto in $\mathbb{R}^2$, sia perché g, pur essendo una bigezione da D a S, non è un omeomorfismo (per la precisione non è una mappa aperta).

L'idea è quindi di usare come domini di parametrizzazione degli aperti D di $\mathbb{R}^2$ tali che la mappa g è un omeomorfismo da D in $g(D)$ (cioè è sia iniettiva che aperta), cosa che si verifica se D è "abbastanza piccolo" e per la precisione se è contenuto in un quadrato di lato 1; per dimostrarlo ricorriamo a quanto visto nel corso di geometria del secondo anno.

Per via dell'ipotesi (i) possiamo trovare una mappa $\tilde{g}$ dallo spazio quoziente $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ in $\mathbb{R}^n$ tale che $g = \tilde{g} \circ p$ dove p è la proiezione canonica di $\mathbb{R}^2$ su $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Per via dell'ipotesi (iii), la mappa $\tilde{g}$ è iniettiva (dati infatti $[t], [t'] \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, possiamo scegliere i rappresentanti t e t' in modo che appartengano a $[0,1)^2$, quindi se $\tilde{g}([t]) = \tilde{g}([t'])$ allora $g(t) = g(t')$ da cui segue che $t = t'$ e quindi anche $[t] = [t']$). Pertanto $\tilde{g}$ è un omeomorfismo tra lo spazio compatto $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e la sua immagine secondo g, che è appunto S (e questo mostra che l'insieme S è compatto).

Ricordo ora che preso un sottoinsieme aperto D di $\mathbb{R}^2$ contenuto in un quadrato di lato a 1, la proiezione $p(D)$ è aperta in $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e p è un omeomorfismo tra D e $p(D)$. Mettendo insieme questo fatto e il precedente si ottiene che $g(D) = \tilde{g}(p(D))$ è aperto in S e $g = \tilde{g} \circ p$ è un omeomorfismo da D in $g(D)$.

Per concludere la dimostrazione del fatto che S è una superficie senza bordo di classe $\mathscr{C}^1$ ci basta ora osservare che:

(i) g è di classe $\mathscr{C}^1$ e ha gradiente di rango massimo ovunque, da cui segue che la restrizione di g a D è una buona parametrizzazione dell'aperto $g(D)$;

(ii) gli aperti D come sopra ricoprono tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi i corrispondenti $g(D)$ ricoprono tutto S.

b) Se l'ipotesi (iii) non è verificata l'insieme S può non essere una superficie. Preso per esempio un cammino $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ di classe $\mathscr{C}^1$ e 1-periodico che parametrizza un "otto" con velocità sempre diversa da zero—per esempio $\varphi(s) := (\sin(2\pi s), \sin(\pi s))$—allora la mappa $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data da $g(t_1, t_2) := (\varphi(t_1), \varphi(t_2))$ soddisfa sia l'ipotesi (i) che (ii), ma l'immagine è il prodotto di due "otto" e non è una superficie.

Commenti

- Esercizio 4. Per dimostrare che g è di classe $\mathscr{C}^1$ si può anche ricorrere alla caratterizzazione delle mappe $\mathscr{C}^1$ in termini di parametrizzazioni: preso U_2 intorno di $g_1(x)$ parametrizzato da $\varphi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^{n_2}$ e U_1 intorno di x contenuto in $g_1^{-1}(U_2)$ parametrizzato da $\varphi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^{n_1}$ (dove le mappe φ_1 e φ_2 sono di classe $\mathscr{C}^1$ e soddisfano le solite ipotesi) si ha allora che
$$g \circ \varphi_1 = (g_2 \circ \varphi_2) \circ \varphi_2^{-1} \circ (g_1 \circ \varphi_1) \tag{1}$$
e siccome $g_2 \circ \varphi_2$ e $g_1 \circ \varphi_1$ sono per definizione di classe $\mathscr{C}^1$, lo stesso vale per $g \circ \varphi_1$. A partire dalla (1) si ottiene anche la formula per il differenziale di g.

