Versione: 30 ottobre 2013

Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi in più variabili 2

a.a. 2012-13

Giovanni Alberti e Vincenzo M. Tortorelli

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi in più Variabili 2 consistono solitamente di otto problemi a cui dare una soluzione articolata. Di questi, i primi quattro sono relativamente semplici, nel senso che ammettono una soluzione di poche righe o comunque possono essere facilmente ricondotti a fatti e/o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 21 dicembre 2012]

Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Spazi L^p
   - 1.1 Richiamo delle nozioni fondamentali della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.
   - 1.2 Disuguaglianze di Jensen, Hölder e di Minkowski. Spazi L^p. Completezza degli spazi L^p.
2. Spazi di Hilbert
   - 2.1 Spazio di Hilbert sul campo reale; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base.
   - 2.2 Esistenza della proiezione su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione come elemento di minima distanza. Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - 2.3 *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*
3. Serie di Fourier ed applicazioni
   - 3.1 Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2(-\pi,\pi)$. Serie di Fourier complessa per funzioni in $L^2(-\pi,\pi)$. Convergenza della serie di Fourier in L^2. Convergenza uniforme per le funzioni 2π-periodiche di classe $\mathscr{C}^1$. Regolarità delle funzione e comportamento asintotico dei coefficienti.
   - 3.2 *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde tramite serie di Fourier. Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.
   - 3.3 *Varianti della serie di Fourier: serie in seni e coseni (serie di Fourier reale); serie in seni. Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.*
4. Trasformata di Fourier e applicazioni
   - 4.1 Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^n$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$.
   - 4.2 *Rappresentazione di una funzione su $\mathbb{R}$ come combinazione integrale delle funzioni trigonometriche complesse: derivazione euristica della formula a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier per funzioni in $L^1(\mathbb{R})$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier.
   - 4.3 Dimostrazione della formula di inversione. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma L^2. Trasformata di Fourier per funzioni in $L^2(\mathbb{R})$.
   - 4.4 *Applicazioni della Trasformata di Fourier: risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore; disuguaglianza di Heisenberg.*
5. Superfici e integrazione su superfici
   - 5.1 Superfici (sottovarietà) senza bordo di dimensione d e classe $\mathscr{C}^k$ in $\mathbb{R}^n$. Spazio tangente ad una superfice in un punto e sue caratterizzazioni.
   - 5.2 Mappe di classe $\mathscr{C}^k$ tra superfici (di classe $\mathscr{C}^k$). Differenziale di una mappa tra superfici.
   - 5.3 Superfici con bordo (senza dimostrazioni).
   - 5.4 Determinante Jacobiano e formula dell'area. Definizione della misura di volume d-dimensionale su una superficie tramite la formula dell'area. Integrazione di funzioni scalari su una superficie.
   - 5.5 Orientazione di una superficie e del suo bordo.
   - 5.6 Applicazioni k-lineari alternanti su uno spazio vettoriale qualunque: prodotto esterno e rappresentazione in termini di una base. k-forme su un aperto di $\mathbb{R}^n$, rappresentazione in coordinate, prodotto esterno, differenziale e pull-back. Teorema di Stokes.

5.7 *Forme chiuse e forme esatte.*
5.8 *Casi particolari del teorema di Stokes: il teorema di Gauss-Green e il teorema della divergenza.*

6. Funzioni armoniche

6.1 Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Principio del massimo e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato.
6.2 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier (determinazione del nucleo di Poisson del disco).

T E S T I

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := e^{4x-2x^2}$.

2. Caratterizzare le funzioni reali in $L^2(-\pi,\pi)$ in termini dei loro coefficienti di Fourier complessi.

3. Sia f una generica funzione continua nello spazio complesso $L^1(\mathbb{R})$ tale che $|f(x)| \sim |x|^{-a}$ per $x \to \pm\infty$. Per quali a si può dire che $\widehat{f}$ è di classe C^2?

4. Sia X il sottospazio di $L^2(-1,1)$ formato dalle funzioni di classe C^2 su $[-1,1]$. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'operatore $T : X \to L^2(-1,1)$ dato da $Tu := ((x^2-a)\,\dot{u})'$ è autoaggiunto.

5. Si consideri il problema:
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2u \\ u(\cdot,0) = u(\cdot,\pi) = 0 \\ u(0,x) = u_0(\cdot) \text{ e } u_t(0,\cdot) = 0 \end{cases} \tag{1}$$
a) Trovare una soluzione $u : \mathbb{R} \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ del problema (1) per $u_0(x) := \sin^3 x$ e determinare il comportamento asintotico di $\|u(t,\cdot)\|_\infty$ per $t \to +\infty$.
b) Determinare il comportamento asintotico $\|u(t,\cdot)\|_\infty$ per $t \to +\infty$ quando u è la soluzione di (1) con $u_0(x) := \sin^{2k+1} x$ con k intero positivo.

6. Data una funzione $u_0 \in C^\infty_{\text{per}}$, consideriamo l'insieme D dei numeri $d > 0$ tali che il seguente problema ammette una soluzione definita in $(-d,0] \times [-\pi,\pi]$:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot,-\pi) = u(\cdot,\pi) \text{ e } u_x(\cdot,-\pi) = u_x(\cdot,\pi) \\ u(0,x) = u_0(\cdot) \end{cases} \tag{2}$$
a) Dimostrare che, detti c_n i coefficienti di Fourier di u_0, si ha $D = (0,d^*]$ con
$$d^* := -\limsup_{n\to\pm\infty} \frac{\log|c_n|}{n^2}\,.$$
b) Dimostrare che se $d^* > 0$ allora u_0 è della forma $u_0(x) = f_1(e^{ix}) + f_2(e^{-ix})$ con f_1, f_2 funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$; dare un esempio di funzione u_0 analitica per cui $d^* = 0$.

7. Per ogni $n = 0,1,\dots$ siano p_n i polinomi ottenuti applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt alla successione $1, x, x^2, \dots$ nello spazio $L^2(-1,1)$, e siano q_n i polinomi dati
$$q_n(x) := D^n((x^2-1)^n)\,.$$
Dimostrare quanto segue:
a) $(1-x^2)^{n-k}$ divide $D^k((x^2-1)^n)$ per ogni k,n con $0 \le k < n$;
b) $\langle q_n(x)\,;\,x^m \rangle = 0$ per ogni m,n con $0 \le m < n$;
c) q_n è un multiplo di p_n per ogni n.

8. Dati $a > 0$, siano f_1 ed f_2 funzioni in $L^2(\mathbb{R})$ con supporto contenuto in $[-\pi a, \pi a]$ tali che
$$\widehat{f}_1(n) = \widehat{f}_2(n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$
Dimostrare che se $a \le 1$ allora $f_1 = f_2$ q.o. Cosa succede se $a > 1$?

1. a) Dato $a \in \mathbb{R}$ sia ω la forma su $\mathbb{R}^3$ data da $\omega(x) := (x_1 + x_2)e^{a(x_1+x_3)}\, dx_1 \wedge dx_2$. Dire per quali a questa forma è chiusa, e in tal caso calcolarne una primitiva.

   b) Calcolare $g^\# \omega$ dove $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è data da $g(s_1, s_2) := (s_1^2, s_1 s_2, 1 - s_1^2)$.

2. Nelle ipotesi del teorema di Stokes si richiede, tra le altre cose, che la superficie S sia compatta. Far vedere con un esempio che non basta chiedere che S sia limitata.

3. Sia $\alpha \in \wedge^2 \mathbb{R}^3$ data da $\alpha := dx_1 \wedge dx_2 + dx_2 \wedge dx_3 + dx_3 \wedge dx_1$. Scrivere α come prodotto di due elementi di $\wedge^1 \mathbb{R}^3$.

4. Dati m, n interi tali che $0 < n \leq m$, sia S l'insieme delle matrici $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tali che $X^t X = I$. Dimostrare che S è una superficie di dimensione $d := \frac{1}{2}(2m - n - 1)n$, senza bordo e di classe C^∞.

5. Sia p un polinomio di grado d su $\mathbb{R}^2$, sia D il disco chiuso di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^2$, e sia u la funzione su D che coincide con p su ∂D ed è armonica all'interno di D. Dimostrare che u è un polinomio di grado minore o uguale a d.

6. a) Sia S l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ tali che $|y|(1 + |x|^2) = 1$. Dimostrare che S è una superficie senza bordo, chiusa ma non compatta, di classe C^∞ e dimensione 4.

   b) Sia $g : \mathbb{R}^2 \times S^2 \to S$ la mappa data da $g(s, t) := (s, (1 + |s|^2)^{-1} t)$. Calcolare il differenziale di g ed il suo Jacobiano.

   c) Dimostrare che g è una buona parametrizzazione di S. [*Vedere la nota in fondo.*]

7. a) Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione d. Com'è noto, se $\beta = (v_1, \dots, v_d)$ è una base di V come spazio vettoriale complesso, allora $\beta' := (v_1, iv_1, \dots, v_d, iv_d)$ è una base di V come spazio vettoriale reale. Dimostrare che date due basi complesse β e $\tilde\beta$, allora le corrispondenti basi reali β' e $\tilde\beta'$ hanno la stessa orientazione.

   b) Sia S una superficie di dimensione $2d$ in $\mathbb{C}^n$ con $0 < d \leq n$ (per definire le superfici identifichiamo $\mathbb{C}^n$ con $\mathbb{R}^{2n}$). Dimostrare che se $\mathrm{Tan}(S, x)$ è un sottospazio *complesso* di $\mathbb{C}^n$ per ogni $x \in S$ allora S è orientabile.

8. a) Data f funzione armonica su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, dimostrare che esiste una costante c tale che, per ogni $r > 0$,
$$\frac{d}{dr} \fint_{\partial B(0,r)} f \, d\sigma_{n-1} = \frac{c}{r^{n-1}} \,. \tag{1}$$

   b) Far vedere con un esempio che la costante c in (1) può essere diversa da zero.

   c) Dimostrare che se u si estende per continuità in 0 allora 0 è una *singolarità eliminabile*, vale a dire che u si estende come funzione armonica a tutto $\mathbb{R}^n$.

   d) Dire se la conclusione al punto c) vale anche sotto ipotesi più deboli, ad esempio che u sia limitata in un intorno di 0.

1. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \dfrac{\cos x}{1+x^2}$.

2. Calcolare $d\omega$ dove ω è la 1 forma su $\mathbb{R}^n$ data da $\omega(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^2}\,dx_i$.

3. a) Sia D un dominio compatto di $\mathbb{R}^n$ con bordo di classe C^1 (cioè D è una superficie con bordo di dimensione n in $\mathbb{R}^n$). Dimostrare che dati un campo di vettori F ed una funzione f definiti su D, entrambi di classe C^1, si ha
$$\int_{\partial D} f\,F\cdot\eta\,d\sigma_{n-1} = \int_D f\ \mathrm{div}\,F + \nabla f\cdot F\,dx\,.$$
b) Sia X il sottospazio di $L^2(D)$ formato dalle funzioni di classe C^2 su D che si annullano su ∂D. Dimostrare che l'operatore di Laplace $\Delta : X \to L^2$ è autoaggiunto.

4. Sia S una superficie senza bordo di dimensione d in $\mathbb{R}^n$, e sia D un sottoinsieme di S tale che $S \setminus D$ è ancora una superficie senza bordo di dimensione d. Dimostrare che D è chiuso in S. [*Si suggerisce di usare il seguente fatto noto: una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R}^d$ con differenziale di rango massimo in ogni punto è aperta.*]

5. a) Sia Q il quadrato $[0,1]^2$, e sia X il sottospazio di $L^2(Q)$ formato dalle funzioni costanti rispetto alla seconda variabile. Dimostrare che X è chiuso in $L^2(Q)$.
b) Determinare la proiezione di $f \in L^2(Q)$ su X e il complemento ortogonale $X^\perp$.

6. a) Indichiamo con $B(r)$ la palla aperta di centro 0 e raggio r in $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che per ogni $1 > r > 0$ esiste una costante finita C tale che per ogni funzione armonica f su $B(1)$ si ha
$$\|f\|_{L^\infty(B(r))} \le C\|f\|_{L^1(B(1))}\,.$$
b) Far vedere (almeno quando $n = 2$) che per $r = 1$ tale costante non esiste.

7. Usando la trasformata di Fourier trovare una soluzione u del problema
$$\begin{cases} u_t = 2tu + u_{xx} & \text{in } [0,+\infty)\times\mathbb{R},\\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{su } \mathbb{R},\end{cases}$$
dove u_0 è l'indicatrice dell'intervallo $[-1,1]$, e scriverla in termini di una primitiva della funzione $\exp(-x^2)$. Dimostrare che u è di classe C^∞ per $t > 0$ ed è continua in ogni punto $(0,x)$ con $x \ne \pm 1$; calcolare il limite di $u(t,\pm 1)$ per $t \to 0$.

8. Sia C una curva (cioè una superficie di dimensione 1) senza bordo, compatta e di classe C^1 contenuta nel semipiano aperto $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$, e dati $m, n > 1$ sia
$$S := \{(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n :\ (|x|,|y|)\in C\}\,.$$
a) Dimostrare che se C è contenuta nel quadrante aperto $Q := (0,+\infty)^2$ allora S è una superficie di dimensione $m+n-1$ compatta, senza bordo e di classe C^1.
b) Supponiamo che C intersechi l'asse $R := \{0\}\times\mathbb{R}$. Far vedere che S è una superficie di dimensione $m+n-1$ se e solo se la retta tangente a C in ogni punto di intersezione con R è ortogonale a R.

1. Sia f una funzione in $L^p(r)$ con $1 \leq p \leq 2$. Dimostrare che si può scomporre f come $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$ e $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$.

2. a) Si consideri una forma del tipo $\omega := \omega_1 \wedge \omega_2$ con ω_2 forma chiusa. Dimostrare che se ω_1 è chiusa allora anche ω è chiusa, e che se ω_1 è esatta allora anche ω è esatta.

   b) Vale il viceversa di queste implicazioni?

3. Sia X il sottospazio di $L^2(-1,1)$ formato dalle funzioni $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $u(1) = 0$, e sia $T : X \to L^2(-1,1)$ l'operatore dato da $[Tu](x) := \dot{u}(-x)$. Determinare l'aggiunto di T.

4. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) := \dfrac{x}{x^4 + 4}$.

5. Data $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ soluzione del problema
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } [0,+\infty) \times [0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{per } t \in [0,+\infty) \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{per } x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{1}$$
   dimostrare che $\|u(t,\cdot)\|_1 = O(e^{-t})$ per $t \to +\infty$, esplicitando le ipotesi fatte sulla regolarità di u (e di u_0).

6. a) Sia f una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ tale che f ha supporto compatto e $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^n\, dx = 0$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ Dimostrare che allora $f = 0$ quasi ovunque.

   b) Supponiamo ora che f sia una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ tale che $f(x)\, x^n \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, x^n\, dx = 0$ per $n = 0, 1, 2, \dots$ Far vedere che in questo caso non è detto che f sia nulla quasi ovunque. [*Suggerimento: usare la trasformata di Fourier.*]

7. Dato $n \geq 1$, sia S l'insieme dei punti $(x', x'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tali che $|x'| = |x''|$.

   a) Dimostrare che $S \setminus \{(0,0)\}$ è una superficie regolare senza bordo di dimensione $2n - 1$.

   b) Determinare l'insieme S_0 dei vettori $v \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ della forma $v = \dot{\gamma}(0)$ con $\gamma : [0, \delta) \to S$ cammino di classe C^1 tale che $\gamma(0) = (0,0)$.

   c) Dimostrare che S non è una superficie di classe C^1.

8. Dato $r \in (0,1)$, indichiamo con Ω la corona circolare formata dai punti $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $r < |x| < 1$, e data $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione continua di periodo 2π consideriamo il problema
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(re^{i\theta}) = 0 & \text{per } \theta \in [0,2\pi] \\ u(e^{i\theta}) = g(\theta) & \text{per } \theta \in [0,2\pi] \end{cases} \tag{2}$$
   dove, al solito, abbiamo identificato $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$.

   a) Trovare esplicitamente una soluzione del problema (2) quando $g(\theta) = e^{in\theta}$ con $n \in \mathbb{Z}$.

   b) Trovare la soluzione del problema (2) in termini dei coefficienti di Fourier di g, e dire sotto quali ipotesi tale soluzione risulta essere continua su $\overline{\Omega}$.

1. Sia ω la $(n-1)$-forma su $\mathbb{R}^n$ data da
$$\omega(x) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f(|x|^2)\, x_i \bigwedge_{j\neq i} dx_j$$
dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1. Calcolare $d\omega$.

2. Dimostrare che una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ *a valori reali* è univocamente determinata dalla restrizione della sua trasformata di Fourier alla semiretta $[0,+\infty)$.

3. Dimostrare che la palla chiusa K di centro 0 e raggio 1 in $L^p(0,1)$ non è compatta per alcun $p \in [1,+\infty]$.

4. Dire per quali p la funzione $f(x) := x/(1+x^2)$ appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ e calcolare la trasformata di Fourier di f, giustificando per quanto possibile la risposta.

5. Dato $n \geq 2$, sia S l'insieme delle coppie $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tali che
$$|x| = |y| = 2\,, \quad |x-y| = 3\,.$$
a) Dimostrare che S è una superficie senza bordo.
b) Cosa succede sostituendo la condizione $|x-y| = 3$ con $|x-y| = 4$?

6. a) Siano f, g funzioni in $L^1(\mathbb{R})$ con f funzione α-Hölderiana (cioè esiste una costante finita c tale che $|f(x) - f(x')| \leq c|x-x'|^\alpha$ per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$). Dimostrare che il prodotto di convoluzione $f * g(x)$ è una funzione α-Hölderiana.
b) Trovare f, g in $L^1(\mathbb{R})$ con f continua tali che $f * g$ non è α-Hölderiana per alcun $\alpha > 0$.

7. Data $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua, si consideri il problema
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = g(t)\sin x & \text{su } (0,+\infty)\times(0,\pi), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \text{per } t \in (0,+\infty), \\ u(0,x) = u_t(0,x) = 0 & \text{per } x \in (0,\pi). \end{cases} \tag{1}$$
a) Risolvere (1) quando g è la funzione costante 1.
b) Trovare una funzione limitata g tale che la soluzione $u(t,x)$ è illimitata.

8. a) Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una mappa olomorfa (avendo identificato $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$) e sia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione armonica. Dimostrare che la funzione composta $u \circ \varphi$ è armonica.
b) Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una mappa una mappa di classe C^2 tale che per ogni funzione armonica $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione composta $u\circ\varphi$ è armonica. Dimostrare che φ è olomorfa o antiolomorfa. [*Suggerimento: dimostrare per prima cosa che φ è armonica.*]

1. Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $f \in L^2(-\pi,\pi)$ data da
$$f(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}\,.$$

2. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sia $\omega(x) := e^{|x|} \sum_i x_i\, dx_i$. Trovare una primitiva di ω. [*Suggerimento: cercare tra le funzioni radiali.*]

3. Tra tutti i polinomi p di grado minore o uguale a due trovare quello che rende minimo il valore di $\|x^3 - p(x)\|_{L^2(-1,1)}$.

