Versione: 16 settembre 2021

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

prove scritte dell'esame di

Analisi Matematica 3 (547AA), a.a. 2020-21

Testi e soluzioni

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
http://pagine.dm.unipi.it/alberti

Gli scritti d'esame per il corso di Analisi 3 consistono di otto domande a cui dare una risposta articolata. Di queste, le prime sono solitamente più semplici, nel senso che possono essere facilmente ricondotte a fatti o calcoli noti. Il tempo a disposizione è di tre ore.
Questa raccolta contiene i testi e le soluzioni degli scritti di tutti gli appelli dell'a.a. 2020-21, incluse le prove in itinere.

Programma del corso [versione: 19 dicembre 2020]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali e/o fuori programma.

1. Richiamo di teoria dell'integrazione (fuori programma)
   - *Misure σ-additive su σ-algebre. Esempi fondamentali: la misura di Lebesgue e la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^d$; la misura che conta i punti.*
   - *Funzioni misurabili (rispetto ad una data σ-algebra). Integrale delle funzioni misurabile positive partendo delle funzioni semplici. Integrale delle funzioni misurabili a valori reali e a valori vettoriali.*
   - *Teoremi fondamentali: di convergenza monotona (o di Beppo Levi), di Fatou, di convergenza dominata (o di Lebesgue), di Fubini, di cambio di variabile.*

2. Spazi L^p
   - Disuguaglianze di Jensen, Hölder e Minkowski.
   - Norma L^p di una funzione; spazi L^p; completezza degli spazi L^p.
   - Confronto tra le varie nozioni di convergenza per una successione di funzioni.
   - Approssimazione con funzioni continue; teorema di Lusin.

3. Convoluzione
   - Prodotto di convoluzione di funzioni su $\mathbb{R}^d$ e disuguaglianze collegate alle norme L^p.
   - Regolarità del prodotto di convoluzione in funzione della regolarità dei fattori.
   - Approssimazione per convoluzione delle funzioni in $L^p(\mathbb{R}^d)$; approssimazione con funzioni C^∞ a supporto compatto.

4. Spazi di Hilbert
   - Spazi di Hilbert reali; basi di Hilbert (sistemi ortonormali completi); rappresentazione di un elemento dello spazio di Hilbert H in termini di una base.
   - Proiezione ortogonale di un vettore di H su un sottospazio chiuso V e caratterizzazione in termini di distanza; rappresentazione di H come $H = V + V^\perp$.
   - Rappresentazione di un funzionale lineare e continuo su H tramite prodotto scalare (Teorema di Riesz).
   - *Spazi di Hilbert sul campo complesso.*

5. Serie di Fourier
   - Le funzioni esponenziali e^{inx} (opportunamente rinormalizzate) formano una base di Hilbert di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$. Serie di Fourier di una funzioni in $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$; identità di Parseval.
   - Relazione tra la regolarità di una funzione e il comportamento asintotico dei coefficienti di Fourier; convergenza uniforme della serie di Fourier delle funzioni 2π-periodiche di classe C^1.
   - Rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier come convoluzione con il nucleo di Dirichlet; convergenza della serie di Fourier nei punti di continuità Hölderiana.

6. Serie di Fourier: applicazioni e varianti
   - *Derivazione dell'equazione del calore e delle onde in una dimensione spaziale.*
   - Risoluzione di equazioni alle derivate parziali lineari con condizioni di periodicità al bordo tramite la serie di Fourier (in primis l'equazione del calore e delle onde).
   - Dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nel piano.

- Varianti della serie di Fourier: serie di Fourier in d variabili, serie di Fourier reale, rappresentazione in serie di seni (per le funzioni in $L^2(0,\pi)$). Applicazione alla risoluzione di EDP con diverse condizioni al bordo.
- Operatori autoaggiunti; esempi di basi di Hilbert di autovettori di operatori autoaggiunti.