- Esercizio 4. Per dimostrare la formula per il differenziale di g si può anche usare la caratterizzazione del differenziale in termini di cammini. Dati dunque $x \in S_1$ e v vettore tangente a S_1 in x, prendiamo un cammino $\gamma_1 : [0,1] \to S_1$ di classe $\mathscr{C}^1$ tale che $\gamma_1(0) = x$ e $\dot\gamma_1(0) = v$, e poniamo $\gamma_2 := g_1 \circ \gamma_1$ e $\gamma_3 := g_2 \circ \gamma_2$. Usando la caratterizzazione del differenziale in termini di cammini e il fatto che $\gamma_3 := g \circ \gamma_1$ otteniamo le seguenti identità:
$$\begin{aligned}
&\dot\gamma_2(0) = dg_1(x)\,\dot\gamma_1(0) = dg_1(x)\,v\,,\\
&\dot\gamma_3(0) = dg_2(g_1(x))\,\dot\gamma_2(0) = dg_2(g_1(x))\,dg_1(x)\,v\,,\\
&\dot\gamma_3(0) = dg(x)\,\dot\gamma_1(0) = dg(x)\,v\,.
\end{aligned}$$
In particolare le ultime due implicano che $dg(x)\,v = dg_2(g_1(x))\,dg_1(x)\,v$, e siccome questo vale per ogni scelta di v, abbiamo che $dg(x) = dg_2(g_1(x)) \circ dg_1(x)$.

- Esercizio 5b). Una dimostrazione alternativa è la seguente: ogni funzione in $L^p(\mathbb{R}^2)$ si approssima in norma con funzioni in $L^p(\mathbb{R}^2)$ a supporto compatto (cioè nulle al di fuori di un qualche quadrato). A sua volta ogni funzione su un quadrato Q si approssima con funzioni continue su Q nella norma di $L^p(Q)$, ed ogni funzione continua su Q si approssima uniformemente su Q (e quindi anche nella norma di $L^p(Q)$) con polinomi di due variabili. Se ne conclude che ogni funzione in $L^p(\mathbb{R}^2)$ si approssima nella norma di $L^p(\mathbb{R}^2)$ con funzioni della forma $p\,1_Q$ con p polinomio e 1_Q funzione indicatrice di un quadrato. E ora non è difficile vedere che le funzioni di questo tipo appartengono tutte allo span di $L^p(\mathbb{R}) \otimes L^p(\mathbb{R})$.

- Esercizio 5c). Si può dimostrare la massimalità del sistema ortonormale $\{e_m \otimes e_n\}$ senza ricorrere al punto b). Ci basta infatti dimostrare che data una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tale che $\langle f\,;\, e_m \otimes e_n\rangle = 0$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, allora si ha $f = 0$ quasi ovunque. Osserviamo che
$$\langle f\,;\, e_m \otimes e_n\rangle = \langle f_m\,;\, e_n\rangle$$
dove f_m è la funzione in $L^2(\mathbb{R})$ definita da
$$f_m(x_2) := \langle f(\cdot, x_2)\,;\, e_m\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, e_m(x_1)\, dx_1\,.$$
Siccome $\{e_n\}$ è un sistema massimale, abbiamo che $f_m = 0$ quasi ovunque per ogni m, ovvero esiste un insieme N_m di misura nulla tale che $f_m(x_2) = 0$ per ogni $x \notin N_m$. Pertanto, $f_m(x_2) = 0$ per ogni m ed ogni $x \notin N$ dove N è l'insieme di misura nulla dato dall'unione degli N_m. Usando la definizione di f_m e la massimalità di $\{e_m\}$ otteniamo quindi che per ogni $x_2 \notin N$ si

ha $f(x_1, x_2) = 0$ per quasi ogni x_1. Usando il teorema di Fubini-Tonelli si conclude che $f = 0$ quasi ovunque.

- Esercizio 7. Per quanto visto a lezione, un modo alternativo per dimostrare che Tf è effettivamente la proiezione di f su K consiste nel verificare che $\langle g\,;\, f - Tf\rangle \leq \langle Tf\,;\, f - Tf\rangle$ per ogni $g \in K$. E in effetti si verifica facilmente che il primo prodotto scalare è negativo o nullo (perché $g \geq 0$ quasi ovunque mentre $f - Tf \leq 0$ ovunque) mentre il secondo prodotto scalare è nullo (perché per ogni punto x si ha che almeno uno tra $Tf(x)$ e $f(x) - Tf(x)$ deve essere nullo).

1. Vogliamo ricondurci al calcolo, già fatto, della trasformata di Fourier di $g(x) := e^{-|x|}$. Per far questo usiamo che
$$f(x) := x^2 e^{-|2x|} = -(-ix)^2[\sigma_2 g](x)$$
dove, al solito, l'operatore σ_δ è definito da $\sigma_\delta u(x) := u(\delta x)$. Ricordando che
$$\widehat{\sigma_\delta u}\,(y) = \frac{1}{\delta}\widehat{u}(y/\delta)\,, \quad \widehat{-ix\,u} = (\widehat{u})'\,, \quad \widehat{g}(y) = \frac{2}{1+y^2}\,,$$
otteniamo quindi
$$\widehat{f}(y) = -\left[\frac{1}{1+(y/2)^2}\right]'' = -\left[\frac{4}{4+y^2}\right]'' = \frac{8(4-3y^2)}{(4+y^2)^3}\,.$$