4. Sia D il disco aperto di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^n$ e sia $f : D \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ una funzione della forma
$$f(x) := |x|^{-\alpha} g(x)$$
con $\alpha > 0$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1 tale che $g(0) \neq 0$. Dire per quali α l'area (cioè il volume n-dimensionale) del grafico di f è finita.

5. Indichiamo con L^1_{per} lo spazio delle funzioni 2π-periodiche da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ la cui restrizione all'intervallo $[-\pi,\pi]$ è sommabile. Date $f, g \in L^1_{\text{per}}$ si definisce il prodotto di convoluzione $f * g \in L^1_{\text{per}}$ ponendo
$$f * g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy\,.$$
a) Calcolare i coefficienti di Fourier complessi di $f * g$ in funzione di quelli di f e g.
b) Determinare l'insieme delle funzioni $f \in L^1_{\text{per}}$ tali che $f * f = f$.

6. Sia S l'immagine della mappa $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data da
$$\Phi(t_1,t_2) := \big(\cos(t_1+t_2), \sin(t_1+t_2), \cos(t_1-t_2), \sin(t_1-t_2)\big)$$
a) Dimostrare che S è una superficie senza bordo di dimensione 2 e classe C^∞, compatta e orientabile.
b) Calcolare l'area di S.
c) Scegliere un'orientazione di S e calcolare $\int_S \omega$ con $\omega(x) := x_2 x_4 (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1 \wedge dx_3$.

7. Posto $D := \mathbb{R} \times [0,\pi]$, trovare tutte le funzioni $u : D \to \mathbb{R}$ di classe C^2 che sono armoniche all'interno di D, nulle sulla frontiera di D, e soddisfano la condizione
$$\|u(x,\cdot)\|_2 = O\big(e^{|x|}\big) \quad \text{per } x \to \pm\infty.$$

8. Sia S una superficie d-dimensionale senza bordo in $\mathbb{R}^n$ di classe C^1. Dimostrare che S è orientabile se si verifica una qualunque delle seguenti condizioni:
a) per ogni $x \in S$ possiamo scegliere in modo continuo dei vettori $v_1(x), \dots, v_d(x)$ che formano una base dello spazio tangente $\text{Tan}(S,x)$;
b) per ogni $x \in S$ possiamo scegliere in modo continuo dei vettori $v_{d+1}(x), \dots, v_n(x)$ che formano una base dello spazio normale $\text{Tan}^\perp(S,x)$;
c) S è definita dall'equazione $f(x) = 0$ dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ è una mappa di classe C^1 con differenziale di rango massimo in ogni punto di S.

1. Trovare i polinomi di secondo grado p tali che la funzione $f(x) := p(x)\, e^{-x^2/2}$ soddisfa
$$\widehat{f} = -\sqrt{2\pi}\, f\,.$$

2. Far vedere che la frontiera di un quadrato nel piano non è una curva di classe C^1 (intesa come superficie di dimensione 1, con o senza bordo).

3. Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sia X l'insieme delle funzioni $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe C^2 che soddisfano le condizioni
$$u(1) = a\, u(0) + b\, \dot{u}(0)\,, \quad \dot{u}(1) = c\, u(0) + d\, \dot{u}(0)\,. \tag{1}$$
Dire per quali a, b, c, d l'operatore $T : X \to L^2(0,1)$ dato da $Tu := -\ddot{u}$ è autoaggiunto.

4. Sia ω la 2-forma su $\mathbb{R}^4$ data da $\omega(x) := x_1 x_4\, dx_1 \wedge dx_2 + x_2 x_3\, dx_3 \wedge dx_4$, e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa data da $g(t) := (t_1^2,\, t_1 t_2,\, -t_1 t_2,\, t_2^2)$. Calcolare $d\omega$, $g^\# \omega$ e $g^\#(d\omega)$.

5. a) Sia K il sottoinsieme convesso di $L^2(0,1)$ costituito dalle funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tali che $|f(x)| \le 1$ quasi ovunque. Far vedere che K è chiuso.
   b) Trovare la proiezione di un generico elemento g di $L^2(I)$ su K.

6. Sia D un dominio compatto con frontiera di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$ e a sia $u : [0, +\infty) \times D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che risolve l'equazione del calore $u_t = \Delta u$ con la condizione al bordo $u(t,x) = 0$ per ogni $t \ge 0$ e $x \in \partial D$. Dimostrare che $\|u(t,\cdot)\|_p$ è una funzione decrescente di t per ogni $p \ge 2$. [*Cominciare eventualmente dal caso $p = 2$ e/o D intervallo in $\mathbb{R}$.*]

7. Data una funzione u_0 in C^1_{per} si consideri il problema
$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u & \text{su } (0,+\infty) \times (-\pi,\pi), \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) & \text{per } t \in (0,+\infty), \\ u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi) & \text{per } t \in (0,+\infty), \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{per } x \in [-\pi,\pi]. \end{cases} \tag{2}$$
   a) Risolvere (2) per $u_0(x) = 2\cos x$.
   b) Dire per quali dati iniziali u_0 la soluzione di (2) risulta essere limitata per $t \ge 0$.

8. a) Sia S l'insieme dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $x^2 + y^2 + 2z(1+z^2)e^{x^2-y^2} = 4$ e $z \ge 0$. Dimostrare che S è una superfice con bordo di classe C^∞, compatta, connessa e orientabile.
   b) Si orienti S in modo tale che l'orientazione di $\mathrm{Tan}(S,p)$ con $p := (0,0,1)$ è data da $[(1,0,0),\, (0,1,0)]$, e si calcoli $\int_S \omega$ dove $\omega := dx \wedge dy + e^z y\, dx \wedge dz + e^z x\, dy \wedge dz$.
   c) Si calcoli $\int_S \omega$ dove $\omega := xe^z\, dx \wedge dy + y\, dx \wedge dz + x\, dy \wedge dz$.

S O L U Z I O N I

1. Osserviamo che
$$\begin{aligned} f(x) &= e^2\, e^{-2(x-1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^2 \left[2 \frac{e^{-(2(x-1))^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^2 \left[\tau_h \sigma_\delta g\right](x) \qquad \text{con } h=1,\ \delta = \frac{1}{2} \text{ e } g(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$
dove, al solito, $\tau_h f(x) := f(x-h)$ e $\sigma_\delta f(x) := \frac{1}{\delta} f(x/\delta)$. Pertanto, applicando le solite proprietà della trasformata di Fourier e ricordando che la trasformata della gaussiana g è $e^{-y^2/2}$, otteniamo che
$$\widehat{f}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^2\, e^{-iyh}\, e^{-(\delta y)^2/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-y^2/8 - iy + 2}\,.$$

2. Osserviamo che una funzione g è reale (q.o.) se e solo se $g = \bar{g}$ (q.o.). Ma un semplice conto mostra che
$$c_n(\bar{g}) = \overline{c_{-n}(g)} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$
e quindi $g = \bar{g}$ se e solo se $c_n(g) = \overline{c_{-n}(g)}$ per ogni n (due funzioni coincidono (q.o.) se e solo se hanno gli stessi coefficienti di Fourier).

3. Affinché f sia di classe C^2 basta che $x\, f(x)$ e $x^2\, f(x)$ siano in L^1, e siccome f è limitata e $x^2\, f(x) \sim |x|^{2-a}$ per $x \to \pm\infty$, basta che $2 - a < -1$, vale a dire $a > 3$.

4. Date $u, v \in X$, usando la definizione di T ed integrando per parti si ottiene
$$\begin{aligned} \langle Tu\,;\, v\rangle &= \int_{-1}^{1} ((x^2-a)\,\dot{u})' v\, dx \\ &= \Big|(x^2-a)\dot{u}v\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (x^2-a)\dot{u}\dot{v}\, dx \\ &= (1-a)\,\Big|\dot{u}v\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} (a-x^2)\dot{u}\dot{v}\, dx \end{aligned}$$
e quindi
$$\langle Tu\,;\, v\rangle - \langle u\,;\, Tv\rangle = (1-a)\,\Big|\dot{u}v - u\dot{v}\Big|_{-1}^{1}\,.$$
Pertanto se $a = 1$ si ha che $\langle Tu\,;\, v\rangle - \langle u\,;\, Tv\rangle = 0$, ovvero T è autoaggiunto. Se invece $a \neq 1$ allora T non è autoaggiunto, e per farlo vedere basta esibire una coppia di funzioni u e v tali che
$$\Big|\dot{u}v - u\dot{v}\Big|_{-1}^{1} \neq 0\,,$$
per esempio $u(x) := 1$ e $v(x) := x^2$.

5. a) Al solito, per risolvere questo problema conviene sviluppare l'incognita u in serie di seni nella variabile x, vale a dire
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(t)\, \sin(nx)\,.$$
Così facendo il problema (1) si riscrive come segue: per ogni $n = 1, 2, \ldots$ la funzione γ_n risolve il problema di Cauchy
$$\begin{cases} \ddot{y} = (2-n^2)\, y \\ y(0) = \gamma_{0,n} \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$
dove $\gamma_{0,n}$ sono i coefficienti dello sviluppo in seni del dato iniziale u_0.

Pertanto per $n = 1$ abbiamo
$$\gamma_1(t) = \frac{\gamma_{0,1}}{2}(e^t + e^{-t})\,,$$

mentre per $n > 1$ abbiamo

$$\gamma_n(t) = \gamma_{0,n}\cos(\omega_n t) \quad \text{con } \omega_n := \sqrt{n^2-2}.$$

Calcoliamo ora i coefficienti $\gamma_{0,n}$ del dato iniziale u_0:

$$\begin{aligned} u_0(x) = \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{-1}{8i}\big(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\big) \\ &= \frac{3}{4}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} - \frac{1}{4}\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i} = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x)\,, \end{aligned}$$

e quindi $\gamma_{0,1} = 3/4$, $\gamma_{0,3} = 1/4$ e $\gamma_{0,n} = 0$ per $n \neq 1, 3$. Pertanto la soluzione u è

$$u(t,x) = \frac{3}{8}(e^t + e^{-t})\sin x - \frac{1}{4}\cos(\sqrt{7}t)\sin(3x)$$

(trattandosi di una somma finita non è necessario fare ulteriori verifiche). Da questa formula si ottiene quindi che

$$\|u(t,\cdot)\|_\infty \sim \frac{3}{8}e^t \quad \text{per } t \to +\infty.$$

b) Procedendo come sopra si ottiene che $u_0(x)$ è una combinazione lineare finita di $\sin(nx)$ e per la precisione

$$u_0(x) = \sin^{2k+1}x = \sum_{h=0}^{k} \frac{(-1)^{k-h}}{2^{2k}}\binom{2k+1}{h}\sin\big((2k-2h+1)x\big)$$

e in particolare $\gamma_{0,1} = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k+1}{k}$. Di conseguenza

$$\|u(t,\cdot)\|_\infty \sim \frac{1}{2^{2k+1}}\binom{2k+1}{k}e^t \quad \text{per } t \to +\infty.$$

6. a) Facciamo vedere innanzitutto che $(0,d^*] \subset D$, ovvero che $d^* \in D$ quando $d^* > 0$. A questo scopo ricordo che, come visto a lezione, la soluzione del problema (2) è data formalmente da

$$u(t,x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-n^2t+inx}\,.$$

Vogliamo far vedere che se $d^* > 0$ questa formula definisce una funzione su $(-d^*,+\infty)\times\mathbb{R}$ di classe C^∞ e 2π-periodica in x che risolve l'equazione del calore e coincide con u_0 per $t = 0$. I punto chiave è far vedere che per ogni $d < d^*$ e ogni k, h interi positivi, posto $R_d := [-d,+\infty)\times\mathbb{R}$ si ha

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\big\|D_t^h D_x^k(c_n e^{-n^2t+inx})\big\|_{L^\infty(R_d)}}_{a_{hkn}} < +\infty \tag{3}$$

Osserviamo per cominciare che

$$D_t^h D_x^k(c_n e^{-n^2t+inx}) = c_n(-n^2)^h(in)^k e^{-n^2t+inx}$$

e quindi

$$a_{hkn} = |n|^{2h+k}e^{n^2d}|c_n|\,.$$

Inoltre se $d < d^*$ si ha che

$$\limsup_{n\to\pm\infty}\frac{\log|c_n|}{n^2} < -d$$

e quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per $|n|$ sufficientemente grande,

$$\frac{\log|c_n|}{n^2} \leq -(d+\varepsilon) \quad \text{ovvero} \quad |c_n| \leq e^{-(d+\varepsilon)n^2}\,.$$

Da questo segue che (per gli stessi n)

$$a_{hkn} \leq |n|^{2h+k}e^{-\varepsilon n^2}$$

e quindi la (3) è verificata, e questo conclude la dimostrazione del fatto che $d^* \in D$.

Facciamo ora vedere che $(0, d^*] \supset D$, ovvero che preso $d \in D$ si ha che $d \le d^*$. Supponiamo dunque di avere una soluzione u del problema (2) definita in $(-d, 0] \times [-\pi, \pi]$. Sappiamo da quanto visto a lezione che preso $n \in \mathbb{Z}$ e posto $c_n(t) := c_n(u(t, \cdot))$ per ogni $t \in (-d, 0]$, allora $c_n(t)$ è una funzione di classe C^2 che risolve l'equazione differenziale $\dot y = n^2 y$ con condizione iniziale $y(0) = c_n$, ovvero

$$c_n(t) = c_n e^{-n^2 t}\,.$$

Inoltre per ogni $t \in (-d, 0]$ i coefficienti di Fourier $c_n(t)$ di $u(t, \cdot)$ sono quantomeno in ℓ^2 e quindi sono anche limitati. Dunque esiste $m > 0$ tale che

$$e^{-n^2 t}|c_n| = |c_n(t)| \le m\,,$$

da cui segue che $|c_n| \le m e^{n^2 t}$ e quindi

$$\frac{\log|c_n|}{n^2} \le \frac{\log m}{n^2} + t\,,$$

e passando al limite (anzi, al limsup) per $n \to \pm\infty$ otteniamo infine $-d^* \le t$ ovvero

$$d^* \ge -t\,,$$

e siccome questo vale per ogni t tale che $-t \le d$, otteniamo anche che $d^* \ge d$.

b) Poniamo

$$f_1(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \quad \text{e} \quad f_2(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^n\,. \tag{4}$$

Abbiamo visto prima che preso d positivo tale che $d < d^*$ si ha che $|c_n| \le e^{-dn^2}$ da cui segue che i raggi di convergenza di entrambe le serie di potenze in (4) sono $+\infty$ (uso il criterio della radice per calcolarli), e dunque f_1 ed f_2 sono funzioni olomorfe definite su tutto $\mathbb{C}$. E chiaramente $u_0(x) = f_1(e^x) + f_2(e^{-x})$.

Per trovare una funzione u_0 analitica per cui $d^* = 0$ basta prendere a $u_0(x) := f(e^{ix})$ con f funzione olomorfa che non può essere estesa a tutto $\mathbb{C}$ ed il cui dominio di definizione contiene la circonferenza unitaria (per esempio $f(z) = (2+z)^{-1}$). In tal caso infatti i coefficienti di Fourier c_n sono nulli per $n < 0$ e coincidono con quelli della serie di Taylor di f in 0 per $n \ge 0$, siccome il raggio di convergenza R di questa serie è finito, si ha che (per il criterio della radice) $\log|c_n| \sim -n \log R$ (almeno per una sottosuccessione degli n) e quindi $d^* = 0$.

7. a) Procediamo per induzione su k: per $k = 0$ l'enunciato è evidente; supponendolo vero per k abbiamo che il polinomio $D^k((x^2-1)^n)$ si scrive come $p(x)\,(x^2-1)^{n-k}$, e derivando questa espressione otteniamo

$$D^{k+1}((x^2-1)^n) = \dot p(x)(x^2-1)^{n-k} + 2(n-k)x\,p(x)(x^2-1)^{n-k-1}$$

che è chiaramente divisibile per $(x^2-1)^{n-k-1}$.

b) Integrando per parti l'integrale che definisce il prodotto scalare $\langle q_n(x)\,;\,x^m\rangle$ otteniamo

$$\begin{aligned}\langle q_n(x)\,;\,x^m\rangle &= \int_{-1}^1 D^n((x^2-1)^n)\,x^m\,dx \\ &= \Big| D^{n-1}((x^2-1)^n)\,x^m \Big|_{-1}^1 - m\int_{-1}^1 D^{n-1}((x^2-1)^n)\,x^{m-1}\,dx\end{aligned}$$

e il primo addendo nella seconda riga è nullo perché $D^{n-1}((x^2-1)^n)$ si annulla in ± 1 per via di a); integrando per parti l'integrale che resta otteniamo

$$= -m\Big| D^{n-2}((x^2-1)^n)\,x^{m-1}\Big|_{-1}^1 + m(m-1)\int_{-1}^1 D^{n-2}((x^2-1)^n)\,x^{m-2}\,dx$$

e di nuovo il primo addendo è nullo; procedendo sempre così, dopo m integrazioni per parti otteniamo

$$= (-1)^{m-1} m! \Big| D^{n-m}((x^2-1)^n)\, x \Big|_{-1}^{1} + (-1)^m m! \int_{-1}^{1} D^{n-m}((x^2-1)^n)\, dx$$
$$= (-1)^m m! \Big| D^{n-m-1}((x^2-1)^n)\, x \Big|_{-1}^{1} = 0\,.$$

c) Per ogni n sia V_n lo span in $L^2(-1,1)$ delle funzioni $1, x, \dots, x^n$. Allora sia p_n che q_n appartengono a $V_n \cap V_{n-1}^{\perp}$, il primo per via del procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, il secondo per via di quanto dimostrato al punto b). Ma siccome V_{n-1} ha codimensione 1 in V_n, il sottospazio $V_n \cap V_{n-1}^{\perp}$ ha dimensione 1 ed è dunque generato da p_n (che non è nullo), e pertanto q_n è un multiplo di p_n.

8. Data una funzione f con supporto contenuto in $[-\pi a, \pi a]$, quando $a \leq 1$ il supporto è contenuto anche in $[-\pi, \pi]$ e quindi

$$\widehat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} = 2\pi\, c_n(f)$$

dove $c_n(f)$ è il coefficiente di Fourier n-esimo di f, o meglio della restrizione di f all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Dunque le restrizioni di f_1 e f_2 all'intervallo $[-\pi, \pi]$ hanno gli stessi coefficienti di Fourier e quindi $f_1(x) = f_2(x)$ per q.o. $x \in [-\pi, \pi]$, e di conseguenza anche per q.o. $x \in \mathbb{R}$.

Se invece $a > 1$ questo non è sempre vero. Infatti, prendendo $f_2(x) := f_1(x + 2\pi)$, per quanto visto a lezione abbiamo che

$$\widehat{f_2}(n) = e^{2\pi n i} \widehat{f_1}(n) = \widehat{f_1}(n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

D'altra parte se $a > 1$ posso scegliere f_1 in modo tale che f_1 e f_2 abbiano supporti disgiunti e contenuti in $[-\pi a, \pi a]$ (basta che f_1 abbia supporto contenuto in $[\pi, m]$ con m tale che $\pi < m < a\pi \wedge 3\pi$).