7. Trasformata di Fourier e applicazioni
    - *Derivazione euristica della trasformata di Fourier a partire dalla serie di Fourier.* Trasformata di Fourier delle funzioni in $L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$.
    - Proprietà elementari della TdF; trasformata del prodotto di convoluzione di funzioni in L^1; trasformata della derivata e derivata della trasformata.
    - Formula di inversione per funzioni in L^1 con trasformata in L^1.
    - La TdF preserva il prodotto scalare e la norma L^2 a meno di un fattore costante (identità di Plancherel). Definizione della TdF di funzioni in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$; trasformata del prodotto di funzioni in L^2.
    - Relazione tra la regolarità della funzione e il comportamento asintotico della trasformata, relazione tra la sommabilità della funzione e la regolarità della trasformata. La TdF di una funzione con supporto compatto è analitica (teorema di Paley-Wiener).
    - *Risoluzione dell'equazione del calore su $\mathbb{R}$ tramite trasformata di Fourier e rappresentazione della soluzione tramite il nucleo del calore. Disuguaglianza di Heisenberg.*

8. Funzioni armoniche
    - Le funzioni armoniche come soluzioni dell'equazione di Laplace. Caratterizzazione in termini di proprietà della media. Regolarità C^∞ delle funzioni armoniche.
    - Principio del massimo per la funzioni armoniche. Unicità e principio del confronto per le soluzioni dell'equazione e di Poisson con condizioni al bordo di Dirichlet.
    - Relazioni tra le funzioni armoniche in dimensione due e le funzioni olomorfe. Analiticità delle funzioni armoniche (solo in dimensione due).
    - Risoluzione dell'equazione di Poisson con termine noto polinomiale e dato al bordo polinomiale su una palla o su un ellissoide (in dimensione qualunque). Risoluzione dell'equazione di Laplace con condizione di Dirichlet sul disco unitario tramite (rappresentazione e della soluzione come Fourier e tramite il nucleo di Poisson).

9. Integrazione su superfici
    - *Superfici (senza bordo) di dimensione k e classe C^m in $\mathbb{R}^d$: definizione in termini di parametrizzazioni regolari e caratterizzazione come luogo di zeri, cioè in termini di equazioni. Spazio tangente ad una superficie. Mappe regolari tra superfici, differenziale di una mappa regolare. Superfici con bordo.*
    - Misura di Lebesgue su uno spazio vettoriale con prodotto scalare. Definizione di $|\det T|$ per un'applicazione lineare T tra spazi vettoriali con prodotto scalare; formule alternative per $|\det T|$ per un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$.
    - Determinante Jacobiano di una mappa di classe C^1 da un aperto di $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^d$; formule alternative per lo Jacobiano. Costruzione della misura di volume su una superficie tramite parametrizzazioni regolari; integrazione di funzioni su una superficie tramite parametrizzazioni anche non regolari (formula dell'area).
    - Applicazioni k-lineari alternanti (k-covettori) su uno spazio vettoriale V; prodotto esterno, pull-back tramite un'applicazione lineare. Base dello spazio dei k-covettori su V associata ad una base di V. Formula di Binet generalizzata.
    - *Orientazione di uno spazio vettoriale V, orientazione di una superficie e orientazione del bordo. Forme differenziali (su un aperto di $\mathbb{R}^d$), pull-back, derivata esterna (differenziale). Integrazione di una k-forma su una superficie k-dimensionale orientata. Teorema di Stokes (solo enunciato).*

TESTI E SOLUZIONI

1 Sia $E := \Big\{(x,y) \in [1,+\infty) \times \mathbb{R}^d \colon |y| \le \dfrac{1}{x}\Big\}$ e sia $f(x,y) := \dfrac{1}{|y|}$. Calcolare $\|f\|_{L^p(E)}$.

<u>SOLUZIONE</u>. Detta $B(r)$ la palla di centro 0 e raggio r in $\mathbb{R}^d$ e detto c_d il volume della sfera $\mathbb{S}^{d-1}$ si ha, per $p < +\infty$,

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p := \int_E |f|^p \, d\mathscr{L}^{d+1} &= \int_1^{+\infty} \Big(\int_{B(1/x)} \frac{1}{|y|^p} \, dy \Big) \, dx \\ &= \int_1^{+\infty} \Big(\int_0^{1/x} \frac{1}{\rho^p} \, c_d \rho^{d-1} \, d\rho \Big) \, dx \end{aligned} \tag{1}$$

(nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini e nel terzo la nota formula per l'integrale delle funzioni radiali). L'integrale improprio all'interno delle parentesi nell'ultimo termine di questa catena di uguaglianze è uguale a $+\infty$ se $d-1-p \ge 1$, vale a dire $p \ge d$ (e quindi anche $\|f\|_p$ è $+\infty$); se invece $p < d$:

$$\|f\|_p^p = \frac{c_d}{d-p} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{d-p}} \, dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } d-1 \le p < d, \\ \frac{c_d}{(d-p)(d-p-1)} & \text{se } p < d-1. \end{cases}$$

Infine $\|f\|_\infty = +\infty$ perché f ha limite $+\infty$ in un punto interno di E (per la precisione, in ogni punto della forma $(x,0)$). Riassumendo:

$$\|f\|_p = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \ge d-1, \\ \Big(\frac{c_d}{(d-p)(d-p-1)}\Big)^{1/p} & \text{se } p < d-1. \end{cases}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Una variante della soluzione data sopra, per certi versi più pulita, consiste nel proseguire dalla formula (1) e scambiare l'ordine di integrazione di ρ e x (tramite Fubini), osservando che i vincoli $x \ge 1$ e $0 \le \rho \le \frac{1}{x}$ si riscrivono come $0 \le \rho \le 1$ e $1 \le x \le \frac{1}{\rho}$:

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_1^{+\infty} \Big(\int_0^{1/x} \frac{1}{\rho^p} \, c_d \rho^{d-1} \, d\rho \Big) \, dx \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^{1/\rho} dx \Big) \, c_d \rho^{d-p-1} \, d\rho \\ &= c_d \int_0^1 \rho^{d-p-2} - \rho^{d-p-1} \, d\rho = \begin{cases} +\infty & \text{se } p \ge d-1, \\ \frac{c_d}{(d-p)(d-p-1)} & \text{se } p < d-1. \end{cases} \end{aligned}$$

2 Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $f(x) := \sin\big(\frac{x}{2}\big)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Usando l'identità $\sin\big(\frac{x}{2}\big) = \frac{1}{2i}\big(e^{ix/2} - e^{-ix/2}\big)$ ottengo che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(f) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\big(\tfrac{x}{2}\big) \, e^{-inx} \, dx \\ &= \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-n+1/2)x} - e^{i(-n-1/2)x} \, dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \bigg| \frac{e^{i(-n+1/2)x}}{n-\frac{1}{2}} - \frac{e^{i(-n-1/2)x}}{n+\frac{1}{2}} \bigg|_{-\pi}^{\pi} = \cdots = \frac{(-1)^n n i}{\pi\big(n^2 - \frac{1}{4}\big)} \,. \end{aligned}$$

3 Dimostrare che i polinomi trigonometrici sono densi in $L^p([-a,a];\mathbb{C})$ per $a \le \pi$ e $p < +\infty$.

<u>SOLUZIONE</u>. Si tratta di adattare la dimostrazione vista a lezione per $a = \pi$ e $p = 2$.
Indico con X l'insieme dei polinomi trigonometrici, cioè $X := \mathrm{Span}\big(\{e^{inx} \colon n \in \mathbb{Z}\}\big)$, e con $\overline{X}^p$ la chiusura di X in $L^p([-a,a])$. Per il teorema di Stone-Weierstrass X è denso rispetto alla norma del sup nella classe delle funzioni continue e 2π-periodiche su $\mathbb{R}$, ovvero nella classe Y delle funzioni $f \in C([-\pi,\pi])$ tali che $f(-\pi) = f(\pi)$. Siccome la convergenza uniforme su