2. Si ha
$$\begin{aligned} f^{\#}\omega = f_1\, df_1 \wedge df_2 &= x_1x_2\, d(x_1x_2) \wedge d(x_3^2 - 2x_1x_2) \\ &= x_1x_2\, d(x_1x_2) \wedge d(x_3^2) \\ &= x_1x_2\,(x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2) \wedge 2x_3\, dx_3 \\ &= 2x_1x_2x_3(x_2\, dx_1 \wedge dx_3 + x_1\, dx_2 \wedge dx_3)\,. \end{aligned}$$
Inoltre $d(f^{\#}\omega) = f^{\#}(d\omega) = 0$ perché $d\omega = 0$ (il differenziale di una due forma in $\mathbb{R}^2$ è sempre nullo).

3. Ci basta far vedere che f ha la proprietà della media. Sia dunque x un punto di A e B una palla chiusa centrata in x e contenuta in A. Siccome $F(\cdot, t)$ ha la proprietà della media per ogni $t \in [0,1]$, detto v il volume di B si ha che
$$\begin{aligned} f(x) := \int_0^1 F(x,t)\, dt &= \int_0^1 \left[\frac{1}{v}\int_B F(t,y)\, dy\right] dt \\ &= \frac{1}{v}\int_B \left[\int_0^1 F(t,y)\, dt\right] dy = \frac{1}{v}\int_B f(y)\, dy\,, \end{aligned}$$
e dunque la proprietà della media è dimostrata. Si noti che la terza uguaglianza nella formula sopra segue dal teorema di Fubini, che è legittimo applicare perché la funzione F è continua sul compatto $[0,1] \times B$, e di conseguenza è limitata e quindi anche sommabile.

4. Facendo un disegno ci si rende conto che l'orientazione dello spazio tangente a S nel punto p_1 è $[-e_3, e_2]$, mentre la normale esterna al bordo (sempre in p_1) è $-e_3$. Da questo segue che l'orientazione di ∂S deve essere $[e_2]$.

5. a) Essendo $g_0 = 1$ l'elemento di indice 0 della base di Fourier complessa, si ha, ovviamente,
$$c_{0,n} := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Tramite calcolo diretto si ottiene inoltre che
$$c_{1,n} := \begin{cases} -\frac{2\pi^2}{3} & \text{se } n = 0, \\ \frac{2}{n^2}(-1)^n & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
b) Un semplice calcolo mostra che per $k \geq 1$ si ha
$$g_k' = 2kx\, g_{k-1}\,.$$
Derivando questa uguaglianza ed usando il fatto che
$$x^2\, g_k = (x^2 - \pi^2)g_k + \pi^2 g_k = g_{k+1} + \pi^2 g_k$$
si ha che per ogni $k \geq 2$
$$\begin{aligned} g_k'' = 2k\, g_{k-1} + 2kx\, g_{k-1}' &= 2k\, g_{k-1} + 2kx\, g_{k-1}' \\ &= 2k\, g_{k-1} + 4k(k-1)x^2\, g_{k-2} \\ &= 2k(2k-1)\, g_{k-1} + 4k(k-1)\pi^2 g_{k-2}\,. \end{aligned}$$

Usando ora il fatto che i coefficienti di Fourier di g_k'' sono dati da $-n^2 c_{k,n}$ per ogni $k \geq 2$ otteniamo

$$-n^2 c_{k,n} = 2k(2k-1)\, c_{k-1,n} + 4k(k-1)\pi^2 c_{k-2,n}\,.$$

Quindi per $n \neq 0$ e $k \geq 2$ si ha

$$c_{k,n} = -\frac{1}{n^2}\big[2k(k-1)\, c_{k-1,n} + 4k(k-1)\pi^2 c_{k-2,n}\big]\,. \tag{1}$$

c) Per ogni $k = 1, 2, \dots$ esiste $a_k > 0$ tale che

$$c_{k,n} \sim \frac{(-1)^n a_k}{|n|^{d_k}} \text{ per } |n| \to +\infty, \text{ dove } d_k := \begin{cases} k+1 & \text{per } k \text{ dispari,} \\ k+2 & \text{per } k \text{ pari.} \end{cases} \tag{2}$$