Commenti

- Esercizio 2.Parlando di funzioni in L^2, "reali" va ovviamente inteso come "reali in quasi ogni punto".
- Esercizio 2. Alcuni hanno dimostrato una sola implicazione.
- Esercizio 5. Diversi dei presenti hanno individuato correttamente il comportamento asintotico di $\|u(t,\cdot)\|_\infty$ per $t \to +\infty$, ma curiosamente hanno giustificato il risultato esibendo solo delle maggiorazioni di questa quantità.
- Esercizio 6. Nel calcolare il limsup che definisce d^* si segue la convenzione $\log 0 = -\infty$.
- Esercizio 7. Rinormalizzando i polinomi p_n o q_n in modo tale che valgano 1 in 1 (cosa che è possibile perché si può dimostrare che $q_n(1) \neq 0$) si ottengono i cosidetti polinomi di Legendre.
- Esercizio 7. Alcuni degli argomenti induttivi proposti dai presenti sono imprecisi, o perlomeno presentati in modo impreciso.
- Esercizio 8. La tesi principale vale anche supponendo che f_1 e f_2 appartengano a $L^1(\mathbb{R})$. In tal caso si deve usare il fatto che due funzioni in $L^1(-\pi, \pi)$ con gli stessi coefficienti di Fourier coincidono q.o.
- Esercizio 8. Molti danno una risposta parziale alla seconda parte dell'esercizio (supponendo per esempio a intero, oppure $a \geq 2$).

1. a) Calcoliamo $d\omega$:

$$\begin{aligned} d\omega(x) &= \frac{\partial}{\partial x_3}\big((x_1+x_2)e^{a(x_1+x_3)}\big)\, dx_3\wedge dx_1\wedge dx_2 \\ &= a(x_1+x_2)e^{a(x_1+x_3)}\, dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\,. \end{aligned}$$

Dunque $d\omega = 0$ se e solo se $a=0$, ed in tal caso

$$\begin{aligned} \omega(x) &= (x_1+x_2)\, dx_1\wedge dx_2 \\ &= d(x_1^2/2 + x_1x_2)\wedge dx_2 = d\big[(x_1^2/2+x_1x_2)\, dx_2\big]\,, \end{aligned}$$

e dunque una primitiva di ω è $(x_1^2/2+x_1x_2)\, dx_2$.

b) Si tratta di un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} g^{\#}\omega &= (s_1^2+s_1s_2)\, e^{a(s_2^2+1-s_2^2)} d(s_1^2)\wedge d(s_1s_2) \\ &= s_1(s_1+s_2)\, e^a(2s_1ds_1)\wedge(s_2ds_1+s_1ds_2) \\ &= 2e^a s_1^3(s_1+s_2)\, ds_1\wedge ds_2\,. \end{aligned}$$

2. Basta prendere $S := S'\setminus\partial S'$ dove S' è una superficie orientata compatta con bordo non vuoto (per cui S è una superficie *senza bordo* limitata), ed una forma ω il cui integrale su $\partial S'$ è diverso da zero. In tal caso si ha infatti

$$\int_S d\omega = \int_{S'} d\omega = \int_{\partial S'}\omega \neq 0 = \int_{\partial S}\omega\,.$$

3. Cerchiamo dei coefficienti a_i e b_i con $i=1,2,3$ tali che

$$\alpha := (a_1dx_1+a_2dx_2+a_3dx_3)\wedge(b_1dx_1+b_2dx_2+b_3dx_3)\,.$$

Sviluppando il prodotto alla destra dell'uguale questa identità si riduce al sistema di 3 equazioni e 6 incognite

$$\begin{cases} 1 = a_1b_2 - a_2b_1 \\ 1 = a_2b_3 - a_3b_2 \\ 1 = a_3b_1 - a_1b_3 \end{cases};$$

ponendo $b_1 := 0$, $b_2 := 1$ e $b_3 := -1$ questo sistema si riduce a

$$\begin{cases} 1 = a_1 \\ 1 = -a_2 - a_3 \\ 1 = a_1 \end{cases},$$

ed una soluzione è data da $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ e $a_3 = 0$. Quindi

$$\alpha := dx_1\wedge dx_2 + dx_2\wedge dx_3 + dx_3\wedge dx_1 = (dx_1-dx_2)\wedge(dx_2-dx_3)\,.$$

4. Se $m=n$ l'insieme S coincide con l'insieme $O(n)$ delle matrici ortonormali; si tratta pertanto di modificare la dimostrazione vista a lezione che $O(n)$ è una superficie. Partiamo dunque dal fatto che $S = f^{-1}(0)$ dove $f:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}_s^{n\times n}$ è la mappa data da

$$f: X\mapsto X^tX$$

e $\mathbb{R}_s^{n\times n}$ indica lo spazio delle matrici $n\times n$ simmetriche (e I è la matrice identità). Ci basta ora far vedere che $f(X)=0$ è una buona equazione per S—si noti infatti che

$$d = mn - \frac{1}{2}n(n+1) = \dim(\mathbb{R}^{m\times n}) - \dim(\mathbb{R}_s^{n\times n})\,.$$

A questo proposito osserviamo che f è una mappa di classe C^∞ (anzi, polinomiale) e che per ogni $X,H\in\mathbb{R}^{m\times n}$ si ha

$$\begin{aligned} f(X+H) &= X^tX + X^tH + H^tX + H^tH \\ &= f(X) + X^tH + H^tX + O(|H|)\,, \end{aligned}$$

e quindi

$$df(X): H\mapsto X^tH + H^tX = X^tH + (X^tH)^t\,.$$

Non ci resta che dimostrare che per ogni $X \in S$ l'applicazione lineare $df(X)$ è di rango massimo, ovvero surgettiva in $\mathbb{R}^{n\times n}_s$. Per far questo osserviamo che, presa una matrice $K \in \mathbb{R}^{n\times n}_s$ e posto $H := \frac{1}{2}XK$, si ha

$$df(X) : H \mapsto X^t(\tfrac{1}{2}XK) + (\tfrac{1}{2}XK)^t X = \tfrac{1}{2}(K + K^t) = K$$

(ricordo che $X^tX = I$ per ogni $X \in S$).

5. Usando le note identità

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\,, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

si ottiene facilmente che per ogni coppia di interi $h, k \geq 0$ la funzione $(\cos\theta)^h(\sin\theta)^k$ si scrive come combinazione lineare finita di $e^{in\theta}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Siccome $p(x_1, x_2)$ è un polinomio nelle variabili x_1 e x_2, ne segue che la funzione $p(\cos\theta, \sin\theta)$ è pure una combinazione lineare finita di $e^{in\theta}$, vale a dire che esistono dei numeri complessi a_n e un intero finito N tali che

$$p(\cos\theta, \sin\theta) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{in\theta} \quad \text{per ogni } \theta \in \mathbb{R}.$$

Come visto a lezione la funzione u è data allora da

$$u(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=1}^{N} a_{-n}\bar{x}^n$$

(al solito si identifica $x = (x_1, x_2)$ con il numero complesso $x_1 + ix_2$). E chiaramente u è un polinomio nelle variabili x_1 e x_2.

6. a) Per definizione $S := f^{-1}(0)$ dove $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x, y) := |y|(1 + |x|^2) - 1\,.$$

Dunque l'insieme S è chiuso perché f è continua, e non è compatto perché è illimitato (in particolare la proiezione di S su $\mathbb{R}^2$ coincide con $\mathbb{R}^2$: si noti infatti per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ è possibile trovare $y \in \mathbb{R}^3$ tale che $(x, y) \in S$).

Inoltre f è di classe C^∞ per $y \neq 0$, cioè sull'aperto $A := \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, e siccome S è contenuto in A, per concludere la dimostrazione basta far vedere che il gradiente di f ha rango massimo—cioè non si annulla—su tutto A. Ma questo è ovvio giacché

$$\nabla f(x, y) = \Big(2|y|x, (1 + |x|^2)\frac{y}{|y|}\Big)\,.$$

b) Consideriamo la mappa $\tilde{g} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ data da

$$\tilde{g}(s, t) := (s, (1 + |s|^2)^{-1}t)\,.$$

Dunque la restrizione di $\tilde{g}$ a $\mathbb{R}^2 \times S^2$ coincide con g, ed è facile verificare che $\tilde{g}$ porta $\mathbb{R}^2 \times S^2$ in S). Inoltre il differenziale di $\tilde{g}$ in un generico punto (s, t) è la mappa lineare da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ in sé data da

$$d\tilde{g}(s, t) = (ds, (1 + |s|^2)^{-1}dt - 2(1 + |s|^2)^{-2}t\,(s \cdot ds))\,,$$

dove ds è il differenziale della mappa $(s, t) \mapsto s$, vale a dire la proiezione di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}^2$, dt è definita in maniera analoga, e $c := (1 + |s|^2)^{-1}$. In altre parole,

$$d\tilde{g}(s, t) : (v, w) \mapsto (v, cw - 2c^2(s \cdot v)t) \quad \text{per ogni } (v, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3.$$

Chiaramente $dg(s, t)$ è la restrizione di questa applicazione lineare allo spazio tangente a $\mathbb{R}^2 \times S$ nel punto (s, t), vale a dire $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Tan}(S^2, t) = \mathbb{R}^2 \times t^\perp$.

Per calcolare lo Jacobiano di g prendiamo e_1, e_2 base canonica di $\mathbb{R}^2$, τ_1, τ_2 base ortonormale di $t^\perp$, e scriviamo la matrice associata a $dg(s, t)$ come mappa da $\mathbb{R}^2 \times t^\perp$ in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ usando come base ortonormale dello spazio di partenza i vettori $(e_1, 0), (e_2, 0), (0, \tau_1), (0, \tau_2)$ e come base ortonormale di quello di arrivo quella ottenuta aggiungendo il vettore $(0,t)$:

$$M = M(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ -2c^2 s_1 & -2c^2 s_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando la formula di Binet otteniamo quindi

$$Jg(s,t) = \sqrt{\det(M^t M)} = \cdots = c^2\sqrt{1+4c^4|s|^2}\,.$$

c) Osserviamo che la mappa g porta effettivamente $\mathbb{R}^2 \times S^2$ in S, e che ne possiamo scrivere esplicitamente l'inversa $g^{-1} : S \to \mathbb{R}^2 \times S^2$:

$$g^{-1}(x,y) = (x, (1+|x|^2)y)\,.$$

Siccome sia g che g^{-1} sono continue, g è un omeomorfismo. Siccome sia g che g^{-1} sono di classe C^∞, il differenziale di g deve avere rango massimo in ogni punto, e quindi g è una buona parametrizzazione.

7. a) Sia $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ la matrice di cambio di base da $\tilde\beta := (\tilde v_1, \dots, \tilde v_d)$ a $\beta := (v_1, \dots, v_d)$, vale a dire la matrice di coefficienti c_{hk} tale che la colonna k-esima corrisponde alle coordinate di $\tilde v_k$ rispetto alla base β, ovvero

$$\tilde v_k = \sum_h c_{hk} v_h\,.$$

Scrivendo $c_{hk} = a_{hk} + ib_{hk}$ con a_{hk} e b_{hk} numeri reali otteniamo che

$$\tilde v_k = \sum_h a_{hk} v_h + b_{hk}(iv_h)\,, \quad i\tilde v_k = \sum_h -b_{hk} v_h + a_{hk}(iv_h)\,,$$

e dunque la matrice di cambio di base dalla base reale $\tilde\beta' := (\tilde v_1, i\tilde v_1, \dots, \tilde v_d, i\tilde v_d)$ alla base reale $\beta' := (v_1, iv_1, \dots, v_d, iv_d)$ è

$$C' := \begin{pmatrix} \left[\begin{smallmatrix} a_{11} & -b_{11} \\ b_{11} & a_{11} \end{smallmatrix}\right] & \left[\begin{smallmatrix} a_{12} & -b_{12} \\ b_{12} & a_{12} \end{smallmatrix}\right] & \cdots \\ \left[\begin{smallmatrix} a_{21} & -b_{21} \\ b_{21} & a_{21} \end{smallmatrix}\right] & \left[\begin{smallmatrix} a_{22} & -b_{22} \\ b_{22} & a_{22} \end{smallmatrix}\right] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

In altre parole C' è la matrice reale $2n \times 2n$ ottenuta sostituendo ogni coefficiente c_{hk} nella matrice C con il blocco 2×2

$$\begin{bmatrix} a_{hk} & -b_{hk} \\ b_{hk} & a_{hk} \end{bmatrix}.$$

Ora è noto che

$$\det C' = |\det C|^2\,; \tag{2}$$

in particolare C' ha determinante positivo e quindi le basi β' e $\tilde\beta'$ hanno la stessa orientazione.

L'identità (2) può essere dimostrata facilmente quando C è una matrice diagonale (nel qual caso C' è diagonale a blocchi) e la si estende alle matrici C diagonalizzabili osservando che se C è coniugata a una matrice diagonale D (tramite una matrice invertibile M) allora C' è coniugata a D' (tramite M') e quindi, siccome il determinante è invariante per coniugio,

$$\det C' = \det D' = |\det D|^2 = |\det C|^2\,.$$

Infine si estende la (2) a una matrice C qualunque usando il fatto che quelle diagonalizzabili sono dense, e che entrambe i termini della (2) sono continui in C.

b) Per ogni $x \in S$ prendiamo come orientazione di $\mathrm{Tan}(s,x)$ quella associata alla base reale β' dove β è una qualunque base complessa di $\mathrm{Tan}(s,x)$.

Bisogna far vedere che questa orientazione risulta essere continua nel senso definito a lezione. Per farlo usiamo il seguente lemma elementare: supponiamo che per ogni punto $x \in S$ sia stata scelta un'orientazione di $\mathrm{Tan}(S,x)$, e che *localmente* sia possibile scegliere una base reale $\beta'(x)$ con questa orientazione che varia con continuità in x (nel senso che ciascun vettore della base varia con continuità). Allora l'orientazione è continua.

Nel caso specifico per applicare questo lemma ci basta far vedere che localmente possiamo scegliere la base complessa $\beta(x)$ in modo continuo. Fissiamo dunque un punto $x_0 \in S$ ed una base complessa β_0 di $\mathrm{Tan}(s, x_0)$, prendiamo una qualunque proiezione $p : \mathbb{C}^n \to \mathrm{Tan}(S, x_0)$ che sia lineare in senso complesso, e prendiamo un'intorno U di x_0 tale che la restrizione di p a $\mathrm{Tan}(S, x)$, che indichiamo con p_x, abbia rango massimo per ogni $x \in U$. Allora $p_x^{-1}(\beta_0)$ è una base complessa di $\mathrm{Tan}(S, x)$, e chiaramente varia con continuità in x.

8. a) Dimostrare la (1) equivale a far vedere che la funzione

$$g(r) := r^{n-1} \frac{d}{dr} \fint_{\partial B(0,r)} f \, d\sigma_{n-1}$$

è costante. A questo proposito, abbiamo visto a lezione che

$$\frac{d}{dr} \fint_{\partial B(0,r)} f \, d\sigma_{n-1} = \fint_{\partial B(0,r)} \nabla f \cdot \eta \, d\sigma_{n-1}$$

dove η è la normale esterna a $\partial B(0, r)$, e dunque

$$c_n g(r) = \int_{\partial B(0,r)} \nabla f \cdot \eta \, d\sigma_{n-1}$$

dove c_n è il volume della sfera S^{n-1}. Presi ora $r_1 > r_2 > 0$, indichiamo con D la chiusura di $B(0, r_1) \setminus B(0, r_2)$ e osserviamo che

$$\begin{aligned} c_n(g(r_1) - g(r_2)) &= \int_{\partial B(0,r_1)} \nabla f \cdot \eta \, d\sigma_{n-1} - \int_{\partial B(0,r_2)} \nabla f \cdot \eta \, d\sigma_{n-1} \\ &= \int_{\partial D} \nabla f \cdot \eta_D \, d\sigma_{n-1} = \int_D \mathrm{div}(\nabla f) \, dx = \int_D \Delta f \, dx = 0 \end{aligned}$$

(la seconda uguaglianza segue dal fatto che ∂D coincide con l'unione delle sfere $\partial B(0, r_1)$ e $\partial B(0, r_2)$, e che la normale esterna a ∂D, che abbiamo indicato con η_D, coincide con la normale esterna sulla prima sfera, e con l'opposto della normale esterna sulla seconda sfera; la terza uguaglianza è il teorema della divergenza, e infine l'ultima uguaglianza segue dal fatto che f è armonica e quindi ha laplaciano nullo).

Siccome r_1 ed r_2 sono arbitrari, abbiamo dimostrato che la funzione g è costante.

b) Proviamo a cercare un esempio tra le funzioni radiali, ovvero le f della forma $f(x) = g(|x|)$. Per tali funzioni la formula (1) si riduce a $g'(r) = cr^{1-n}$, da cui si ricava che

$$g(r) = \int cr^{1-n} dr = \begin{cases} c \log r + c' & \text{per } n = 2, \\ \frac{c}{2-n} r^{2-n} + c' & \text{per } n > 2, \end{cases}$$

con c' costante arbitraria. Ora è un semplice conto verificare che per qualunque scelta di c e c' la funzione $f(x) := g(|x|)$ è effettivamente armonica su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

c) Siccome u è continua, ci basta verificare che ha la proprietà della media, e siccome è armonica fuori da 0, ci basta dimostrare la proprietà della media in 0, ovvero che la costante c in (1) è zero. Per far questo osserviamo che integrando la (1) si ottiene

$$\fint_{\partial B(0,r)} f \, d\sigma_{n-1} = \int \frac{c}{r^{n-1}} dr = g(r)$$

dove g è la funzione definita al punto b). Quindi, se per assurdo si avesse $c \neq 0$ allora la media di f su $\partial B(0, r)$ tenderebbe a $+\infty$ per $r \to 0^+$, in contraddizione con il fatto che f è continua e quindi limitata in un intorno di 0.

d) In effetti non è necessario supporre che f sia continua in 0, ma è sufficiente che sia limitata in un intorno di 0, e anzi che soddisfi $f(x) = o(|x|^{2-n})$ per $x \to 0$ ($f(x) = o(\log |x|)$ se $n = 2$). In tal caso, infatti, la costante c in (1) deve essere 0, e quindi la media di f su $\partial B(0, r)$ è costante in r. Estendiamo dunque u a 0 ponendola uguale alla sua media su una qualunque sfera $\partial B(0, r)$. A questo punto u ha la proprietà della media sulle sfere e sulle palle, e per concludere la dimostrazione dobbiamo solo far vedere che u è continua in 0. Questo segue dalla proprietà della media e dal fatto che, fissato un qualunque r, l'integrale di u sulla palla $B(x, r)$ varia con continuità in x per via del teorema di convergenza dominata.