$[-\pi, \pi]$ implica la convergenza in $L^p([-\pi, \pi])$ per ogni $p < \infty$, e quindi anche la convergenza in $L^p([-a, a])$, ho che

$$\overline{X}^p \supset Y\,. \tag{2}$$

Osservo ora che per $a < \pi$ ogni funzione $f \in C([-a, a])$ può essere estesa ad una funzione continua su $[-\pi, \pi]$ tale che $f(\pm\pi) = 0$, cioè una funzione in Y, e quindi (2) diventa

$$\overline{X}^p \supset C([-a, a])\,, \tag{3}$$

e ricordando che $\overline{C([-a, a])}^p = L^p([-a, a])$ ottengo infine

$$\overline{X}^p = L^p([-a, a])\,.$$

Per $a = \pi$ ottengo l'inclusione (3) da (2) dimostrando che $\overline{Y}^p$ contiene $C([-\pi, \pi])$: data infatti $f \in C([-\pi, \pi])$, prendo una successione di funzioni continue $\varphi_n : [-\pi, \pi] \to [0, 1]$ tali che

(i) $\varphi_n(\pm\pi) = 0$,

(ii) $\varphi_n(x) = 1$ per $-\pi + \frac{1}{n} \leq x \leq \pi - \frac{1}{n}$,

ed osservo che le funzioni $f_n := \varphi_n f$ appartengono a Y (per via di (i)) e convergono ad f in L^p, cioè

$$\|f - f_n\|_p^p = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p \, (1 - \varphi_n^p(x))\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

per il teorema di convergenza dominata (la convergenza puntuale segue da (ii) e una dominazione è la funzione $|f|^p$).

$\boxed{4}$ a) Sia $Q := [-\pi, \pi]^d$, f una funzione in $L^2(Q)$ estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}^d$ e M una matrice $d \times d$ con coefficienti interi e $\det M = 1$. Esprimere i coefficienti di Fourier di $f_M(x) := f(Mx)$ in funzione di quelli di f.

b) Cosa succede se M è una matrice invertibile con coefficienti interi?

<u>SOLUZIONE</u>. Data $M \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ invertibile pongo

$$I := \{M^t n \colon n \in \mathbb{Z}^d\}\,, \quad P := (M^t)^{-1} = (M^{-1})^t\,.$$

La rappresentazione in serie di Fourier di f è

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c(f, n)\, e^{i\langle n\,;\,x\rangle}\,,$$

dove $c(f, n)$ sono i coefficienti di Fourier di f,[1] $\langle \cdot\,;\,\cdot \rangle$ è il prodotto scalare in $\mathbb{R}^d$, e la serie converge (incondizionatamente) in $L^2(Q)$. Ma allora

$$f(Mx) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c(f, n)\, e^{i\langle n\,;\,Mx\rangle} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c(f, n)\, e^{i\langle M^t n\,;\,x\rangle} = \sum_{m\in I} c(f, Pm)\, e^{i\langle m\,;\,x\rangle}\,, \tag{4}$$

dove nell'ultimo passaggio ho usato il cambio di variabile $m = M^t n$, ovvero $n = Pm$.

Siccome le matrici M e M^t hanno coefficienti interi, l'insieme degli indici I è contenuto in $\mathbb{Z}^d$ e quindi l'ultima serie in (4) deve coincidere con la serie di Fourier di f_M,[2] e quindi

$$c(f_M, n) = \begin{cases} c(f, Pn) & \text{se } n \in I, \\ 0 & \text{se } n \notin I, \end{cases}$$

e questo risponde alla domanda b).

Per rispondere alla domanda a) faccio vedere che se $\det M = \pm 1$ allora $I = \mathbb{Z}^d$ e la formula sopra si riduce a

$$c(f_M, n) = c(f, Pn) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}^d.$$

Detta infatti $\mathrm{cof}(M)$ la matrice dei cofattori di M, si ha che

$$P = (M^{-1})^t = \frac{1}{\det M}\,\mathrm{cof}(M) = \pm\mathrm{cof}(M)$$

e siccome $\mathrm{cof}(M)$ ha coefficienti interi lo stesso vale per P; quindi ogni $n \in \mathbb{Z}^d$ si scrive come $n = M^t m$ con $m := Pn$ e siccome m appartiene a $\mathbb{Z}^d$ allora n appartiene a I.

