CORSO: **Teoria Geometrica della Misura**
DOCENTE: **Giovanni Alberti**
CORSO DI STUDIO: **Matematica, secondo livello (WMA-LM)**
CODICE ESAME: **225AA**
NUMERO DI CREDITI: **6**
DURATA PREVISTA: **42 ore**
ANNO ACCADEMICO: **2019-20**
COLLOCAZIONE: **secondo semestre**

Introduzione. Lo scopo del corso è di dare una panoramica dei problemi chiave e dei risultati principali della Teoria Geometrica della Misura, e di presentare in dettaglio alcuni i concetti le tecniche di base, con particolare attenzione alla teoria degli insiemi rettificabili. La seconda parte del corso è dedicata alla teoria delle correnti.

Programma del corso [versione: 6 giugno 2020]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. INTRODUZIONE E RICAPITOLAZIONE DELLE NOZIONI DI BASE
   1.1. Il problema di Plateau come linea guida del corso; rassegna dei diversi approcci.
   1.2. Nozioni di base di teoria della misura: misure finite a valori vettoriali, teorema di Riesz, convergenza debole, teorema di Lebesgue-Radon-Nikodým.
   1.3. Misure esterne, insiemi misurabili, costruzione di Caratheodory.

2. MISURE DI HAUSDORFF
   2.1. Teoremi di ricoprimento di Vitali e Besicovitch. Esistenza della densità di una misura rispetto ad un'altra, dei punti di densità di un insieme, dei punti di continuità approssimata (in senso L^p) di una funzione.
   2.2. Definizione di misura di Hausdorff, proprietà fondamentali, dimensione di Hausdorff.
   2.3. Densità d-dimensionale di un insieme di misura di Hausdorff finita. *Caratterizzazione delle misure finite assolutamente continue rispetto alla misura di Hausdorff.*
   2.4. Frattali autosimili nel senso di Hutchinson.
   2.5. Misure di Haar e misura integralgeometrica.

3. INSIEMI RETTIFICABILI
   3.1. Mappe Lipschitziane: teoremi di estensione, teorema di Rademacher, proprietà di Lusin con le mappe di classe C^1.
   3.2. Formula dell'area per mappe Lipschitziane tra spazi euclidei.
   3.3. Insiemi rettificabili: definizione classica in ambito metrico, varianti della definizione in ambito euclideo, spazio tangente approssimato.
   3.4. Criterio di rettificabilità di base: esistenza di un cono tangente approssimato.
   3.5. *Altri criteri di rettificabilità (solo enunciati): teorema di proiezione di Besicovitch-Federer, teorema di Marstrand-Mattila-Preiss.*
   3.6. Formule dell'area per mappe Lipschitziane su insiemi rettificabili.

4. CORRENTI: DEFINIZIONE E RISULTATI FONDAMENTALI
   4.1. Prerequisiti di algebra multi-lineare: k-covettori (applicazioni k-lineari alternanti) e k-vettori, significato dei k-vettori semplici, massa e co-massa.
   4.2. k-forme e differenziale esterno; orientazione di una superficie regolare e orientazione del bordo; teorema di Stokes.
   4.3. Definizione di corrente k-dimensionale, definizione di bordo e di massa.
   4.4. Classi significative di correnti: normali, rettificabili, intere, poliedrali.
   4.5. Enunciato del teorema di rettificabilità del bordo e del teorema di chiusura di Federer e Fleming. Esempi. Soluzione del problema di Plateau nell'ambito delle correnti intere.

5. CORRENTI: STRUMENTI UTILI
   5.1. Constancy lemma. Prodotto di correnti e formula per il bordo del prodotto.
   5.2. Push-forward di una corrente e formula per il bordo del push-forward. Formula di omotopia e costruzione di cono.

5.3. Norma flat. Teorema di deformazione poliedrale. *Applicazioni del teorema di deformazione poliedrale: approssimazione in norma flat, disuguaglianza isoperimetrica, classi di omologia (di una varietà) definite tramite correnti intere o normali.*

Prerequisiti. Si richiede una solida conoscenza dei concetti di base dell'analisi funzionale (dualità, topologia debole*, teorema di Riesz) e della teoria dell'integrazione (rispetto ad una misura qualunque), e una discreta familiarità con il concetto di derivata debole e con gli aspetti funzionali degli spazi di Sobolev (ma non serve una conoscenza approfondita della teoria delle distribuzioni).

Testi di riferimento.

- K. Falconer: *The geometry of fractal sets.* Cambridge University Press, 1985.
- P. Mattila: *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces.* Cambridge University Press, 1995.
- L. Simon: *Lectures on Geometric Measure Theory.* Proccedings of the Centre for Mathematical Analysis, vol. 3. Australian National University, 1983.
- S.G. Krantz, H.R. Parks: *Geometric Integration Theory.* Cornerstones. Birkhäuser, Boston 2008.

Modalità d'esame. L'esame consiste di due parti: un seminario su un argomento concordato con il docente, seguito da un orale sugli argomenti fondamentali del corso. Le date degli esami verranno concordate individualmente con ciascuno studente.