COMMENTI

- Esercizio 5. Nella soluzione data sopra si è utilizzato senza dirlo questo fatto: se u è una funzione continua su D a valori complessi, è armonica all'interno di D, e coincide con la funzione reale u_0 su ∂D, allora u assume solo valori reali. Un modo per dimostrarlo è osservare che la parte immaginaria di u è una funzione armonica che vale 0 su ∂D, e quindi deve essere identicamente nulla per il principio del massimo.

- Esercizio 5. Una soluzione molto elegante proposta da alcuni dei presenti è la seguente: al solito si identifica $x = (x_1, x_2)$ con il numero complesso $x_1 + ix_2$, e usando il fatto che
$$x_1 = \frac{x+\bar{x}}{2}\,, \quad x_2 = \frac{x-\bar{x}}{2i}$$
si scrive il polinomio $p(x_1, x_2)$ come $q(x, \bar{x})$ con q polinomio di due variabili complesse. Ora si costruisce il polinomio $\tilde{q}$ sostituendo ogni monomio $x^m\bar{x}^n$ in q con x^{m-n} se $m \geq n$, e con $\bar{x}^{n-m}$ se $n > m$. Si osserva quindi che per tutti i punti x in $\partial D = S^1$ si ha che $x\bar{x} = 1$, e quindi $x^m\bar{x}^n = x^{m-n}(x\bar{x})^n = x^{m-n}$ se $m \geq n$ e analogamente $x^m\bar{x}^n = (x\bar{x})^m\bar{x}^{n-m} = \bar{x}^{n-m}$ se $n > m$. Pertanto
$$p(x) = q(x, \bar{x}) = \tilde{q}(x, \bar{x}) \quad \text{per ogni } x \in \partial D.$$
Inoltre $\tilde{q}(x, \bar{x})$ è una combinazione lineare di potenze di x o di potenze di $\bar{x}$ (ma non ci sono termini misti), e la si può quindi scrivere come somma di una funzione olomorfa e di una funzione antiolomorfa di x. Pertanto $u(x) := \tilde{q}(x, \bar{x})$ è una funzione armonica (anzi, la funzione armonica) che coincide con p su ∂D. E chiaramente u è come un polinomio in x_1 e x_2.

- Esercizio 6b). La domanda "calcolare il differenziale di g" ha creato qualche imbarazzo. Tecnicamente il differenziale in questione è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Tan}(S^2, t)$ in $\mathrm{Tan}(S, g(s, t))$ oppure in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$, e può essere quindi rappresentata in termini di applicazioni lineari elementari; per rappresentarla come matrice è necessario specificare una base dello spazio di partenza e di quello di arrivo, cosa che molti hanno omesso di fare.

- Esercizio 6b). Molti hanno calcolato lo Jacobiano della mappa $\tilde{g}$ invece che di g, ovvero il determinante della mappa $dg(s, t)$ invece che quello della sua restrizione a $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{Tan}(S^2, t)$. Ma i due determinanti non sono la stessa cosa (il primo corrisponde al determinante di una matrice 5×5, il secondo a quello di una matrice 4×4). In effetti questa è la principale difficoltà di questo esercizio.

- Esercizio 6c). Nella versione originale di questo esercizio si chiedeva anche di trovare il volume di S, ovvero di calcolare l'integrale dello Jacobiano Jg su $\mathbb{R}^2 \times S^2$; siccome $Jg(s, t)$ dipende solo da $|s|$, questo integrale si riduce immediatamente all'integrale di una funzione su $0, +\infty$, ma quest'ultimo è infattibile (nel proporre l'esercizio avevo calcolato erroneamente lo Jacobiano).

- Esercizio 7a). Una soluzione alternativa, proposto da alcuni dei presenti, è la seguente: si osserva innanzitutto che la tesi equivale a dire che ogni applicazione lineare invertibile da $\mathbb{C}^d$ in sé conserva l'orientazione (vale a dire che trasforma basi reali di $\mathbb{C}^d$ in basi con la stessa orientazione). Per dimostrarlo si scrive questa applicazione lineare come composizione di applicazioni lineari elementari, per esempio quella date dall'algoritmo di Gauss, e si verifica direttamente che queste applicazioni elementari conservano l'orientazione.

- Esercizio 7b). Un modo alternativo di dimostrare la continuità dell'orientazione, proposto da alcuni dei presenti, consiste nell'utilizzare parametrizzazioni $g : A \subset \mathbb{C}^d \to S$ tali che il differenziale $dg(s)$ è lineare in senso complesso per ogni $s \in A$, e osservare che una base di $\mathrm{Tan}(S, g(s))$ con l'orientazione desiderata può essere ottenuta a partire dalla base canonica di $\mathbb{C}^d$.

  Si osservi però che non tutte le parametrizzazioni di S hanno la proprietà richiesta, e anzi l'esistenza di parametrizzazioni che ce l'hanno va dimostrata. Fissiamo dunque $x_0 \in S$; a meno di un cambio di coordinate complesso possiamo supporre che il piano tangente a S in x_0 sia $\mathbb{C}^d \times \{0\}$, e a questo punto sappiamo che in un intorno di x_0 la superficie S coincide con il grafico di una mappa $h : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^{n-d}$ di classe C^1 (in senso reale), ed è quindi parametrizzata da $g(s) := (s, h(s))$.

Vogliamo ora far vedere che il differenziale $dg(s) : \mathbb{C}^d \to \mathrm{Tan}(S, g(s))$ è lineare in senso complesso per ogni s. Detta dunque p la proiezione di $\mathbb{C}^n$ (visto come $\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^{n-d}$) su $\mathbb{C}^d$, notiamo che l'inversa di g coincide con la restrizione di p all'insieme S, e dunque l'inversa del differenziale $dg(s) : \mathbb{C}^d \to \mathrm{Tan}(S, g(s))$ coincide con la restrizione a $\mathrm{Tan}(S, g(s))$ del differenziale di p, ovvero p stessa. Ma p è lineare in senso complesso e quindi lo stesso deve valere per $dg(s)$.

- Esercizio 7b). Visto che l'orientazione proposta è in qualche senso canonica, la dimostrazione della continuità dovrebbe essere immediata, e lo sarebbe anche avendo a disposizione qualche strumento in più (per esempio il fatto che la Grassmanniana dei sottospazi complessi di dimensione d di $\mathbb{C}^n$ è connessa).

- Esercizio 8c). La dimostrazione data sopra in realtà non è completa, e il problema è la proprietà della media per i punti $x \neq 0$: il fatto che f sia armonica su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ implica solo che u ha la proprietà della media su tutte le palle $B(x, r)$ con $r < |x|$, mentre la dimostrazione fatta a lezione del fatto che una funzione con la proprietà della media è armonica richiede che la proprietà della media valga su tutte le palle (o perlomeno tutte le palle di raggio inferiore ad un certo r_0 positivo e indipendente da x).

  Per completare la dimostrazione dovremmo quindi far vedere che vale la proprietà della media per le palle $B(x, r)$ con $r > |x|$; per far questo possiamo procedere come nel caso $x = 0$ utilizzando la seguente generalizzazione della (1): esiste una costante c tale che per tutte le palle $B(x, r)$ con $r > |x|$ si ha
  $$\frac{d}{dr} \fint_{\partial B(x,r)} f \, d\sigma_{n-1} = \frac{c}{r^{n-1}} \, .$$
  La dimostrazione di questo fatto è analoga a quella della (1).

1. Ricordando che la trasformata di Fourier di $e^{iax}f(x)$ è $\widehat{f}(y-a)$ e che quella di $(1+x^2)^{-1}$ è $\pi e^{-|y|}$ si ottiene

$$\mathscr{F}\Big(\frac{\cos x}{1+x^2}\Big) = \frac{1}{2}\mathscr{F}\Big(\frac{e^{ix}}{1+x^2}\Big) + \frac{1}{2}\mathscr{F}\Big(\frac{e^{-ix}}{1+x^2}\Big) = \frac{\pi}{2}\big(e^{-|y-1|} + e^{-|y+1|}\big)\,.$$

2. Si ha $d\omega = 0$, perché la forma ω è esatta, e per la precisione

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|^2}\, dx_i = d(\log|x|)\,.$$

3. a) Basta applicare il teorema della divergenza e usare il fatto che $\operatorname{div}(f\,F) = \nabla f\cdot F + f\ \operatorname{div} F$.

b) Prese due funzioni $u, v\in X$ si ha che

$$\begin{aligned}\langle \Delta u\,;\,v\rangle &= \int_D \operatorname{div}(\nabla u)\, v\, dx \\ &= \int_D \operatorname{div}(v\,\nabla u)\, dx - \int_D \nabla v\cdot\nabla u\, dx \\ &= \int_{\partial D} v\,\nabla u\cdot\eta\, d\sigma_{n-1} - \int_D \nabla v\cdot\nabla u\, dx = -\int_D \nabla v\cdot\nabla u\, dx\end{aligned}$$

(la prima uguaglianza segue dal fatto che $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$, la seconda dal punto a), la terza dal teorema della divergenza, la quarta dal fatto che v è identicamente nulla su ∂D). Applicando ora la stessa identità con u e v scambiati di posto si ottiene

$$\langle u\,;\,\Delta v\rangle = -\int_D \nabla v\cdot\nabla u\, dx\,,$$

e quindi

$$\langle \Delta u\,;\,v\rangle = \langle u\,;\,\Delta v\rangle\,.$$

4. Dobbiamo far vedere che D è chiuso in S, o equivalentemente che $S\setminus D$ è aperto in S. Ovvero che dato $x_0\in S\setminus D$, esiste V intorno aperto di x_0 in S tale che $V\cap D$ è vuoto.

Siccome sia S che $S\setminus D$ sono superfici, possiamo trovare U e U' intorni di x_0 con delle buone parametrizzazioni $g: A\to S\cap U$, $g': A'\to (S\setminus D)\cap U'$ con A e A' aperti di $\mathbb{R}^d$. A patto di restringere opportunamente g e g' possiamo inoltre supporre che $U = U'$.

Osserviamo ora che $f := g^{-1}g' : A'\to A$ è una mappa C^1 con differenziale di rango massimo, e quindi è aperta. In particolare $f(A')$ è un sottoinsieme aperto di A. Poiché inoltre g è un omeomorfismo di A in $S\cap U$, l'insieme $V := g(f(A'))$ è un insieme aperto in $S\cap U$. Ma

$$V = g(f(A')) = g'(A') = (S\setminus D)\cap U$$

e in particolare $V\cap D$ è vuoto, e quindi V è l'aperto cercato.

5. a) Per ogni $f\in L^2(Q)$ consideriamo la funzione $Tf\in X$ data da

$$Tf(x_1,x_2) := \int_0^1 f(x_1,t)\, dt\,.$$

Osserviamo ora che l'applicazione $T : L^2(Q)\to X$ è lineare (ovvio) ed è continua perché limitata:

$$\begin{aligned}\|Tf\|_2^2 = \int_Q Tf\, dx &= \int_0^1 \Big[\int_0^1 f(x_1,t)\, dt\Big]^2 dx_1 \\ &\le \int_0^1 \Big[\int_0^1 (f(x_1,t))^2\, dt\Big] dx_1 = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

(la disuguaglianza segue dalla disuguaglianza di Jensen). Infine osserviamo che $Tf = f$ se $f\in X$, e quindi T è una proiezione su X.

Usando quanto appena detto otteniamo subito che X è chiuso: data una successione di funzioni $f_n\in X$ che converge a $f\in L^2(Q)$, si ha che $f_n = Tf_n$ e passando al limite si ottiene che $f = Tf$, e dunque f appartiene a X.

b) Dimostriamo ora che T è una proiezione ortogonale su X, vale a dire che $f - Tf \perp X$ per ogni $f \in L^2(Q)$. Data infatti una mappa $g \in X$, vale a dire una mappa della forma $g(x_1, x_2) = \tilde{g}(x_1)$, si ha che

$$\begin{aligned}\langle g\,;\, f - Tf\rangle &= \int_Q g(f - Tf)\,dx \\ &= \int_0^1\!\!\int_0^1 \tilde{g}(x_1)\Big[f(x_1,x_2) - \int_0^1 f(x_1,t)\,dt\Big]\,dx_2\,dx_1 \\ &= \int_0^1 \tilde{g}(x_1)\Big[\int_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_2 - \int_0^1 f(x_1,t)\,dt\Big]\,dx_1 = 0\,.\end{aligned}$$

Dal fatto che T è una proiezione ortogonale su X segue che $X^\perp$ coincide con il ker di T, ed è dunque l'insieme delle funzioni $f \in L^2(Q)$ tali che

$$\int_0^1 f(x_1,t)\,dt = 0 \quad \text{per quasi ogni } x_1 \in [0,1].$$

6. a) Sia $\delta := 1 - r$. Allora per ogni $x \in B(r)$ la chiusura della balla $B(x,\delta)$ è contenuta in $B(1)$. Quindi, per la proprietà della media,

$$u(x) = \frac{1}{a_n\delta^n}\int_{B(x,\delta)} u\,dx$$

dove a_n è il volume della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$. Pertanto

$$|u(x)| \le \frac{1}{a_n\delta^n}\int_{B(x,\delta)} |u|\,dx \le \frac{1}{a_n\delta^n}\|u\|_{L^1(B(1))}$$

e quindi $\|u\|_{L^\infty(B(r))} \le C\|u\|_{L^1(B(1))}$ con $C := 1/(a_n\delta^n)$.

b) Per dimostrare la tesi ci basta esibire una funzione u definita sulla palla aperta $B(1)$ che sia armonica, illimitata, e appartenga a L^1. Per $n = 2$ possiamo prendere

$$u(x) := \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{x-1}\Big) = \frac{x_1 - 1}{(x_1-1)^2 + x_2^2}$$

(al solito, identifichiamo $x = (x_1, x_2)$ con il numero complesso $x_1 + ix_2$). Che u sia armonica segue dal fatto che è la parte reale di una funzione olomorfa. Che sia illimitata segue dal fatto che $u(t,0)$ tende a $+\infty$ per $t \to 1^-$; non ci resta che verificare che u appartiene a $L^1(B(1))$:

$$\begin{aligned}\int_{B(1)} |u(x)|\,dx &\le \int_{B(1)} \frac{1}{|x-1|}\,dx \\ &= \int_{B(1,1)} \frac{1}{|y|}\,dy \\ &\le \int_{B(2)} \frac{1}{|y|}\,dy = \int_0^2 \frac{1}{r}\,2\pi r\,dr = 4\pi < +\infty\end{aligned}$$

(nella prima uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile $y = x - 1$; la seconda disuguaglianza segue dal fatto che la palla $B(1,1)$ di centro $1 = (1,0)$ e raggio 1 è contenuta nella palla di centro 0 e raggio 2; la seconda uguaglianza la si ottiene passando alle coordinate polari).

Questa stessa funzione permette di costruire un esempio in dimensione $n > 2$, vale a dire

$$\tilde{u}(x) := u(x_1, x_2) \quad \text{per ogni } x = (x_1, \dots, x_n) \in B(1)$$

(ometto le verifiche del caso).

7. Procedendo come per la risoluzione dell'equazione del calore vista a lezione, data una funzione u delle variabili t e x indichiamo con $\widehat{u}$ la trasformata di Fourier di u rispetto alla variabile x, vale a dire

$$\widehat{u}(t,y) := \widehat{u(t,\cdot)}(y)\,.$$

Procedendo formalmente (cioè senza verificare che i vari passaggi siano ben giustificati) abbiamo che $\widehat{u_t} = (\widehat{u})_t$ e $\widehat{u_{xx}} = -y^2\,\widehat{u}$, e quindi l'equazione $u_t = 2tu + u_{xx}$ diventa

$$\widehat{u}_t = (2t - y^2)\,\widehat{u}\,,$$

mentre la condizione iniziale $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ diventa, ovviamente, $\widehat{u}(0,\cdot) = \widehat{u_0}(\cdot)$. Dunque per ogni $y \in \mathbb{R}^2$ la funzione $t \mapsto \widehat{u}(t,y)$ risolve l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti non costanti

$$\dot{z}(t) = (2t - y^2)\, z(t)$$

con la condizione iniziale $z(0) = \widehat{u_0}(0)$. Quindi

$$\widehat{u}(t,y) = \widehat{u_0}(y)\, \exp(t^2 - y^2 t)\,. \tag{1}$$

Osserviamo ora che $\exp(t^2 - y^2 t) = \exp(t^2)\, \exp(-y^2 t)$ è la trasformata di Fourier (rispetto alla variabile x) della funzione $\exp(t^2)\, g_t(x)$ dove

$$g_t(x) := \frac{\exp(-x^2/(4t))}{\sqrt{4\pi t}}$$

è il nucleo del calore (si tratta di calcoli già fatti al momento di risolvere l'equazione del calore). Pertanto la (1) diventa

$$u(t,x) = \exp(t^2)\, (u_0 * g_t)(x)\,,$$

e usando il fatto che u_0 è la funzione indicatrice dell'intervallo $[-1,1]$ si ottiene

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \exp(t^2) \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(s)\, 1_{[-1,1]}(x-s)\, ds \\ &= \frac{\exp(t^2)}{\sqrt{4\pi t}} \int_{x-1}^{x+1} \exp(-s^2/(4t))\, ds \\ &= \frac{\exp(t^2)}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\frac{x-1}{\sqrt{4t}}}^{\frac{x+1}{\sqrt{4t}}} \exp(-r^2)\, \sqrt{4t}\, dr = \frac{\exp(t^2)}{\sqrt{\pi}} \Big[G\Big(\frac{x+1}{\sqrt{4t}}\Big) - G\Big(\frac{x-1}{\sqrt{4t}}\Big) \Big] \end{aligned}$$

dove $G(r)$ è una primitiva della funzione $\exp(-r^2)$ (nella terza uguaglianza abbiamo usato il cambio di variabile $r = s/\sqrt{4t}$).

Riassumendo, una soluzione del problema di partenza dovrebbe essere

$$u(t,x) := \begin{cases} 1_{[-1,1]}(x) & \text{per } x \in \mathbb{R},\ t = 0, \\ \dfrac{\exp(t^2)}{\sqrt{\pi}} \Big[G\Big(\dfrac{x+1}{\sqrt{4t}}\Big) - G\Big(\dfrac{x-1}{\sqrt{4t}}\Big) \Big] & \text{per } x \in \mathbb{R},\ t > 0. \end{cases}$$

Che la funzione u così definita sia C^∞ per $t > 0$ segue dal fatto che G è una funzione C^∞, ed è solo una questione di calcoli verificare che u risolve l'equazione alle derivate parziali di partenza.