[1] Per ragioni di leggibilità delle formule che seguono preferisco scrivere $c(f, n)$ invece di $c_n(f)$.
[2] Per via dell'unicità della rappresentazione in termini di una base di Hilbert.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Un'approccio alternativo consiste nel partire dalla definizione dei coefficienti di Fourier

$$c(f_M, n) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_Q f(Mx)\, e^{-i\langle n\,;\,x\rangle}\, dx\,,$$

e applicare il cambio di variabile $y = Mx$ nell'integrale: poiché il determinante Jacobiano di questa trasformazione è 1, posto $Q' := \{Mx : x \in Q\}$ ottengo

$$c(f_M, n) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{Q'} f(y)\, e^{-i\langle n\,;\,M^{-1}y\rangle}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_Q f(y)\, e^{-i\langle Pn\,;\,y\rangle}\, dx\,;$$

se inoltre $\det M = 1$ allora P ha coefficienti interi e posso concludere che $c(f_M, n) = c(f, Pn)$. Il punto delicato è nel secondo passaggio, dove si deve far vedere che l'integrale non cambia sostituendo il dominio di integrazione Q' con Q. Purtroppo non ho una dimostrazione elementare di questo fatto.

$\boxed{5}$ Indico con L^1_{per} l'insieme delle funzioni $f \in L^1([-\pi, \pi])$ estese per periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e scrivo $\|f\|_1$ per $\|f\|_{L^1([-\pi,\pi])}$. Date $f, g \in L^1_{\text{per}}$ definisco il prodotto di convoluzione $f * g$ come

$$f * g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, dy\,.$$

a) Dimostrare che $f * g(x)$ è ben definito per q.o. $x \in \mathbb{R}$ e $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.

b) Calcolare i coefficienti di Fourier di $f * g$ in funzione di quelli di f e g.

<u>SOLUZIONE</u>. Si tratta di adattare la dimostrazione vista a lezione per l'usuale convoluzione. Osservo per cominciare che $|f| * |g|(x)$ è un valore ben definito in $[0, +\infty]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e inoltre

$$\begin{aligned} \big\| |f| * |g| \big\|_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|\, |g(y)|\, dy \right) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|\, dx \right) |g(y)|\, dy \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \right) |g(y)|\, dy = \|f\|_1 \, \|g\|_1\,. \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato il teorema di Fubini, nel terzo ho usato il fatto che l'integrale di una funzione periodica su un periodo coincide con quello di ogni sua traslata.) In breve

$$\big\| |f| * |g| \big\|_1 = \|f\|_1 \, \|g\|_1\,, \tag{5}$$

Dunque $|f| * |g|$ è una funzione in $L^1([-\pi, \pi])$, quindi $|f| * |g|(x) < +\infty$ per q.o. $x \in [-\pi, \pi]$ e anche, per periodicità, per q.o. $x \in \mathbb{R}$.
Siccome $f * g(x)$ è ben definito (e finito) per ogni x tale che $|f| * |g|(x) < +\infty$ e vale

$$|f * g(x)| \le |f| * |g|(x)\,,$$

posso concludere che $f * g(x)$ è ben definito (e finito) per q.o. $x \in \mathbb{R}$, e la (5) implica

$$\|f * g\|_1 \le \big\| |f| * |g| \big\|_1 = \|f\|_1 \, \|g\|_1\,.$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Si può dimostrare che $f * g$ è ben definito q.o. riconducendosi ai risultati già visti per l'usuale prodotto di convoluzione, ma questo richiede un po' di attenzione. Posto

$$\tilde f := f \cdot \mathbf{1}_{[-2\pi, 2\pi]}\,, \quad \tilde g := g \cdot \mathbf{1}_{[-\pi,\pi]}$$

si verifica facilmente che

- $\tilde f$ e $\tilde g$ appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, e quindi il prodotto di convoluzione "standard" $\tilde f * \tilde g(x)$ è ben definito e finito per quasi ogni $x \in \mathbb{R}$,
- gli integrali che definiscono $f * g(x)$ e $\tilde f * \tilde g(x)$ coincidono per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

Pertanto $f * g(x)$ è ben definito per q.o. $x \in [-\pi, \pi]$, e quindi anche per q.o. $x \in \mathbb{R}$ per ragioni di periodicità. Posto inoltre $I := [-\pi, \pi]$ e $2I := [-2\pi, 2\pi]$ vale la stima

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L^1(I)} \leq \|\tilde{f} * \tilde{g}\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|\tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\tilde{g}\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= \|f\|_{L^1(2I)} \|g\|_{L^1(I)} = 2\,\|f\|_{L^1(I)} \|g\|_{L^1(I)}\,,\end{aligned}$$

che però non è quella cercata.