Dimostriamo la formula (2) per induzione su k. Osserviamo innanzitutto che, per quanto visto al punto a) questa formula è valida per $k = 1$ (con $a_1 := 2$); usando la formula ricorsiva (1) e quanto fatto sempre in a) si dimostra la (2) per $k = 2$ (con $a_2 = 8$). Supponiamo ora che la (2) valga per $k-1$ e $k-2$ e dimostriamola per k. Usando la formula ricorsiva (1) e l'ipotesi induttiva otteniamo infatti che, per k dispari,

$$c_{k,n} \sim \frac{1}{n^2}\left[2k(2k-1)\frac{(-1)^n a_{k-1}}{|n|^{k+1}} + 4k(k-1)\frac{(-1)^n a_{k-2}}{|n|^{k-1}}\right] \sim \frac{(-1)^n a_k}{|n|^{k+1}}$$

con $a_k := 4k(k-1)a_{k-2}$, mentre per k pari abbiamo

$$c_{k,n} \sim \frac{1}{n^2}\left[2k(2k-1)\frac{(-1)^n a_{k-1}}{|n|^{k}} + 4k(k-1)\frac{(-1)^n a_{k-2}}{|n|^{k}}\right] \sim \frac{(-1)^n a_k}{|n|^{k+2}}$$

con $a_k := 2k(2k-1)a_{k-1} + 4k(k-1)a_{k-2}$. In entrambe i casi la stretta positività di a_k segue da quella di a_{k-1} e a_{k-2}.

6. a) Partendo dal fatto che

$$\nabla f(t,u) = \begin{pmatrix} e^t \cos u & -e^t \sin u \\ e^t \sin u & e^t \cos u \\ -e^u \sin t & e^u \cos t \\ e^u \cos t & e^u \sin t \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$(\nabla f)^t\, \nabla f = \begin{pmatrix} e^{2t} + e^{2u} & 0 \\ 0 & e^{2t} + e^{2u} \end{pmatrix}$$

e dunque

$$Jf = \sqrt{\det[(\nabla f)^t\, \nabla f]} = e^{2t} + e^{2u}\,.$$

b) La mappa f è iniettiva. Indicando infatti con f_1 la mappa data dalle prime due componenti di f, vale a dire $f_1 := (e^t \cos u, e^t \sin u)$, si ha che $|f_1| = e^t$ e quindi

$$f(t,u) = f(t',u') \;\Rightarrow\; |f_1(t,u)| = |f_1(t',u')| \;\Rightarrow\; e^t = e^{t'} \;\Rightarrow\; t = t'\,;$$

analogamente si ottiene che $f(t,u) = f(t',u')$ implica anche $u = u'$.

c) Ricordo una mappa continua f tra due spazi metrici localmente compatti X e Y è propria se e solo se per ogni successione (x_n) in X che tende all'infinito (nel senso della compattificazione di Alexandrov di X) si ha che $f(x_n)$ tende all'infinito. In questo caso la successione $f(-n, 0)$ risulta essere limitata e quindi non tende all'infinito, e pertanto f non è propria.

7. Al solito, identifichiamo un punto $x = (x_1, x_2)$ del piano con il numero complesso $x_1 + ix_2$; così facendo il bordo di D è dato dai punti della forma $x = e^{it}$, e la procedura di risoluzione consiste nello scrivere $u_0(e^{it})$ in serie di Fourier, cioè come somma di potenze di e^{it}, e quindi come somma di potenze positive di x e di $\bar{x}$, cosa che dà automaticamente l'estensione armonica

di u_0 all'interno di D:

$$u_0(e^{it}) = (\cos t \, \sin t)^3 = \left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)^3 = \left(\frac{e^{2it} - e^{-2it}}{4i}\right)^3$$
$$= \frac{i}{64}\big(e^{6it} - 3e^{2it} + 3e^{-2it} - e^{-6it}\big)$$
$$= \frac{i}{64}\big(x^6 - 3x^2 + 3\bar{x}^2 - \bar{x}^6\big) = \frac{1}{32}\,\mathrm{Im}(3x^2 - x^6)\,.$$

Quindi la soluzione cercata è

$$u(x) = \frac{1}{32}\,\mathrm{Im}(3x^2 - x^6) = \frac{1}{16}(10x_1^3x_2^3 - 3x_1^5x_2 - 3x_1x_2^5 + 3x_1x_2)\,.$$

8. a) Siccome una matrice A è invertibile se e solo det $A \neq 0$, l'insieme Ω coincide con la controimmagine secondo la funzione $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ dell'aperto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ed è dunque un insieme aperto ($\det A$ è un polinomio delle coordinate di A, ed è quindi una funzione continua, anzi $\mathscr{C}^\infty$, di A).