Riguardo alla continuità in $(0, x_0)$ con $x_0 \in (-1,1)$, osserviamo che se $x \to x_0$ e $t \to 0^+$ allora

$$\frac{x+1}{\sqrt{4t}} \to +\infty\,, \quad \frac{x-1}{\sqrt{4t}} \to -\infty$$

e quindi

$$u(t,x) \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big[\lim_{r\to+\infty} G(r) - \lim_{r\to-\infty} G(r) \Big] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-r^2)\, dr = 1 = u(0,x_0)\,.$$

Analogamente si dimostra la continuità di u in $(0,x_0)$ con $x_0 \notin [-1,1]$. Infine quando $t \to 0^+$

$$u(t,1) \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big[\lim_{r\to+\infty} G(r) - G(0) \Big] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-r^2)\, dr = \frac{1}{2}$$

e in modo analogo si dimostra che $u(t,-1) \to 1/2$.

8. a) La mappa $\Psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ data da $\Psi(x,y) := (|x|,|y|)$ è continua e propria (è infatti immediato che $|\Psi(x,y)| \to +\infty$ quando $|(x,y)| \to +|Infty)$. Quindi $S := \Psi^{-1}(C)$ è compatto in quanto controimmagine secondo la mappa propria Ψ del compatto C.

Dimostriamo ora che S è una superficie senza bordo di classe C^1 e dimensione $m+n-1$. Dato $(x_0,y_0) \in S$ abbiamo che $\Psi(x_0,y_0)$ appartiene a C e quindi possiamo trovare un intorno aperto U di $\Psi(x_0,y_0)$ ed una funzione $f : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con differenziale di rango 1 in ogni punto tale che $C \cap U = f^{-1}(0)$. Pertanto $U' := \Psi^{-1}(U)$ è un intorno aperto di (x_0,y_0) e

$$S \cap U' = (f \circ \Psi)^{-1}(0)\,.$$

Inoltre, siccome $\Psi(x_0, y_0)$ appartiene a C e quindi all'aperto Q, possiamo supporre che U sia contenuto in Q. Quindi $U' := \Psi^{-1}(U)$ è contenuto in $\Psi^{-1}(Q) = (\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, e poiché in questo aperto la mappa Ψ è di classe C^1 e ha differenziale di rango 2, otteniamo che $f \circ \Psi : U' \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 e ha differenziale di rango 1 in ogni punto di U', e dunque $f \circ \Psi(x, y) = 0$ è una buona equazione per S in U'.

b) La dimostrazione precedente non funziona quando $x_0 = 0$ perché in tal caso U' interseca necessariamente l'insieme $\{0\} \times \mathbb{R}^m$, dove Ψ non è differenziabile, quindi $f \circ \Psi$ non è necessariamente una funzione di classe C^1, e in particolare potrebbe non definire una buona equazione per S.

Cominciamo facendo vedere che se C interseca R in modo ortogonale allora S è una superficie. Per quanto fatto al punto a) ci basta trovare una buona equazione per S in un intorno dei punti del tipo $(0, y_0)$.

Indichiamo con (s, t) i punti in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e poniamo $c := |y_0|$; siccome la retta tangente a C in $(0, c)$ è orizzontale, C coincide in un intorno di questo punto con il grafico di una funzione $t = g(s)$ di classe C^1 tale che $g'(0) = 0$, e quindi

$$g(s) = c + o(|s|) \quad \text{per } s \to 0. \tag{2}$$

Allora in un intorno di $(0, y_0)$ l'insieme S ha equazione

$$g|y| - g(|x|) = 0\,. \tag{3}$$

Osserviamo ora che la funzione $x \mapsto g(|x|)$ è di classe C^1 su $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ perché g è C^1, ed è differenziabile in 0 con gradiente nullo per via della (2); sempre usando la (2) si verifica che il gradiente è continuo anche in 0, e quindi la funzione è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^m$. D'altra parte la funzione $y \mapsto |y|$ è di classe C^1 con gradiente non nullo su tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, e quindi (3) è una buona equazione per S in un intorno di $(0, y_0)$.

Facciamo ora vedere che se C interseca R nel punto $(0, c)$ in modo non ortogonale allora S non è una superficie. Per farlo prendiamo y_0 tale che $|y_0| = c$, e mostriamo che l'insieme T dei vettori $\dot\gamma(0)$ dove $\gamma : [0, \delta) \to S$ è un cammino di classe C^1 che parte da $(0, y_0)$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ di dimensione $m + n - 1$, come invece dovrebbe essere se S fosse una superficie.

Indichiamo dunque con γ_x e γ_y le due componenti di γ e osserviamo che essendo $\gamma_x(0) = 0$ e $\gamma_y(0) = y_0 \neq 0$ si ha

$$\frac{d}{dt}|\gamma_x(t)|\bigg|_{t=0} = |\dot\gamma_x(0)|\,, \quad \frac{d}{dt}|\gamma_y(t)|\bigg|_{t=0} = \frac{y_0}{|y_0|} \cdot \dot\gamma_y(0)\,. \tag{4}$$

Siccome γ è un cammino in S si ha inoltre che

$$f(|\gamma_x(t)|, |\gamma_y(t)|) = 0 \quad \text{per } t \text{ in un intorno di } 0,$$

e derivando quest'uguaglianza in $t = 0$ otteniamo, grazie alle identità in (4),

$$\partial_s f\, |\dot\gamma_x(0)| + \partial_t f\, \frac{y_0}{|y_0|} \cdot \dot\gamma_y(0) = 0\,, \tag{5}$$

dove le derivate parziali di f si intendono calcolate nel punto $(0, c)$.

Ora, l'ipotesi che la retta tangente a C in $(0, c)$ non sia orizzontale significa che $\partial_s f \neq 0$. Ci sono quindi due possibilità: se $\partial_t f = 0$ allora l'equazione (5) implica $\dot\gamma_x(0) = 0$ e quindi T è contenuto in $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, e pertanto non può essere un sottospazio di dimensione $m + n - 1$ (ricordo che $m > 1$ e quindi $m + n - 1 > n$). Se invece $\partial_t f \neq 0$ allora l'equazione (5) implica che il prodotto scalare $y_0 \cdot \dot\gamma_y(0)$ ha segno costante per tutti i possibili cammini γ, ovvero che $y_0 \cdot v_x$ ha segno costante per tutti i vettori v in T. Ma se T è uno spazio vettoriale questo vuol dire che $v_x = 0$ per ogni $v \in T$, ovvero che T è contenuto in $\{0\} \times \mathbb{R}^n$, come prima.

Commenti

- Esercizio 4. Si verifica facilmente—ed era già stato osservato a lezione—che se S è una superficie senza bordo e D è un sottoinsieme di S chiuso relativamente ad S allora $S \setminus D$ è ancora una superficie senza bordo. In questo esercizio si chiedeva di dimostrare il viceversa di questa affermazione.

- Esercizio 5. Lo definizione di X data nel testo è (volutamente) imprecisa; quella precisa recita che X è l'insieme delle funzioni in $L^1(Q)$ che coincidono quasi ovunque con una funzione che non dipende dalla seconda variabile.

- Esercizio 5a). Si tratta di dimostrare che data una successione di funzioni $f_n \in X$ che convergono a $f \in L^2(Q)$, allora f appartiene a X. Una dimostrazione alternativa è la seguente: a patto di passare ad una sottosuccessione di n possiamo supporre che $f_n(x)$ converga a $f(x)$ per quasi ogni x, ovvero per ogni $x \notin N$ com N insieme di misura nulla in Q. Prendiamo ora t tale che
  (i) l'insieme N_t dei punti x_1 tali che $(x_1, t) \in N$ ha misura nulla;
  (ii) la funzione $x_1 \mapsto f(x_1, t)$ è misurabile.
  (Per il teorema di Fubini (i) e (ii) valgono per quasi ogni $t \in [0, 1]$.)
  Poniamo quindi $\tilde{f}(x) := f(x_1, t)$. Allora $\tilde{f}$ è una funzione misurabile su Q che non dipende dalla seconda variabile, e siccome le funzioni f_n sono costanti nella seconda variabile, si ha che $f_n(x)$ converge a $\tilde{f}(x)$ per ogni $x \notin N_t \times [0, 1]$, il che vuol dire per quasi ogni $x \in Q$. Da questo segue che $f = \tilde{f}$ quasi ovunque, e dunque f appartiene a X.

- Esercizio 7. Una soluzione alternativa la si ottiene scrivendo l'equazione come $u_t - 2tu = u_{xx}$ e moltiplicandola per il fattore integrante $\exp(-t^2)$. Così facendo il termine di sinistra diventa la derivata di $\exp(-t^2)\, u$, e ponendo $v := \exp(-t^2)\, u$ l'equazione diventa $v_t = v_{xx}$, vale a dire l'equazione del calore. Si può quindi ottenere v a partire dalla formula risolutiva vista a lezione.

- Esercizio 8. Se $n = m = 1$ allora S è la curva ottenuta restringendo C al primo quadrante e prolungandola per riflessione rispetto a entrambi gli assi; e questo caso particolare permette di capire bene cosa succede nel caso in cui SC interseca l'asse R (tuttavia aver supposto $m > 1$ semplifica la dimostrazione del fatto che S non è una superficie quando C interseca l'asse R in modo non ortogonale).

1. Poniamo
$$f_1(x) := \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| \geq 1, \\ 0 & \text{se } |f(x)| < 1, \end{cases} \quad \text{e} \quad f_2(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } |f(x)| \geq 1, \\ f(x) & \text{se } |f(x)| < 1. \end{cases}$$
È immediato vedere che $f = f_1 + f_2$. Inoltre
$$|f_1(x)| \leq |f_1(x)|^p \leq |f(x)|^p$$
per ogni x; quindi $\|f_1\|_1 \leq \|f\|_p^p$ ed in particolare $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$. Analogamente
$$|f_2(x)|^2 \leq |f_2(x)|^p \leq |f(x)|^p$$
e quindi $\|f_2\|_2 \leq \|f\|_p^p$ e $f_2 \in L^2(\mathbb{R})$.

2. Sia k l'ordine della forma ω_1 e supponiamo che ω_1 sia chiusa, cioè $d\omega_1 = 0$. Allora
$$d\omega = d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2 = 0$$
e quindi ω è chiusa. Se invece ω_1 è esatta, ovvero $\omega_1 = d\alpha$ per una qualche $(k-1)$-forma α allora
$$d(\alpha \wedge \omega_2) = d\alpha \wedge \omega_2 + (-1)^{k-1} \alpha \wedge d\omega_2 = d\alpha \wedge \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega\,,$$
e quindi ω è esatta.
Osserviamo che in generale non vale il viceversa di nessuna delle due affermazioni: se $\omega_2 = 0$ allora ω è nulla, ed in particolare è sia chiusa che esatta, a prescindere da ω_1.

3. Prese due funzioni $u, v \in X$ si ha
$$\begin{aligned} \langle Tu\,;\, v\rangle = \int_{-1}^{1} \dot u(-x)\, v(x)\, dx &= \int_{-1}^{1} \dot u(t)\, v(-t)\, dt \\ &= \Big| u(t)\, v(-t) \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(t)\, (v(-t))'\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} u(t)\, \dot v(-t)\, dt = \langle u\,;\, Tv\rangle \end{aligned}$$
e quinti T è autoaggiunto, ovvero $T^* = T$ (la seconda uguaglianza segue dal cambio di variabile $t = -x$; la terza dalla formula di integrazione per parti; la quarta dal fatto che $u(1) = v(1) = 0$).

4. Calcoliamo $\widehat{f}(y)$ tramite il metodo dei residui. Consideriamo la funzione olomorfa
$$f(z) := \frac{ze^{-iyz}}{4 + z^4}$$
e per ogni $r > 0$ indichiamo com D_r il semidisco in $\mathbb{C}$ dato dall'intersezione del disco aperto di centro 0 e raggio r con il semipiano aperto $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; quindi la frontiera di D_r è parametrizzata in senso antiorario dai cammini $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$ dove $\gamma_{1,r} : t \mapsto t$ con $t \in [-r, r]$ e $\gamma_{2,r} : t \mapsto re^{it}$ con $t \in [0, \pi]$. Allora
$$\widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz\,. \tag{3}$$
Inoltre, siccome i poli della funzione $f(z)$ contenuto in D_r per $r > \sqrt{2}$ sono $\pm 1 + i$, per il teorema dei residui si ha che
$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{1,r}} f(z)\, dz + \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\, dz &= 2\pi i \big[\operatorname{Res}(z, 1+i) + \operatorname{Res}(f, -1+i) \big] \\ &= 2\pi i \left[\frac{ze^{-iyz}}{4z^3}\Big|_{z=1+i} + \frac{ze^{-iyz}}{4z^3}\Big|_{z=-1+i} \right] \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{-iy(1+i)}}{4(1+i)^2} + \frac{e^{-iy(-1+i)}}{4(-1+i)^2} \right] \\ &= \frac{\pi}{4} e^y \big[e^{-iy} - e^{iy} \big] = -\frac{\pi i}{2} e^y \sin y\,. \end{aligned} \tag{4}$$

D'altra parte se $y \leq 0$ allora (come abbiamo visto a lezione) quando $r \to +\infty$ si ha che $|f(z)| = O(1/r^3)$ per tutti i punti z sulla curva $\gamma_{2,r}$ e quindi, avendo $\gamma_{2,r}$ lunghezza pari a πr, abbiamo che

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} f(z)\,dz = 0\,. \tag{5}$$

Mettendo insieme le formule (3), (4) e (5) otteniamo che

$$\widehat{f}(y) = -\frac{\pi i}{2} e^y \sin y \quad \text{per ogni } y \leq 0.$$

Infine usando il fatto che $\widehat{f}$ una funzione dispari (perché f è dispari) otteniamo

$$\widehat{f}(y) = -\frac{\pi i}{2} e^{-|y|} \sin y \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}.$$

5. Supponiamo che u sia continua su $[0,+\infty)\times[0,\pi]$, e derivabile con continuità una volta rispetto a t e due volte rispetto x su $(0,+\infty)\times[0,\pi]$. Per ogni $n = 1, 2, \dots$ ed ogni $t \geq 0$ indichiamo quindi con $a_n(t)$ i coefficienti della decomposizione di $u(t,\cdot)$ in seni, cioè

$$a_n(t) := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(t,x)\,\sin(nx)\,dx\,.$$

Abbiamo visto a lezione che i coefficienti di $u_t(t,\cdot)$ sono $\dot{a}_n(t)$ e quelli di $u_{xx}(t,\cdot)$ sono $-n^2\,a_n(t)$, e siccome u risolve l'equazione $u_t = u_{xx}$ allora la funzione a_n risolve l'equazione differenziale $\dot{y} = -n^2 y$, e pertanto si scrive come

$$a_n(t) = a_n^0 e^{-n^2 t}$$

dove a_n^0 è il coefficiente del dato iniziale u_0.

Osserviamo ora che per ogni $t \geq 0$ la serie $\sum a_n(t)\,\sin(nx)$ converge a $u(t,\cdot)$ nella norma di $L^1(0,\pi)$ (questo segue dal fatto che $u(t,\cdot)$ è continua, quindi appartiene a $L^2(0,\pi)$, quindi è il limite nella norma L^2 della sua serie in seni). Pertanto

$$\|u(t,\cdot)\|_1 \leq \sum_{n=1}^\infty \big\|a_n(t)\,\sin(nx)\big\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |a_n(t)|\,.$$

Usando il fatto che $a_n(t) = a_n^0 e^{-n^2 t}$ e che $|a_n^0| \leq m$ dove $m := \frac{2}{\pi}\|u_0\|_1$ si ottiene infine che

$$\|u(t,\cdot)\|_1 \leq m \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 t} \leq m \sum_{n=1}^\infty e^{-nt} = \frac{me^{-t}}{1-e^{-t}} = O(e^{-t})\,.$$

6. a) Cominciamo osservando che data una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ ed un intero n tale che $x^n f(x)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, allora la trasformata di Fourier di f appartiene a $C^1(\mathbb{R})$ e la sua derivata n-esima coincide con la trasformata di $(-ix)^n f(x)$. In particolare

$$\big[D^n \widehat{f}\,\big](0) = \mathscr{F}\big[(-ix)^n f(x)\big](0) = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,dx\,, \tag{6}$$

e quindi nel caso che ci interessa abbiamo che $\widehat{f}$ è di classe C^∞ e $\big[D^n \widehat{f}\,\big](0) = 0$ per ogni n.

A questo punto notiamo che, siccome f è una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ con supporto compatto, $\widehat{f}$ coincide con la restrizione a $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa definita su tutto $\mathbb{C}$ (questo è stato visto a lezione), e siccome ha tutte le derivate nulle in 0, deve essere identicamente nulla. Questo implica (per via il teorema di inversione) che $f = 0$ quasi ovunque.

b) La dimostrazione al punto a) suggerisce di prendere come f una funzione la cui trasformata abbia tutte le derivate nulle in 0 ma non sia analitica. Sia dunque $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari di classe C^∞ non identicamente nulla, con supporto compatto e tale che $D^n g(0) = 0$ per $n = 0, 1, \dots$, e sia

$$f := \widehat{g}$$

(si osservi che f è una funzione reale e pari non identicamente nulla perché g è reale, pari e non identicamente nulla).

Vogliamo innanzitutto mostrare che $x^n f(x)$ è sommabile per $n = 0, 1, \dots$ Per farlo usiamo due fatti visto a lezione:

(i) se $g \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione di classe C^n e $D^n g$ appartiene a L^1 allora la trasformata di Fourier di $D^n g$ coincide con $(iy)^n \widehat{g}(y)$;

(ii) se $g \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione di classe C^1 e $g' \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{g}$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$.
Mettendo insieme queste due affermazioni si ottiene che se $g \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione di classe C^{n+1} tale che $D^n g \in L^1(\mathbb{R})$ e $D^{n+1} g \in L^2(\mathbb{R})$ allora $(iy)^n \widehat{g}(y)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$. Da questo segue in particolare che per la funzione f definita sopra si ha $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni n.

A questo punto il fatto che $\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,dx = 0$ segue dalla formula (6) e dal fatto che la trasformata di Fourier di f coincide con $\frac{1}{2\pi} g$ (ricordo che g è pari e quindi $\widehat{f} = \widehat{\widehat{g}} = 2\pi g$).

7. a) L'insieme S è determinato dall'equazione $f(x,y) = 0$, dove $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x,y) := |x|^2 - |y|^2 ,$$

e quindi, essendo f una funzione di classe C^∞, S è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Inoltre all'interno dell'aperto $A := \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ l'equazione $f = 0$ è non degenere, nel senso che

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

è sempre diverso da zero (e quindi di rango massimo). Questo dimostra che $S \setminus \{(0,0)\}$ è una superficie senza bordo di classe C^∞.

b) Vogliamo far vedere che S_0 coincide con S. La proprietà chiave dietro questa identità è il fatto che S è un cono, cioè che dato $v \in S$ allora $tv \in S$ per ogni numero reale $t \geq 0$. Partiamo dall'inclusione $S \subset S_0$: dato $v \in S$, si ha che v appartiene a S_0 perché $v = \dot\gamma(0)$ dove $\gamma : [0, +\infty) \to S$ è il cammino dato da $\gamma(t) := vt$. Facciamo ora vedere che $S_0 \subset S$: dato $v := \dot\gamma(0)$ dove $\gamma : [0, \delta) \to S$ e $\gamma(0) = (0,0)$, si ha

$$v := \dot\gamma(0) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\gamma(t)}{t} ,$$

e siccome $\frac{1}{t}\gamma(t)$ appartiene ad S per ogni $t > 0$ (per la proprietà di cono) ed S è chiuso, ne segue che anche v appartiene ad S.

c) S non è una superficie di classe C^1 (né con né senza bordo). Infatti, se per assurdo S fosse una superficie senza bordo allora $S = S_0$ dovrebbe coincidere con lo spazio tangente ad S nel punto $(0,0)$, ed in particolare dovrebbe essere uno spazio vettoriale, mentre invece non lo è: dato infatti un qualunque vettore $x \in \mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$, si ha che sia (x,x) che $(x,-x)$ appartengono a S, mentre la loro somma $(2x, 0)$ non appartiene a S. Più in generale, se S fosse una superficie con bordo allora $S = S_0$ dovrebbe essere uno spazio vettoriale o un semispazio, ed anche in questo caso dovrebbe sempre essere chiuso rispetto alla somma, cosa che come abbiamo appena visto non è.

