CORSO: **Analisi Matematica 3**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
CORSO DI STUDIO: **laurea triennale in Matematica (MAT-L)**
e laurea magistrale in Matematica (WMA-LM)
CODICE ESAME: **547AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
NUMERO DI ORE: **60**
ANNO ACCADEMICO: **2018-19**
PERIODO: **primo semestre**

Obiettivi formativi. Alla fine del corso lo studente deve avere una buona conoscenza teorica ed operativa dei seguenti argomenti: teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, spazi L^p e spazi di Hilbert, serie e trasformata di Fourier (in L^1 e L^2) e relative applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate paziali fondamentali, funzioni armoniche.

Programma del corso [versione: 23 dicembre 2018]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. TEORIA DELL'INTEGRAZIONE
   1.1. Misure σ-additive su σ-algebre. Esempio fundamentale: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$. Altro esempio: la misura che conta i punti.
   1.2. Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Proprietà delle funzioni misurabili. Costruzione dell'integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a segno variabile.
   1.3. Teorema di convergenza monotona (o di Beppo Levi), lemma di Fatou, teorema di convergenza dominata (o di Lebesgue). *Teorema di Fubini-Tonelli.*

2. SPAZI L^p E CONVOLUZIONE
   2.1. Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   2.2. Spazi L^p. Completezza degli spazi L^p.
   2.3. Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p. Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori. Approssimazione e regolarizzazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

3. SPAZI DI HILBERT
   3.1. Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali massimali). Rappresentazione di un elemento dello spazio in termini di una base.
   3.2. Proiezione di un vettore su un sottospazio chiuso, e caratterizzazione in termini di distanza. Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   3.3. *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

4. SERIE DI FOURIER ED APPLICAZIONI
   4.1. Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2(-\pi,\pi)$. Serie di Fourier per le funzioni complesse in $L^2(-\pi,\pi)$. Convergenza della serie di Fourier in L^2. Convergenza uniforme per le funzioni 2π-periodiche di classe C^1. Regolarità delle funzione e comportamento asintotico dei coefficienti. Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione e ulteriori risultati sulla convergenza puntuale della serie di Fourier.
   4.2. *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.* Soluzione dell'equazione del calore e delle onde con condizioni di periodicità agli estremi tramite la serie di Fourier. Disuguaglianza isoperimetrica nel piano.
   4.3. Varianti della serie di Fourier: rappresentazione in serie di seni e coseni per le funzioni reali in $L^2(-\pi,\pi)$ (serie di Fourier reale); rappresentazione in serie di seni per le funzioni reali in $L^2(0,\pi)$; rappresentazione in serie di esponanziali di due variabili per le funzioni complesse in $L^2\big([-\pi,\pi]^d\big)$ (serie di Fourier in d variabili).
   4.4. Basi ortonormali e autovettori di operatori autoaggiunti.

5. Trasformata di Fourier e applicazioni
   5.1. *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni (complesse) in $L^1(\mathbb{R})$. Proprietà elementari della trasformata di Fourier.
   5.2. Dimostrazione della formula di inversione. La trasformata di Fourier preserva il prodotto scalare e la norma L^2. Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^2(\mathbb{R})$.
   5.3. Risoluzione dell'equazione del calore tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore.

6. Funzioni armoniche
   6.1. Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Principio del massimo e unicità della soluzione dell'equazione di Laplace con dato al bordo assegnato.
   6.2. Funzioni armoniche e funzioni olomorfe. Risoluzione dell'equazione di Laplace nel disco unitario tramite la serie di Fourier, rappresentazione della soluzione tramite nucleo di Poisson.

Prerequisiti. Il contenuto dei corsi di analisi e geometria dei primi due anni. Serviranno in particolare le nozioni fondamentali di algebra lineare, topologia in spazi metrici, derivate e integrali di funzioni in più variabili, convergenza uniforme e totale per successioni e serie di funzioni, teorema della divergenza, funzioni olomorfe e calcolo degli integrali con il metodo dei residui.

Mailing list e pagina web del corso. Le comunicazioni riguardanti corso ed esami vengono inviate per posta elettronica a chi si è iscritto alla mailing list del corso, e pubblicizzate sulla pagina web del docente: http://pagine.dm.unipi.it/alberti/. Su tale pagina saranno disponibili gli appunti del corso, e i testi e le soluzioni delle varie prove d'esame.

Appelli ed esami. L'esame è suddiviso in una prova scritta ed una prova orale. Per l'ammissione alla prova orale è necessario aver superato la prova scritta; la prova orale va sostenuta nello stesso appello della prova scritta. Non è consentito l'uso di libri di testo o appunti durante le prove scritte. Durante il corso è previsto lo svolgimento di due prove in itinere (compitini) che sostituiscono la prova scritta del primo o del secondo appello. In tutto l'anno accademico sono previsti cinque appelli d'esame (indicativamente a gennaio, febbraio, giugno, luglio e settembre). Gli studenti interessati a sostenere l'esame in un dato appello sono tenuti ad iscriversi utilizzando l'apposita procedura online.

Testi di riferimento. Il corso non segue alcun testo preciso e si raccomanda quindi la frequenza. Alcuni degli argomenti del corso sono coperti dai seguenti testi. Si noti tuttavia che la presentazione proposta in questi testi differisce a volte significativamente da quella data a lezione (e alcuni argomenti non vengono affatto trattati).

- A.N. Kolmogorov e S.V. Fomin. *Introductory real analysis.* Dover Publications, New York, 1975. Traduzione italiana: *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale.* Editori Riuniti, Roma, 2012.
- T.W. Körner. *Fourier analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill 1974. Traduzione italiana: *Analisi reale e complessa*, Boringhieri, 1974.