6 Sia $\Omega := \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ e sia $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione di classe C^1 e 2π-periodica. Cerco $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ funzione continua, 2π-periodica nella prima variabile, che risolve il problema (P) dato dall'equazione $\Delta u = 0$ su Ω e la condizione al bordo $u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$. Discutere l'esistenza e l'unicità di u.
[*Suggerimento: scrivere u in serie di Fourier nella prima variabile.*]

<u>SOLUZIONE</u>. Indico con (x, y) le variabili in Ω e scrivo l'incognita u in serie di Fourier rispetto alla prima variabile, vale a dire

$$u(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(y)\, e^{inx}\,.$$

Se u è abbastanza regolare

$$\Delta u(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \big(\ddot{c}_n(y) - n^2 c_n(y)\big)\, e^{inx}$$

e dunque u risolve il problema (P) se e solo se i coefficienti di Fourier c_n risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{z} - n^2 z = 0 \\ z(0) = c_n^0 \end{cases} \tag{6}$$

dove c_n^0 sono i coefficienti di Fourier di u_0.
Risolvendo il problema (6) si vede che c_n deve essere della forma

$$c_n(y) = \alpha_n e^{ny} + \beta_n e^{-ny} \quad \text{con } \alpha_n + \beta_n = c_n^0$$

per $n \neq 0$, e che $c_0(y) = c_0^0 + \beta_0 t$ con β_0 arbitrario.
In particolare i coefficienti c_n non sono univocamente determinati.
Allo scopo di costruire una soluzione del problema (P), tra le possibili scelte di c_n opto per

$$c_n(y) = c_n^0 e^{-|n|y}\,,$$

ovvero

$$u(x, y) := \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_n^0\, e^{inx - |n|y}}_{u_n}\,. \tag{7}$$

Dimostro quindi il seguente risultato: *la funzione u in (7) è ben definita e continua su $\overline{\Omega}$, 2π-periodica in x, di classe C^∞ su Ω, e risolve (P).*
Osservo per cominciare che $\sum_n |c_n^0| < +\infty$ perché u_0 è 2π-periodica e di classe C^1, e che

$$\|u_n\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} = |c_n^0|\,.$$

Dunque la serie in (7) converge totalmente su $\overline{\Omega}$, e questo dimostra che

- u è ben definita e continua su $\overline{\Omega}$,
- u è (ovviamente) 2π-periodica in x,
- $u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$.

Per quanto riguarda la regolarità di u, per ogni $\delta > 0$ pongo $\Omega_\delta := \mathbb{R} \times (\delta, +\infty)$ ed osservo che per ogni $h, k = 0, 1, \dots$ vale

$$D_x^h D_y^k u_n = c_n^0 (in)^h (-|n|)^k e^{inx - |n|y}\,,$$

e quindi

$$\big\|D_x^h D_y^k u_n\big\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} = |c_n^0|\, |n|^{h+k} e^{-\delta|n|} = o(|c_n^0|) \quad \text{per } n \to \pm\infty.$$

Dunque la serie delle derivate parziali $\sum_n D_x^h D_y^k u_n$ converge totalmente su Ω_δ, da cui segue che u è di classe C^∞ su Ω_δ, e quindi anche sull'unione degli aperti Ω_δ al variare di $\delta > 0$, cioè Ω. Infine u risolve l'equazione $\Delta u = 0$ perché la risolvono gli addendi u_n e la convergenza della serie permette di scambiare somma e derivate di ordine qualunque in ogni punto di Ω.