8. a) Come osservato a lezione, la funzione $g(\theta) := e^{in\theta}$, vista come funzione definita sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1, ammette almeno due estensioni armoniche a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: la funzione olomorfa z^n e la funzione antiolomorfa $\bar z^{-n}$. Ne segue che tutte le combinazioni affini di queste due funzioni sono estensioni armoniche di g, e vogliamo ora far vedere che una di queste vale 0 sulla circonferenza di centro 0 e raggio r, e quindi risolve il problema (2).

Preso dunque $\lambda \in \mathbb{R}$, poniamo

$$u(z) := \lambda z^n + (1-\lambda)\bar z^{-n} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

e osserviamo che per ogni numero complesso z di modulo r, vale a dire della forma $z = re^{i\theta}$, si ha

$$u(z) = \big[\lambda r^n + (1-\lambda) r^{-n}\big] e^{in\theta} .$$

Preso dunque λ tale che $\lambda r^n + (1-\lambda) r^{-n} = 0$, vale a dire $\lambda := 1/(1 - r^{2n})$, si ha che $u(z) = 0$.

Riassumendo, la soluzione del problema (2) per $g(\theta) := e^{in\theta}$ con $n > 0$ è

$$u_n(z) := \frac{1}{1-r^{2n}} z^n - \frac{r^{2n}}{1-r^{2n}} \bar z^{-n} = \frac{1}{1-r^{2n}} \big[z^n - (r^2/\bar z)^n\big] , \tag{7a}$$

quella per $g(\theta) := e^{-in\theta}$ con $n > 0$ è

$$u_n(z) := \frac{1}{1-r^{-2n}} z^{-n} - \frac{r^{-2n}}{1-r^{-2n}} \bar z^{n} = \frac{1}{1-r^{2n}} \big[\bar z^n - (r^2/z)^n\big] . \tag{7b}$$

Infine per $n = 0$ nessuna di queste formule ha senso, e cerchiamo la soluzione di (2) tra le combinazioni affini delle funzioni 1 e $1 + \log|z|$ (quest'ultima funzione è radiale, armonica in quanto parte reale della funzione olomorfa $1 + \log z$, e chiaramente vale 1 sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1); così facendo otteniamo come soluzione di (2) la funzione

$$u_0(z) := 1 - \frac{\log|z|}{\log r}\,. \tag{7c}$$

b) Scrivendo g come serie di Fourier, vale a dire $g(\theta) = \sum c_n e^{in\theta}$, ci si aspetta che la soluzione del problema (2) sia data dalla seguente combinazione lineare (infinita) delle funzioni u_n definite in (7):

$$u(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n(z)\,. \tag{8}$$

Supponiamo ora che i coefficienti di Fourier c_n della funzione g soddisfino la condizione

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < +\infty\,, \tag{9}$$

e vogliamo ora far vedere che sotto quest'ipotesi la funzione u data in (8) è be definita ed è effettivamente la soluzione di (2). Per farlo, riscriviamo u come

$$u(z) = c_0 u_0(z) + v_+(z) + v_+(r^2/\bar{z}) + v_-(\bar{z}) + v_-(r^2/z)$$

dove

$$v_+(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{1 - r^{2n}} z^n \quad \text{e} \quad v_-(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{1 - r^{2n}} z^n\,. \tag{10}$$

Usando l'ipotesi (9) otteniamo che le serie di funzioni in (10) convergono totalmente sul disco chiuso di centro 0 e raggio 1, e quindi v_+ e v_- sono funzioni continue su questo disco, da cui segue che u è una funzione continua sulla chiusura di Ω. Inoltre, siccome i coefficienti c_n sono limitati, le serie di potenze in (10) hanno raggio di convergenza pari a 1 o più, e quindi v_+ e v_- sono funzioni olomorfe sul disco aperto di centro 0 e raggio 1, da cui segue che u è una funzione armonica su Ω. Fatto questo è facile verificare che u vale 0 sulla circonferenza di centro 0 e raggio r e coincide con $g(\theta)$ sulla circonferenza di centro 0 e raggio 1.

COMMENTI

- Esercizio 2. La versione "originale" del punto b) richiedeva di discutere il viceversa delle implicazioni contenute nel punto a) sotto l'ipotesi che ω_2 non fosse nulla (ipotesi che per errore è stata dimenticata). Anche in questo caso il viceversa non vale: se $\omega_1 := x_2\,dx_1$ e $\omega_2 := dx_1$ allora ω_2 è chiusa e $\omega := \omega_1 \wedge \omega_2$ è nulla, ed in particolare è sia chiusa che esatta, anche se ω_1 non è né esatta né chiusa.

- Esercizio 3. Sorprendentemente, diversi dei presenti non hanno svolto correttamente l'integrazione per parti necessaria a risolvere l'esercizio.

- Esercizio 5. Come dovrebbe essere chiaro dalla soluzione proposta sopra, la stima $\|u(t,\cdot)\|_1 = O(e^{-t})$ vale per qualunque soluzione u dell'equazione del calore che soddisfi $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ per ogni t, a prescindere dal dato iniziale. Invece questa stima non vale se u risolve l'equazione del calore con altre condizioni al bordo (per esempio la condizione di periodicità).

- Esercizio 5. Molti dei presenti hanno discusso con cura l'esistenza della soluzione del problema proposto, mentre in realtà questa poteva essere data per scontata.

- Esercizio 6. Diamo qui una dimostrazione alternativa del punto a). Nel caso che f appartenga a $L^2(\mathbb{R})$ ci basta osservare che, preso $m > 0$ tale che il supporto di f è contenuto nell'intervallo $I := [-m, m]$, per ipotesi f è ortogonale in $L^2(I)$ alle funzioni x^n con con $n = 0, 1, \dots,$ e quindi è anche ortogonale alla chiusura dello span di queste funzioni. Detta X questa chiusura, abbiamo che X contiene i polinomi e quindi anche le funzioni continue su I (questo segue dal teorema di Weierstrass), e siccome queste sono dense in $L^2(I)$, X coincide con $L^2(I)$. Questo significa che f deve essere l'elemento nullo di $L^2(I)$, ovvero $f = 0$ quasi ovunque.

Nel caso in cui f non appartiene a L^2 la dimostrazione è più complicata. Consideriamo l'insieme X delle funzioni g in $L^\infty(I)$ tali che $\int_I f\,g\,dx = 0$. Usando il teorema di convergenza dominata possiamo mostrare che se g coincide quasi ovunque con il limite puntuale di una successione di funzioni equilimitate appartenenti a X, allora anche g appartiene a X. Quindi siccome X contiene i polinomi deve contenere anche le funzioni continue (per il teorema di Weierstrass) e quindi anche le funzioni in $L^\infty(I)$ (perché ogni funzione in $L^\infty(I)$ può essere ottenuta come limite puntuale (q.o.) di una successione di funzioni continue equilimitate—questo lo si può dimostrare, per esempio, usando il teorema di Lusin). In particolare X contiene la funzione g data da

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) \ge 0, \\ -1 & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$

e quindi

$$0 = \int_I f(x)\,g(x)\,dx = \int_I |f(x)|\,dx\,,$$

da cui segue che $f(x) = 0$ quasi ovunque.

- Esercizio 6. Alcuni dei presenti hanno risolto il punto a) con l'ipotesi aggiuntiva che f sia in $L^2(\mathbb{R})$, ma senza esplicitare chiaramente questa ipotesi né spiegare chiaramente dove e come viene usata (come invece sarebbe stato opportuno).

1. Posto $\omega_i := (-1)^{i-1} \bigwedge_{j\neq i} dx_j$ e $dx := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, si ha che
$$dx_i \wedge \omega_i = dx\,, \quad dx_j \wedge \omega_i = 0 \quad \text{per ogni } i,j = 1,\dots,n \text{ con } i \neq j.$$
Usando questo fatto otteniamo che
$$\begin{aligned} d\omega(x) = d\Big[\sum_{i=1}^n x_i f\,\omega_i\Big] &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i f)\, dx_j \wedge \omega_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i f)\, dx = \sum_{i=1}^n \big(f + 2x_i^2 f'\big)\, dx = \big(n\, f + 2|x|^2 f'\big)\, dx \end{aligned}$$
(in questa formula sia f che f' sono calcolate in $|x|^2$).

2. Se f è una funzione a valori reali allora
$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixy} dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, e^{-ixy} dx = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{ixy} dx} = \overline{\widehat{f}(-y)}\,.$$
Questa formula permette di ottenere tutta la trasformata di Fourier di f a partire dai valori sulla semiretta $[0,+\infty)$; per concludere basta ricordare che una funzione in $L^1(\mathbb{R})$ è univocamente determinata dalla sua trasformata di Fourier.

3. Per far vedere che K non è compatto basta esibire una successione di funzioni f_n in $L^p(0,1)$ tali che $\|f_n\|_p = 1$ per ogni n ma $f_n(x)$ tende a 0 per quasi ogni x. Da queste proprietà segue infatti che la successione (f_n) è contenuta in K e non ammette sottosuccessioni convergenti (dunque K non può essere compatto).

   Infatti, se per assurdo una sottosuccessione di (f_n) convergesse ad un qualche limite f in $L^p(0,1)$, allora potremmo trovare una sotto-sottosuccessione che converge ad f q.o. da cui seguirebbe che $f = 0$ q.o., e quindi $\|f\|_p = 0$, contraddicendo il fatto che la norma è una funzione continua.

   Come funzioni f_n basta prendere
$$f_n(x) := \begin{cases} n^{1/p} & \text{for } 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
per $n = 1, 2, \dots$ (quando $p = +\infty$ si pone $1/p = 0$, ovvero $n^{1/p} = 1$).

4. La funzione $|f(x)|^p$ è continua e asintoticamente equivalente a $|x|^{-p}$ per $x \to \pm\infty$, e dunque ha integrale finito se e solo se $p > 1$. In altre parole f appartiene a $L^p(\mathbb{R})$ se e solo se $p > 1$.

   In particolare f appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ ma non a $L^1(\mathbb{R})$. Per quanto visto a lezione, la trasformata di Fourier di una funzione f in $L^2(\mathbb{R})$ è ben definita, ed è data da
$$\widehat{f}(y) = \lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, e^{-iyx} dx \tag{2}$$
per quasi ogni $y \in \mathbb{R}$, ammesso che questo limite esista.

   Nel caso specifico possiamo calcolare questo limite usando il metodo dei residui. Al solito fissiamo $y \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione meromorfa
$$g(z) := \frac{ze^{-iyz}}{1+z^2}\,,$$
e per ogni $r > 0$ indichiamo com D_r il semidisco in $\mathbb{C}$ dato dall'intersezione del disco aperto di centro 0 e raggio r con il semipiano superiore $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. La frontiera di D_r è parametrizzata in senso antiorario dai cammini $\gamma_{1,r}$ e $\gamma_{2,r}$ dove $\gamma_{1,r} : t \mapsto t$ con $t \in [-r, r]$ e $\gamma_{2,r} : t \mapsto re^{it}$ con $t \in [0,\pi]$, e chiaramente
$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, e^{-iyx} dx = \lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{1,r}} g(z)\, dz\,. \tag{3}$$
Inoltre, siccome l'unico polo della funzione $f(z)$ contenuto in D_r per $r > 1$ è i, per il teorema dei residui si ha che
$$\int_{\gamma_{1,r}} g(z)\, dz + \int_{\gamma_{2,r}} g(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g,i) = 2\pi i\, \frac{ze^{-iyz}}{2z}\Big|_{z=i} = \pi i e^{y}\,. \tag{4}$$

Infine per $r > 2$ si ha

$$\Big| \int_{\gamma_{2,r}} g(z)\, dz \Big| \le \int_0^\pi \big| g(re^{it}) \big| \, \big| ire^{it} \big| dt \le \int_0^\pi \frac{re^{y \sin t}}{r^2-1} r\, dt = \frac{r^2}{r^2-1} \int_0^\pi e^{y \sin t}\, dt$$

e quando $y < 0$ l'ultimo integrale tende a 0 per $r \to +\infty$ per via del teorema di convergenza dominata. Dunque

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_{2,r}} g(z)\, dz = 0\,. \tag{5}$$

Mettendo insieme le formule dalla (2) alla (5) otteniamo quindi che

$$\widehat{f}(y) = \pi i e^y \quad \text{per q.o. } y < 0,$$

e usando il fatto che $\widehat{f}$ è dispari (perché f è dispari)

$$\widehat{f}(y) = -\pi i e^{-y} \quad \text{per q.o. } y > 0.$$

5. a) Osserviamo che S è il luogo di zeri della mappa $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x,y) := \big(|x|^2 - 4, |y|^2 - 4, |x-y|^2 - 9 \big)\,.$$

Siccome f è di classe C^∞, per dimostrare che S è una superfice di classe C^∞ di dimensione $2n-3$ ci basta verificare che la matrice $\nabla f(x,y)$ ha rango 3 per ogni $(x,y) \in S$. Si noti che

$$\nabla f(x,y) = 2 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ x-y & y-x \end{pmatrix}\,,$$

dove x e y sono visti come vettori riga. Eliminiamo ora il fattore 2, cambiamo di segno l'ultima riga di questa matrice, e sommiamogli sia la prima che la seconda riga: così facendo otteniamo una nuova matrice con lo stesso rango di $\nabla f(x,y)$, vale a dire

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \\ y & x \end{pmatrix}\,.$$

Siccome i vettori x e y sono entrambi diversi da zero quando $(x,y) \in S$, la prime due righe di quest'ultima matrice sono linearmente indipendenti; quindi la matrice (e dunque anche $\nabla f(x,y)$) ha rango inferiore a tre se e solo se la terza riga si scrive come combinazione lineare delle precedenti; e ricordando che $|x| = |y|$ questo si verifica se e solo se $x = \pm y$. Ma sia l'opzione $x = y$ che l'opzione $x = -y$ sono incompatibili con la condizione $|x-y| = 3$.

b) Le condizioni $|x| = |y| = 2$ e $|x-y| = 4$ sono verificate contemporaneamente se e solo $y = -x$. In altre parole S è il luogo di zeri della mappa $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \times\mathbb{R}^{n+1}$ data da

$$f(x,y) := \big(|x|^2 - 4, x + y \big)$$

e si verifica facilmente che il gradiente di questa mappa è una matrice di rango $1+n$ per ogni $(x,y) \in S$. Quindi S è una superfice regolare di dimensione $n-1$.

6. a) Per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(x')| &\le \int_{\mathbb{R}} \big| f(x-y)g(y) - f(x'-y)g(y) \big|\, dy \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x'-y)|\, |g(y)|\, dy \le c\|g\|_1 |x-x'|^\alpha\,. \end{aligned}$$

b) Prendiamo f e g come segue

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0, \\ \dfrac{1}{|\log x|} & \text{per } 0 < x \le 1/e, \\ \cdots & \text{per } x > 1/e, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0, \\ \dfrac{1}{x|\log x|^2} & \text{per } 0 < x \le 1/e, \\ \cdots & \text{per } x > 1/e. \end{cases}$$

Il modo in cui f e g sono definite per $x > 1/e$ non è rilevante nei calcoli che seguono; serve solo che f e g siano funzioni *positive* in $L^1(\mathbb{R})$ e che f sia continua.

Osserviamo ora che per ogni $x \in (0, 1/e)$ si ha

$$\begin{aligned} f * g(x) - f * g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \big[f(x-y) - f(-y) \big] \, dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{y|\log y|^2} \, \frac{1}{|\log(x-y)|} \, dy \\ &\geq \int_0^{x/2} \frac{1}{y|\log y|^2} \, \frac{1}{|\log(x/2)|} \, dy = \frac{1}{|\log(x/2)|^2} \end{aligned} \tag{6}$$

(nel secondo passaggio abbiamo usato il fatto che sia f che g sono nulle sulla semiretta negativa, nel terzo abbiamo usato il fatto che $1/|\log(x-y)| \geq 1/|\log(x/2)|$ per $y \leq x/2$). Ricordando che per ogni $\alpha > 0$

$$|\log x| \ll x^{-\alpha/2} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

dalla (6) otteniamo che $|f * g(x) - f * g(0)| \gg |x - 0|^\alpha$ per $x \to 0^+$ e quindi $f * g$ non è α-Hölderiana.

7. Sia $u : [0, +\infty) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che risolve (1). Procedendo come visto a lezione, scriviamo u in serie di seni nella variabile x, vale a dire

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \, \sin(nx) \, .$$

Al solito, si ottiene che il coefficiente a_n è una funzione di classe C^2 su $[0, +\infty)$ che risolve l'equazione differenziale

$$\begin{cases} \ddot{y} + n^2 y = 0 & \text{per } n > 1, \\ \ddot{y} + y = g(t) & \text{per } n = 1, \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. In particolare $a_n(t) = 0$ per ogni $n > 1$.

a) Se $g(t) = 1$ si ottiene che $a_1(t) = 1 - \cos t$, e quindi

$$u(t, x) = (1 - \cos t) \, \sin x$$

(che questa sia effettivamente una soluzione è immediato).

b) Se $g(t) = \cos t$ si ottiene che $a_1(t) = \frac{1}{2} t \sin t$, e quindi

$$u(t, x) = \frac{t}{2} \sin t \, \sin x \, ,$$

e questa soluzione è chiaramente illimitata.