   Poiché inoltre $A^{-1} = (\det A)^{-1}A^*$ dove A^* è la trasposta della matrice dei cofattori (o dei complementi algebrici) di A, la regolarità $\mathscr{C}^\infty$ di f segue dalla regolarità $\mathscr{C}^\infty$ della funzione $A \mapsto \det A$ e della mappa $A \mapsto A^*$ (ricordo che ciascuna coordinata di A^* coincide a meno di segno con il determinante di un opportuno minore di A, e quindi è anch'essa una funzione polinomiale delle coordinate di A).

   b) e c) Fissiamo A matrice invertibile e H matrice qualunque, e consideriamo il cammino $\gamma(t) := A + tH$. Siccome l'insieme Ω delle matrici invertibile è aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $\gamma(t)$ appartiene a Ω per $t \in [0,\delta)$, e quindi possiamo calcolare il valore di $df(A)$ in H, cioè la derivata parziale di f in A nella direzione H, usando la formula

$$\langle df(A)\,;\,H\rangle = (f\circ\gamma)'(0)\,.$$

   Osserviamo ora che la mappa f è caratterizzata dall'identità $I = f(A)\,A$. In particolare abbiamo che

$$I = (f\circ\gamma)\,\gamma\,,$$

   e derivando questa identità rispetto alla variabile t otteniamo

$$0 = (f\circ\gamma)'\,\gamma + (f\circ\gamma)\,\dot\gamma\,.$$

   Prendendo questa identità per $t = 0$ e ricordando che $\gamma(0) = A$, $\dot\gamma(0) = H$ e $(f\circ\gamma)(0) = f(A) = A^{-1}$ otteniamo

$$0 = (f\circ\gamma)'(0)\,A + f(A)\,H = (f\circ\gamma)'(0)\,A + A^{-1}H\,,$$

   e finalmente

$$\langle df(A)\,;\,H\rangle = (f\circ\gamma)'(0) = -A^{-1}HA^{-1}\,.$$

Commenti

- Esercizio 3. Si potrebbe essere tentati di dimostrare che la funzione f è armonica usando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, vale a dire

$$\Delta f(x) = \Delta\left(\int_0^1 F(x,t)\,dt\right) = \int_0^1 \Delta F(x,t)\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0\,.$$

  Questa dimostrazione non funziona perché non è possibile applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Per spiegare qual è il punto, mi limito al caso più semplice (quello che si studia al secondo anno), vale a dire

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 g(y,t)\,t = \int_0^1 \partial_y g(y,t)\,dt\,.$$

  Com'è noto, questa formula vale a patto di avere un qualche controllo sulla derivata parziale $\partial_y g$, per esempio che $\partial_y g$ è limitata in $I\times[0,1]$ con I intorno di y. Ora, se la derivata parziale $\partial_y g$ fosse continua avrebbe anche questa proprietà di limitatezza, ma in generale l'ipotesi che

g sia continua nelle due variabili e di classe $\mathscr{C}^1$ nella prima, implica la continuità di $\partial_y g$ nella prima variabile, ma non in entrambe.

- Esercizio 5, punto b). Tutti i presenti hanno scritto $\ddot{g}_k$ come combinazione lineare di g_{k-1} e $x^2 g_{k-2}$, ma non come combinazione lineare di g_{k-1} e g_{k-2} (forse non notando che x^2 è una funzione non uno scalare).

- Esercizio 8. Nel calcolare $df(A)$ abbiamo usato implicitamente il seguente fatto (di facile verifica): date due funzioni γ_1 e γ_2 di una variabile a valori nelle matrici, la derivata del prodotto è data dalla solita formula $(\gamma_1\,\gamma_2)' = \dot{\gamma}_1\gamma_2 + \gamma_1\dot{\gamma}_2$.

- Esercizio 8. Una modo alternativo per calcolare $df(I)$ consiste nell'usare lo sviluppo in serie di potenze di $(I+H)^{-1}$ (l'identità vale per ogni matrice H con norma strettamente inferiore a 1)
$$(I+H)^{-1} = I - H + H^2 - H^3 + \cdots\,,$$
da cui segue che
$$f(I+H) = I - H + O(|H|^2) = f(I) - H + O(|H|^2)$$
e dunque
$$df(I) : H \mapsto -H\,.$$
Per ottenere $df(A)$ basta osservare che
$$\begin{aligned} f(A+H) &:= (A+H)^{-1} \\ &= (A(I + A^{-1}H))^{-1} \\ &= (I + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} \\ &= (I - A^{-1}H + O(|A^{-1}H|^2))A^{-1} = f(A) - A^{-1}HA^{-1} + O(|H|^2)\,, \end{aligned}$$
e dunque
$$df(A) : H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}\,.$$