8. a) Per quanto visto a lezione u coincide con la parte reale di una funzione olomorfa v definita su tutto $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, e quindi $u \circ \varphi$ è la parte reale di $v \circ \varphi$, che è olomorfa in quanto composizione di funzioni olomorfe; dunque anche $u \circ \varphi$ è armonica.

b) Indichiamo con φ_i le componenti di φ. Prendendo la funzione armonica $u(x) := x_i$ otteniamo che $\varphi_i = u \circ \varphi$ è armonica per $i = 1, 2$, e quindi anche φ è armonica. Calcoliamo ora il laplaciano di $\tilde{u} := u \circ \varphi$, cominciando con il calcolo delle derivate parziali di $\tilde{u}$ (nelle formule seguenti si sottintende che u e le sue derivate sono composte con φ):

$$\begin{aligned} \partial_i \tilde{u} &= \sum_j \partial_j u \, \partial_i \varphi_j \\ \partial_i^2 \tilde{u} &= \sum_{j,k} \partial_j \partial_k u \, \partial_i \varphi_k \, \partial_i \varphi_j + \sum_j \partial_j u \, \partial_i^2 \varphi_j \\ &= 2 \partial_1 \partial_2 u \, \partial_i \varphi_1 \, \partial_i \varphi_2 + \sum_j \partial_j^2 u \, (\partial_i \varphi_j)^2 + \sum_j \partial_j u \, \partial_i^2 \varphi_j \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo spezzato la somma su tutte le coppie di indici j, k come la somma sulle copie con $j = k$ e quella sulle coppie con $j \neq k$). Sommando l'ultima formula su $i = 1, 2$ e ricordando che $\Delta \varphi_i = 0$ otteniamo infine:

$$\Delta \tilde{u} = 2 \partial_1 \partial_2 u \, \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 + \sum_j \partial_j^2 u \, |\nabla \varphi_j|^2 \, . \tag{7}$$

Prendendo la funzione armonica $u(x) := x_1x_2$ la (7) diventa $0 = \Delta\tilde{u} = 2\,\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2$, da cui segue che

$$\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 = 0\,, \tag{8}$$

mentre prendendo $u(x) := x_1^2 - x_2^2$ la (7) diventa $0 = \Delta\tilde{u} = 2(|\nabla\varphi_1|^2 - |\nabla\varphi_2|^2)$, da cui segue che

$$|\nabla\varphi_1| = |\nabla\varphi_2|\,. \tag{9}$$

Le equazioni (8) e (9) implicano immediatamente che in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ il gradiente di φ deve essere una matrice di uno dei seguenti due tipi:

$$\text{(I): } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}; \quad \text{(II): } \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Si possono ora verificare tre casi:
(i) $\nabla\varphi(x) = 0$ per ogni x;
(ii) esiste x_0 tale che $\nabla\varphi(x_0)$ è diversa da zero ed è di tipo (I);
(iii) esiste x_0 tale che $\nabla\varphi(x_0)$ è diversa da zero ed è di tipo (II);

Se vale (i) allora φ è costante, e quindi è sia olomorfa che antiolomorfa. Facciamo ora vedere che se vale (ii) allora φ è olomorfa (in modo analogo si dimostra che se vale (iii) allora φ è antiolomorfa).

Il punto chiave è dimostrare che $\nabla\varphi(x)$ è una matrice di tipo (I) per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ (e non solo per $x = x_0$), infatti questo equivale a dire che φ soddisfa il sistema di Cauchy-Riemann su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è quindi una funzione olomorfa.

La dimostrazione del fatto che $\nabla\varphi(x)$ è di tipo (I) per ogni x è divisa in tre passi.

Passo 1: per $i = 1, 2$ la funzione φ_i è armonica e quindi coincide con la parte reale di una funzione olomorfa f_i. Di conseguenza $\nabla\varphi_i = f_i'$, ed è immediato verificare che $\nabla\varphi(x)$ è una matrice di tipo (I) se e solo se $f_2'(x) - i f_1'(x) = 0$.

Passo 2: siccome $\nabla\varphi(x_0)$ è di tipo (I) e diversa da zero, allora ha determinante strettamente positivo, e per continuità $\nabla\varphi(x)$ ha determinante strettamente positivo per ogni x in un intorno U di x_0. Questo implica (cfr. (10)) che $\nabla\varphi(x)$ è di tipo (I) per ogni $x \in U$, e di conseguenza $f_2'(x) - i f_1'(x) = 0$.

Passo 3: siccome la funzione olomorfa $f_2' - i f_1'$ è nulla su U, per il principio del prolungamento analitico è nulla anche su tutto $\mathbb{R}^2$, e quindi $\nabla\varphi(x)$ è una matrice di tipo (I) per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

COMMENTI

- Gli esercizi 6b) e 7b) dati sopra non coincidono con quelli dati all'esame. Nella versione originale la prima di queste domande era troppo difficile e la seconda era semplicemente sbagliata; siccome queste soluzioni servono soprattutto a chi deve ancora fare l'esame per prepararsi, ho deciso di sostituire queste domande "errate" con versioni più ragionevoli.

- Esercizio 4. Alternativamente si può calcolare la trasformata di $f(x) = x/(1 + x^2)$ partendo dal fatto (noto) che la trasformata della funzione $1/(1 + x^2)$ è $\pi e^{-|y|}$ e applicando la formula

$$\mathscr{F}(-ix\,g(x)) = (\mathscr{F}g)'\,.$$

Si noti tuttavia questa formula è stata dimostrata solo per funzioni g in $L^1(\mathbb{R})$ tali che $x\,g(x)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R})$, mentre per questo esercizio ci servirebbe il caso in cui $x\,g(x)$ appartiene a $L^2(\mathbb{R})$.

- Esercizio 6b). La funzione f proposta sopra è stata costruita partendo dal fatto (noto?) che la funzione $1/\log x$ non è α-Hölderiana per alcun $\alpha > 0$. La funzione g è stata invece scelta per tentativi.

- Esercizio 6b). La versione originale di questo esercizio chiedeva di trovare una funzione f continua in $L^1(\mathbb{R})$ tale che $f * f$ non è α-Hölderiana per alcun $\alpha > 0$. Tali funzioni esistono, ma non ne conosco esempi elementari.

- Esercizio 7b). La versione originale di questo esercizio chiedeva di trovare $g(t)$ limitata tale che la soluzione $u(t,x)$ esplode esponenzialmente per $t \to +\infty$. Ma non esiste alcuna funzione g con questa proprietà.

- Esercizio 8b). Le matrici M in (10) sono le cosiddette matrici *conformi*, cioè quelle che conservano gli angoli tra vettori, ovvero
$$\frac{Mv}{|Mv|} \cdot \frac{Mv'}{|Mv'|} = \frac{v}{|v|} \cdot \frac{v'}{|v'|} \quad \text{per ogni } v, v' \neq 0.$$
La funzioni olomorfe e antiolomorfe sono le uniche trasformazioni conformi del piano in sé, vale a dire le uniche mappe di classe C^1 il cui gradiente è una matrice conforme in ogni punto.

1. L'n-esimo coefficiente di Fourier complesso di f è dato da

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi(e^{\pi}-e^{-\pi})}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} + e^{-(1+in)x}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi(e^{\pi}-e^{-\pi})}\left|\frac{e^{(1-in)x}}{1-in} - \frac{e^{-(1+in)x}}{1+in}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}\,. \end{aligned}$$

2. Consideriamo una funzione radiale su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, cioè una funzione della forma $f(|x|)$; usando il fatto che $\nabla|x| = x/|x|$ otteniamo

$$d(f(|x|)) = \sum_{i=1}^{n} f'(|x|)\,\frac{\partial|x|}{\partial x_i}\, dx_i = \frac{f'(|x|)}{|x|}\sum_{i=1}^{n} x_i\, dx_i$$

e pertanto $d(f(|x|)) = \omega(x)$ se $f'(t)/t = e^t$ per ogni $t > 0$, ovvero se $f(t) = (t-1)e^t + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Dunque una primitiva di ω è la funzione

$$(|x|-1)\, e^{|x|}\,.$$

3. Sia X l'insieme dei polinomi di secondo grado, visto come sottospazio di $L^2(-1,1)$ e sia f l'elemento di $L^2(-1,1)$ dato da $f(x) := x^3$. Come visto a lezione, l'elemento p di X che rende minima la norma di $f-p$ corrisponde alla proiezione di f su X, ed è univocamente determinato dal fatto che $f-p$ è ortogonale a X, ovvero alle funzioni 1, x, e x^2. Scrivendo p nella forma $p(x) = a + bx + cx^2$ ed imponendo queste tre condizioni di ortogonalità otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = \langle f(x)-p(x)\,;\, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 - a - bx - cx^2\, dx \\ 0 = \langle f(x)-p(x)\,;\, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^4 - ax - bx^2 - cx^3\, dx \\ 0 = \langle f(x)-p(x)\,;\, x^2\rangle = \int_{-1}^{1} x^5 - ax^2 - bx^3 - cx^4\, dx \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 0 = -2a - \frac{2}{3}c \\ 0 = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}b \\ 0 = -\frac{2}{3}a - \frac{2}{5}c \end{cases}$$

e quindi $a = c = 0$ e $b = \frac{3}{5}$. Pertanto il polinomio cercato è $p(x) = \frac{3}{5}x$.

4. L'area del grafico di f è data dall'integrale $\int_D \sqrt{1+|\nabla f(x)|^2}\, dx$. Osserviamo ora che

$$\nabla f(x) = -\alpha|x|^{-\alpha-2}x\, g(x) + |x|^{-\alpha}\,\nabla g(x)$$

e dunque

$$\sqrt{1+|\nabla f(x)|^2} \sim |\nabla f(x)| \sim \alpha|x|^{-\alpha-1}|g(0)| \quad \text{per } x \to 0.$$

Pertanto l'area del grafico di f è finita se e solo se è finito integrale $\int_D |x|^{-\alpha-1}\, dx$. Ma come visto a lezione

$$\int_D |x|^{-\alpha-1}\, dx = c_n \int_0^1 \rho^{n-\alpha-2}\, d\rho$$

dove c_n è il volume $(n-1)$-dimensionale della sfera S^{n-1}, e dunque il grafico di f ha area finita se e solo se $n-\alpha-2 > -1$ cioè $\alpha < n-1$.

5. a) L'n-esimo coefficiente di Fourier complesso di $f * g$ è

$$\begin{aligned} c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, e^{-inx}\, dy\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{-in(x-y)}\, dx\right] g(y)\, e^{-iny}\, dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} c_n(f)\, g(y)\, e^{-iny}\, dy = 2\pi\, c_n(f)\, c_n(g)\,, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo usato il teorema di Fubini, cosa che è legittima perché sia f che g appartengono a L^1_{per} (ometto la verifica dettagliata), e nel terzo passaggio abbiamo usato il fatto che l'integrale di una funzione di periodo 2π sull'intervallo $[-\pi,\pi]$ coincide con quello di ogni sua traslazione.

b) Indichiamo con c_n i coefficienti di Fourier di f. Dando per buono che il prodotto $f * f$ sia be definito ed appartenga a $L^1_{\rm per}$ otteniamo che $f * f = f$ se e solo se i coefficienti di Fourier di $f * f$ e f coincidono, e per quanto visto al punto a) questo significa che $2\pi c_n^2 = c_n$, ovvero

$$c_n = 0 \text{ oppure } c_n = \frac{1}{2\pi} \text{ per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Siccome c_n tende a 0 per $n \to \pm\infty$ per ogni funzione in $L^1_{\rm per}$, ne segue che $c_n = 0$ tranne che per un numero finito di indici; in altre parole f è necessariamente della forma

$$f = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in I} e^{inx}$$

con I sottoinsieme finito di $\mathbb{Z}$.

6. a) Utilizzando il cambio di variabile $u_1 := t_1 + t_2$ e $u_2 := t_1 - t_2$ otteniamo che S è l'immagine della mappa $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ data da

$$\Psi(u_1, u_2) := \big(\cos u_1, \sin u_1, \cos u_2, \sin u_2\big)\,.$$

In particolare, essendo Ψ periodica di periodo 2π in entrambe le variabili, $S = \Psi([0, 2\pi]^2)$ e dunque l'insieme S è compatto e connesso in quanto immagine continua di un insieme compatto e connesso.

Osserviamo ora che Ψ è di classe C^∞ e

$$\nabla\Psi(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} -\sin u_1 & 0 \\ \cos u_1 & 0 \\ 0 & -\sin u_2 \\ 0 & -\cos u_2 \end{pmatrix}$$

è chiaramente una matrice di rango 2 in ogni punto; in particolare Ψ è localmente iniettiva. Per quanto visto a lezione, per dimostrare che S è una superficie senza bordo di classe C^∞ basta far vedere che Ψ è aperta come mappa da $\mathbb{R}^2$ in S (in tal caso infatti le restrizioni di Ψ agli aperti su cui è iniettiva saranno le parametrizzazioni di S). Dato A aperto in $\mathbb{R}^2$, se per assurdo $\Psi(A)$ non fosse aperto in S esisterebbero $u \in A$ e una successione di punti $x_n \in S \setminus \Psi(A)$ che convergono a $x := \Psi(u)$; in particolare per ogni scelta di $u_n \in \Psi^{-1}(x_n)$ si ha che u_n non appartiene ad A e quindi non converga ad u nemmeno passando a sottosuccessione.

Dunque per dimostrare che Ψ è aperta basta far vedere che per ogni successione di punti $x_n \in S$ che convergono a $x = \Psi(u) \in S$ esistono $u_n \in \Psi^{-1}(x_n)$ che convergono a meno di sottosuccessione a u. Usando la periodicità di Ψ possiamo prendere $u_n \in \Psi^{-1}(x_n)$ in modo tale che $u_n \in u + [-\pi, \pi]^2$ per ogni n. Per compattezza i punti u_n convergono a meno di sottosuccessione ad un qualche $\bar u \in u + [-\pi, \pi]^2$ e si vede facilmente che allora $\bar u$ deve coincidere con u.

Infine un'orientazione di S è quella indotta dalla parametrizzazione Ψ e dall'orientazione canonica di $\mathbb{R}^2$, vale a dire che l'orientazione assegnata allo spazio tangente $\mathrm{Tan}(S, x)$ con $x = \Psi(u)$ è

$$[d\Psi(u)\, e_1,\ d\Psi(u)\, te_2]$$

dove e_1, e_2 è la base canonica di $\mathbb{R}^2$. Si noti che questa definizione è ben posta perché $d\Psi(u)$ non dipende dalla scelta di $u \in \Psi^{-1}(x)$, ed è chiaro che soddisfa le ipotesi di continuità necessarie ad essere un'orientazione di S.

b) Osserviamo che Ψ mappa in modo biunivoco $D := [0, 2\pi)^2$ su S, e quindi l'area di S è data da

$$\sigma_2(S) = \int_D J(u)\, du$$

dove J è il determinante Jacobiano di Ψ, vale a dire che

$$J^2 = \det\big((\nabla\Psi)^t\, \nabla\Psi\big) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\,;$$

dunque $\sigma_2(S) = (2\pi)^2$.

c) Scegliamo come orientazione di S quella indotta dalla parametrizzazione Ψ. Allora

$$\begin{aligned}\int_S \omega = \int_D \Psi^{\#}\omega &= \int_D \sin u_1 \, \sin u_2 \, d(\cos u_1) \wedge d(\cos u_2) \\ &= \int_D \sin^2 u_1 \sin^2 u_2 \, du_1 du_2 = \Big[\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt \Big]^2 = \pi^2 \, .\end{aligned}$$

7. Sia u una funzione che soddisfa quanto richiesto e scriviamola in serie di seni nella variabile y, vale a dire

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \, \sin(ny) \, .$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione $u(x,\cdot)$ è di classe C^2 su $[0,\pi]$ e soddisfa $u(0) = u(\pi) = 0$, e quindi, per quanto visto a lezione, i coefficienti di Fourier della derivata seconda $u_{yy}(x,\cdot)$ sono $-n^2 a_n(x)$. D'altra parte, sempre come visto a lezione, per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale i coefficienti di $u_{xx}(x,\cdot)$ sono $\ddot{a}_n(x)$.

A questo punto la condizione $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ implica che i coefficienti di $u_{xx}(x,\cdot)$ sommati a quelli di $u_{yy}(x,\cdot)$ danno zero, ovvero

$$\ddot{a}_n(x) - n^2 a_n(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e } n = 1, 2, \dots$$

Pertanto la funzione a_n risolve l'equazione differenziale $\ddot{u} - n^2 u = 0$, e dunque è della forma

$$a_n(x) = \alpha_n e^{nx} + \beta_n e^{-nx} \quad \text{con } \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Inoltre per ogni n si ha

$$\begin{aligned}\big|\alpha_n e^{nx} + \beta_n e^{-nx}\big| = |a_n(x)| &\le \Big(\sum_m |a_m(x)|^2 \Big)^{1/2} \\ &= \sqrt{\pi/2} \, \big\| u(x,\cdot) \big\|_2 = O\big(e^{|x|}\big) \quad \text{per } x \to \pm\infty,\end{aligned}$$

e questo implica che $\alpha_n = \beta_n = 0$ per ogni $n > 1$. Dunque u è della forma

$$u(x,y) = (\alpha_1 e^x + \beta_1 e^{-x}) \sin y \quad \text{con } \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}.$$

Per concludere dovremmo verificare che effettivamente le funzioni di questa forma soddisfano quanto richiesto nel testo dell'esercizio, ma questo è immediato.

8. a) Vogliamo dimostrare che $[v_1(x), \dots, v_d(x)]$ è un'orientazione di S. Questo significa che per una qualche famiglia di parametrizzazioni $g : A \to S \cap U$ di classe C^1 tale che gli aperti U ricoprono S, si ha che i vettori

$$\tilde{v}_i(t) := [dg(t)]^{-1} v_i(g(t)) \quad \text{con } i = 1, \dots, d$$

determinano un'orientazione di $\mathbb{R}^d$ che non dipende da t.

Per quanto visto a lezione possiamo supporre che per ciascuna di queste parametrizzazioni esista A' aperto di $\mathbb{R}^{n-d}$ e $G : A \times A' \to U$ parametrizzazione di classe C^1 tale che $G(t,0) = g(t)$ per ogni $t \in A$. Indichiamo con $F : U \to A \times A'$ l'inversa di G; allora per ogni $i = 1, \dots, d$ si ha

$$(\tilde{v}_i(t), 0) = \nabla F(x) \, v_i(x) \quad \text{con } x := g(t),$$

e siccome le mappe $t \mapsto g(t)$, $x \mapsto \nabla F(x)$ e $x \mapsto v_i(x)$ sono continue, la formula precedente implica che anche le mappe $t \mapsto \tilde{v}_i(t)$ sono continue; in particolare l'orientazione $[\tilde{v}_1(t), \cdots, \tilde{v}_d(t)]$ è continua in t, e dunque è costante.

b) Per ogni $x \in S$ possiamo prendere dei vettori $v_1(x), \dots, v_d(x) \in \operatorname{Tan}(S,x)$ in modo tale che aggiungendoli ai vettori già assegnati $v_{d+1}(x), \dots, v_n(x)$ si ottiene una base di $\mathbb{R}^n$ con l'orientazione canonica, vale a dire che il determinante della matrice $V(x)$ formata dai vettori colonna $v_1(x), \dots, v_n(x)$ ha segno sempre positivo.

Vogliamo dimostrare che $[v_1(x), \dots, v_d(x)]$ è un'orientazione di S, ovvero che i vettori $\tilde{v}_1(t), \dots, \tilde{v}_d(t)$ definiti come al punto precedente determinano un'orientazione di $\mathbb{R}^d$ che non dipende da t, cioè che la matrice da essi formata ha determinante di segno costante.

La difficoltà sta nel fatto che i nuovi vettori $v_1(x), \dots, v_d(x)$ non possono sempre essere scelti in modo continuo in x.

Prendendo F come al punto precedente, per ogni $i = 1, \dots, n$ e $t \in A$ poniamo

$$w_i(t) := \nabla F(x)\, v_i(x) \quad \text{con } x := g(t),$$

e indichiamo con $W(t)$ la matrice data dai vettori colonna $w_i(t)$; poiché $W(t) = \nabla F(x)\, V(x)$, si ha

$$\det W(t) = \det \nabla F(x)\, \det V(x)\,.$$

Inoltre $w_i(t) = (\tilde{v}_i(t), 0)$ per $i = 1, \dots, d$, il che significa che $W(t)$ è una matrice della forma

$$W(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & C(t) \end{pmatrix}$$

dove $A(t)$ è la matrice $d \times d$ formata dai vettori colonna $\tilde{v}_i(t)$ con $i = 1, \dots, d$. Quindi

$$\det A(t)\, \det C(t) = \det W(t) = \det \nabla F(x)\, \det V(x)\,.$$

Ricordo che lo scopo è dimostrare che $\det A(t)$ ha segno costante, e per farlo ci basta far vedere che i determinanti delle matrici $C(t)$, $\nabla F(x)$ e $V(x)$ hanno segno costante. In effetti

(i) $\det V(x)$ ha segno costante (positivo) per costruzione;

(ii) $\det \nabla F(x)$ ha segno costante perché non si annulla mai ed è continuo in x (perché la matrice $\nabla F(x)$ è continua in x);

(iii) $\det C(t)$ ha segno costante perché non si annulla mai e la matrice $C(t)$ è un minore $(n-d)\times(n-d)$ della matrice formata dai vettori colonna $w_i(t)$ con $i = d+1, \dots, n$, ed è quindi continua in t perché questi vettori sono continui in t (quest'ultima affermazione la si dimostra procedendo come al punto a)).

c) Basta applicare il punto b) prendendo come base di $\mathrm{Tan}^\perp(S, x)$ i vettori riga della matrice $\nabla f(x)$, che sono chiaramente continui in x.

COMMENTI

- Esercizio 3. Un modo alternativo per trovare la proiezione p è calcolare i coefficienti di f rispetto ad una base ortonormale di X. Per trovare questa base applichiamo il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai vettori x, 1, x^2 in quest'ordine, e osserviamo che x è ortogonale sia a 1 che x^2 (perché x è una funzione dispari mentre 1 e x^2 sono pari) e quindi la base ottenuta alla fine sarà della forma $c_1 x$, c_2, $c_3 + c_4 x^2$. Ora, siccome $f(x)$ è una funzione dispari ha componenti nulla secondo gli ultimi due elementi della base, che sono funzioni pari, e quindi per calcolare p basta trovare c_1 e il prodotto scalare di f con $c_1 x$. Siccome $\|c_1 x\|_2 = 1$ allora $c_1 = \sqrt{3/2}$ e quindi

$$p(x) = \langle x^3\,;\, \sqrt{3/2}\,x \rangle\, \sqrt{3/2}\,x = \left[\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4\,dx\right] x = \frac{3}{5}x\,.$$

- Esercizio 6a). In alternativa si può osservare che $S = S^1 \times S^1$ dove $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ è l'immagine del cammino $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, vale a dire la circonferenza di centro 0 e raggio 1. Siccome è noto che S^1 è una curva senza bordo di classe C^∞ connessa, compatta ed orientabile, per concludere basta osservare che il prodotto di superfici senza bordo di classe C^∞ connesse, compatte ed orientabili è anch'esso una superficie senza bordo di classe C^∞ connessa, compatta ed orientabile (l'orientabilità richiede del prodotto richiede comunque una dimostrazione).

- Esercizio 6b). Anche l'area di S può essere calcolata usando il fatto che $S = S^1 \times S^1$ e che il volume prodotto di due superfici è dato dal prodotto dei volumi (riferiti ovviamente alle dimensioni corrispondenti). Quest'ultimo fatto richiede però una dimostrazione.

1. Scriviamo p come $p(x) = ax^2 + bx + c$. Tenuto conto che la trasformata di Fourier di $e^{-x^2/2}$ è $\sqrt{2\pi}\, e^{-y^2/2}$ e ricordando la regola $\mathscr{F}[-ix\, g(x)] = \widehat{g}'$ otteniamo che
$$\begin{aligned}\widehat{f} = \mathscr{F}\big[p(x)\, e^{-x^2/2}\big] &= \mathscr{F}\big[\big(- a(-ix)^2 + ib(-ix) + c\big)\, e^{-x^2/2}\big] \\ &= \sqrt{2\pi}\big[- a(e^{-y^2/2})'' + ib(e^{-y^2/2})' + ce^{-y^2/2}\big] \\ &= \sqrt{2\pi}\big[- ay^2 - iby + a + c\big]\, e^{-y^2/2}\end{aligned}$$
e quindi l'equazione $\widehat{f} = -\sqrt{2\pi}\, f$ si riduce al sistema
$$\begin{cases} -a = -a \\ -ib = -b \\ a + c = -c \end{cases}$$
cioè $b = 0$ e $a = -2c$; quindi i polinomi cercati sono della forma $p(x) = c(1 - 2x^2)$ con $c \in \mathbb{R}$.

2. Sia S la frontiera del quadrato $[0, 1]^2$. Allora l'origine 0 appartiene a S, e detto T l'insieme dei vettori della forma $\dot\gamma(0)$ con $\gamma : [0, \delta) \to S$ cammino di classe C^1 tale che $\gamma(0) = 0$, si vede facilmente che T contiene i vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Ne segue che T non è né una retta né una semiretta, e dunque S non può essere una curva né con bordo né senza.

3. Per ogni $u, v \in X$ si ha
$$\langle Tu\,;\, v\rangle = -\int_0^1 \ddot u\, v\, dx = \big[\dot u(0)\, v(0) - \dot u(1)\, v(1)\big] + \int_0^1 \dot u\, \dot v\, dx$$
(nel secondo passaggio abbiamo integrato per parti) e quindi T è autoaggiunto, vale a dire che $\langle Tu\,;\, v\rangle = \langle Tu\,;\, v\rangle$, se e solo se
$$\dot u(0)\, v(0) - \dot u(1)\, v(1) = \dot v(0)\, u(0) - \dot v(1)\, u(1)\,.$$
Usando la condizione (1) quest'ultima equazione si riscrive come
$$(1 - ad + bc)\,\big(\dot u(0)\, v(0) - \dot v(0)\, u(0)\big) = 0 \tag{3}$$
e quindi T è autoaggiunto se e solo se la condizione (3) vale per ogni $u, v \in X$. Ovviamente questo succede quando
$$ad - bc = 1\,,$$
e prendendo $u, v \in X$ in modo tale che $u(0) = 0$, $\dot u(0) = 1$ e $v(0) = 1$ (si noti che lo si può effettivamente fare) otteniamo che questa condizione oltre che sufficiente è anche necessaria.

4. Otteniamo $d\omega$ e $g^\#\omega$ tramite un calcolo diretto:
$$\begin{aligned} d\omega &= x_1\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_3\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4\,, \\ g^\#\omega &= t_1^2 t_2^2\, d(t_1^2) \wedge d(t_1 t_2) - (t_1 t_2)^2\, d(-t_1 t_2) \wedge d(t_2^2) \\ &= t_1^2 t_2^2\, \big[2t_1\, dt_1 \wedge (t_2\, dt_1 + t_1\, dt_2) + (t_2\, dt_1 + t_1\, dt_2) \wedge 2t_2\, dt_2 \\ &= 2t_1^2 t_2^2\, (t_1^2 + t_2^2)\, dt_1 \wedge dt_2\,.\end{aligned}$$
Infine $g^\#(d\omega) = 0$ perché tutte le 3-forme su $\mathbb{R}^2$ sono nulle.

5. a) Dobbiamo far vedere che data una successione di funzioni f_n in $L^2(0, 1)$ che convergono in norma a f e tali che $|f_n| \le 1$ q.o., allora anche f verifica $|f| \le 1$ q.o.

   Innanzitutto possiamo scegliere per ciascuna f_n un rappresentante che soddisfa $|f_n| \le 1$ ovunque, inoltre passando a sottosuccessione possiamo supporre che f_n converga ad f quasi ovunque, cioè al di fuori di un insieme di misura nulla N. Ne segue che $|f| \le 1$ fuori da N, cioè quasi ovunque.

   b) La proiezione $P(g)$ di g su K è data da
$$[P(g)](x) = \begin{cases} 1 & \text{se } g(x) > 1, \\ g(x) & \text{se } 1 \ge g(x) \ge -1, \\ -1 & \text{se } g(x) < -1. \end{cases}$$

Per dimostrarlo basta verificare che per ogni $f \in K$ si ha $\langle g - P(g)\,;\, f - P(g)\rangle \leq 0$. In effetti, detti E^+ ed E^- gli insiemi dove $g(x) > 1$ e $g(x) < -1$ rispettivamente, partendo dalla definizione di $P(g)$ si ha che

$$\langle g - P(g)\,;\, f - P(g)\rangle = \int_{E^+} (g-1)(f-g)\,dx + \int_{E^-} (g+1)(f-g)\,dx \leq 0$$

dove la disuguaglianza segue dal fatto che su E^+ si ha $g > 1 \geq f$ mentre su E^- si ha $g < -1 \leq f$, e dunque entrambi gli integrandi sono negativi.

6. Calcoliamo la derivata rispetto a t di $\|u(t,\dot{c})\|_p^p$ e mostriamo che è negativa o nulla; nei conti che seguono $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la funzione data da $\phi(s) := |s|^p$, u_t è la derivata parziale di $u = u(t,x)$ rispetto a t, e ∇u e Δu sono rispettivamente il gradiente ed il laplaciano di u rispetto alla variabile x:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big\|u(t,\cdot)\big\|_p^p = \int_D \frac{d}{dt}\phi(u)\,dx &= \int_D \phi'(u)\,u_t\,dx \\ &= \int_D \phi'(u)\,\mathrm{div}(\nabla u)\,dx \\ &= -\int_D \nabla\big(\phi'(u)\big)\cdot\nabla u\,dx = -\int_D \phi''(u)\,|\nabla u|^2\,dx \leq 0\,. \end{aligned}$$

Commentiamo quanto appena scritto: nel primo passaggio abbiamo usato la formula di derivazione sotto il segno di integrale (congiuntamente al fatto che u e ϕ sono di classe C^1 e che D è compatto); nel terzo abbiamo usato il fatto che $u_t = \Delta u = \mathrm{div}(\nabla u)$; nel quarto abbiamo usato il teorema della divergenza nella forma

$$\int_{\partial D} f\,G = \int_D \mathrm{div}(f\,G) = \int_D \nabla f\cdot G + \int_D f\ \mathrm{div}\,G$$

con $f := \phi'(u)$ e $G := \nabla u$, più il fatto che $\phi(u) = |u|^p = 0$ quando $x \in \partial D$; nel quinto abbiamo usato il fatto e che $\nabla(\phi'(u)) = \phi''(u)\,\nabla u$ (per questo serve che ϕ sia di classe C^2, cosa che è vera per $p \geq 2$); infine nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $\phi''(s) = p(p-1)\,|s|^{p-2}$ è una funzione positiva.

7. Sia $u : [0,+\infty) \times \mathbb{C}$ una soluzione di (2) continua e di classe C^2 per $t > 0$. Scriviamo u in serie di Fourier complessa nella variabile x, vale a dire

$$u(t,x) = \sum_{n=\infty}^{+\infty} c_n(t)\,e^{inx}\,;$$

come visto a lezione, il coefficiente di Fourier $c_n : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ è una funzione continua e C^1 per $t > 0$ che soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = (2-n^2)y \\ y(0) = c_n^0 \end{cases}$$

dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier di u_0. Pertanto lo sviluppo in serie di Fourier di u è

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^0\,e^{(2-n^2)t+inx}\,. \tag{4}$$

Inoltre, per quanto visto a lezione, se u_0 è di classe C^1 i coefficienti c_n^0 sono sommabili in valore assoluto e la formula (4) definisce effettivamente una soluzione della (2).

a) In particolare se $u_0(x) = 2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$ allora $c_1^0 = c_{-1}^0 = 1$ e $c_n^0 = 0$ per $n \neq \pm 1$. Da questo segue che $c_1(t) = c_{-1}(t) = e^t$ e $c_n(t) = 0$ per $n \neq \pm 1$. Dunque la soluzione di (2) è

$$u(t,x) = e^t(e^{ix} + e^{-ix}) = 2e^t\cos x\,.$$

b) Utilizzando la formula risolutiva (4) si ottiene che $u = w + v$ con

$$w(t,x) := c_0^0 e^{2t} + (c_1^0 e^{ix} + c_{-1}^0 e^{-ix})e^t\,, \quad v(t,x) := \sum_{|n|\geq 2} c_n^0\,e^{(2-n^2)t+inx}\,.$$

Osserviamo ora che la funzione v è limitata per $t \geq 0$, infatti

$$|v(t,x)| \leq \sum_{|n|\geq 2} \left| c_n^0 \, e^{(2-n^2)t+inx} \right| \leq \sum_{|n|\geq 2} |c_n^0| < +\infty \, .$$

Ne segue che u è limitata per $t \geq 0$ se e solo se w è limitata, ovvero se e solo se

$$c_0^0 = c_1^0 = c_{-1}^0 = 0 \, .$$

8. a) Tutte le proprietà richieste di S seguono dal fatto che S è il grafico della restrizione a D di una funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, dove D è il disco in $\mathbb{R}^2$ di centro 0 e raggio 2, e in particolare D è una superficie con bordo compatta, connessa e di classe C^∞.

Si noti infatti che $t \mapsto 2z(1+z^2)$ è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ di classe C^∞ surgettiva con derivata strettamente positiva, e dunque ammette un'inversa $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Pertanto l'insieme dei punti (x,y,z) che soddisfano l'equazione

$$x^2 + y^2 + 2z(1+z^2)e^{x^2-y^2} = 4$$

nella definizione di S coincide con il grafico della funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = \phi\big((4 - x^2 - y^2)\, e^{y^2-x^2}\big) \, .$$

Osserviamo ora che per i punti di tale grafico la disequazione $z \geq 0$ equivale a $h(x,y) \geq 0$. Inoltre $2z(1+z^2) \geq 0$ se e solo se $t \geq 0$, quindi $\phi(t) \geq 0$ se e solo se $t \geq 0$, e quindi $h(x,y) \geq 0$ se e solo se $(4 - x^2 - y^2)\, e^{y^2-x^2} \geq 0$, ovvero se e solo se (x,y) appartiene a D.

b) Sia Ω l'insieme dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $0 \leq z \leq h(x,y)$. La frontiera di Ω è data dall'unione di S e del disco D nel piano $z = 0$ (con leggero abuso di notazione indico questo disco con D invece che $D \times \{0\}$). In quel che segue ragioniamo come se Ω fosse un compatto con frontiera di classe C^1, mentre in realtà $\partial\Omega$ è solo una superficie di classe C^1 a tratti (quando diremo rimane tuttavia valido).

Orientiamo Ω tramite l'orientazione canonica di $\mathbb{R}^3$. Allora l'orientazione indotta su $\partial\Omega$ coincide su S con l'orientazione prescritta in questo esercizio. Essendo S connesso, basta verificare questa affermazione nel punto $p := (0,0,1)$: in effetti il gradiente di f in p è $(0,0,8)$, dunque la normale esterna a $\partial\Omega$ in p è $(0,0,1)$, da cui segue che il piano tangente a $\partial\Omega$ in p è orientato dalla base $[(1,0,0),\ (0,1,0)]$.

Si verifica inoltre che l'orientazione di $\partial\Omega$ coincide su D con l'opposto dell'orientazione canonica di $\mathbb{R}^2$ (identificato con $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$).

Ora, il teorema di Stokes dice che per ogni 2-forma ω su $\mathbb{R}^3$ di classe C^1 si ha $\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega d\omega$, e per quanto appena detto questa formula si riscrive come

$$\int_S \omega = \int_D \omega + \int_\Omega d\omega \, . \tag{5}$$

Consideriamo ora la 2-forma ω data nel testo del punto b): siccome in questo caso $d\omega = 0$, la formula (5) diventa

$$\int_S \omega = \int_D \omega = \int_D dx\, dy = 4\pi \, .$$

c) Applicando invece la formula (5) alla 2-forma ω data nel testo del punto c) otteniamo

$$\int_S \omega = \int_D \omega + \int_\Omega d\omega = \int_D xe^z \, dx\, dy + \int_\Omega xe^z \, dx\, dy\, dz = 0$$

(nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che xe^z è una funzione dispari in x, e che sia D che Ω sono simmetrici rispetto al piano yz, e quindi l'integrale di xe^z su D e Ω deve essere nullo).

Commenti

- Esercizio 3). Tutti i presenti hanno fatto vedere che T è autoaggiunto quando $ad - bc = 1$, ma nessuno ha dimostrato che questa condizione è anche necessaria.

- Esercizio 5b). Nella soluzioni abbiamo dato una formula per la proiezione $P(g)$ e ci siamo limitati a verificare che è corretta. La formula è stata "proposta" sulla base di altri esempi di proiezione visti in precedenza.

- Esercizio 5b). È possibile dimostrare che $P(g)$ è la proiezioni di g su K anche in modo diretto, cioè verificando che $\|g - P(g)\|_2 \geq \|g - f\|_2$ per ogni $f \in K$.

- Esercizio 5b). Di quelli che hanno provato a fare l'esercizio quasi tutti hanno proposto una formula sbagliata per P, e tutti hanno cercato di dimostrare che P è effettivamente la proiezione su K tramite la formula $P(f) \perp (P(f) - f)$, che però caratterizza la proiezione sui sottospazi, non quella sui convessi.

- Esercizio 7b). Molti dei presenti hanno trovato la condizione corretta sui coefficienti di u_0, dimostrando che implica che la limitatezza della soluzione u. Ma quasi tutti hanno sostanzialmente dato per buona l'implicazione inversa, vale a dire che se u è limitata allora tale condizione è verificata.

- Esercizio 8b). Si può calcolare $\int_S \omega$ anche usando il fatto che ω è una 2-forma chiusa su $\mathbb{R}^3$, ed è quindi anche esatta: infatti
$$\omega := dx \wedge dy + e^z y\, dx \wedge dz + e^z x\, dy \wedge dz = d(x\, dy + e^z xy\, dz)\,;$$
applicando il teorema di Stokes ed il fatto che ∂S è la circonferenza di centro 0 e raggio 2 sul piano xy, orientato in senso antiorario otteniamo quindi
$$\int_S \omega = \int_{\partial S} x\, dy + e^z xy\, dz = \int_{\partial S} x\, dy = \int_0^{2\pi} 4\cos^2 t\, dt = 4\pi\,.$$
Si noti che questo non si applica alla forma al punto c), che non è neanche chiusa.