Concludo dimostrando che la soluzione del problema (P) non è unica. Per linearità basta dimostrarlo nel caso $u_0 = 0$. In effetti si verifica con un semplice calcolo che le funzioni

$$v_n(x,y) := (e^{ny} - e^{-ny})\, e^{inx}$$

con n intero risolvono (P) con $u_0 = 0$, e lo stesso vale per ogni combinazione lineare (finita) di tali funzioni.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Siano dati $1 \le p \le \infty$, E insieme in $\mathbb{R}^d$ di misura positiva e finita, ed $u_n : E \to \mathbb{R}$ successione di funzioni con norme $\|u_n\|_p$ equilimitate che convergono a 0 per q.o. $x \in E$.

a) Dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E u_n\, dx = 0$ se $p = +\infty$.

b) Per ogni $m > 0$ sia $E_{n,m} := \{x \in E\colon |u_n(x)| \ge m\}$: allora $|E_{n,m}| \le \|u_n\|_p^p / m^p$ per p finito.

c) Dimostrare che $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E u_n\, dx = 0$ se $p > 1$.

[*Suggerimento: scomporre l'integrale come somma di un integrale su* $E_{n,m}$ *e di uno su* $E \setminus E_{n,m}$.]

d) Cosa succede per $p = 1$?

<u>SOLUZIONE</u>. a) Basta applicare il teorema il teorema di convergenza dominata: le convergenza puntuale delle funzioni u_n a 0 è data per ipotesi e una dominazione è data dalla funzione costante $m := \sup_n \|u\|_\infty$.

b) Applicando la disuguaglianza di Markov ottengo

$$|E_{n,m}| = \big|\{x\colon |u_n(x)|^p \ge m^p\}\big| \le \frac{1}{m^p} \int_E |u_n(x)|^p\, dx = \frac{\|u_n\|_p^p}{m^p}\,.$$

c) Fissato $m > 0$ vale che

$$\left| \int_E u_n\, dx \right| \le \int_E |u_n|\, dx = \underbrace{\int_E \mathbf{1}_{E\setminus E_{n,m}}\, |u_n|\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_E \mathbf{1}_{E_{n,m}}\, |u_n|\, dx}_{I_2}\,. \tag{8}$$

Osservo ora che l'integrale I_1 converge a 0 per $n \to +\infty$ per il teorema di convergenza dominata (le funzioni integrande sono dominate dalla funzione costante m). Inoltre, preso M tale che $\|u_n\| \le M$ per ogni n, se applico la disuguaglianza di Hölder all'integrale I_2 e uso quando visto al punto b), ottengo

$$I_2 \le \|u_n\|_p\, |E_{n,m}|^{1/q} = \frac{M^p}{m^{p-1}}\,.$$

Pertanto, passando al limite per $n \to +\infty$ in (8) ottengo

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \int_E u_n\, dx \right| \le \frac{M^p}{m^{p-1}}\,,$$

e concludo la dimostrazione prendendo l'inf su tutti gli $m > 0$.

d) Per $p = 1$ non è detto che $\int_E u_n\, dx$ tenda a 0. Preso infatti $\bar{x} \in E$ tale che $|E \cap B(\bar{x}, r)| > 0$ per ogni $r > 0$,[3] e posto

$$u_n := \frac{1}{|F_n|} \mathbf{1}_{F_n} \quad \text{con} \quad F_n := E \cap B(\bar{x}, 1/n)\,,$$

si verifica facilmente che

- $u_n(x) = 0$ definitivamente in n per ogni $x \ne \bar{x}$, e in particolare $u_n \to 0$ q.o.;
- $\|u_n\|_1 = \int_E u_n\, dx = 1$ per ogni n, e in particolare le funzioni u_n sono equilimitate in $L^1(E)$ e gli integrali $\int_E u_n\, dx$ non convergono a 0.

[3] L'esistenza di tale $\bar{x}$ è ovvia se E ha parte interna non vuota, ma vale anche per E arbitrario: se infatti $\bar{x}$ non esistesse E sarebbe ricoperto dalla famiglia $\mathscr{F}$ delle palle aperte B tali che $|E \cap B| = 0$, ed estraendo da $\mathscr{F}$ un sotto-ricoprimento numerabile si otterrebbe che E ha misura nulla.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Una dimostrazione alternativa per il punto c) è la seguente: fissato $m > 0$ vale che

$$\begin{aligned} \left| \int_E u_n \, dx \right| &\le \int_E |u_n| \, dx \\ &= \int_E \mathbf{1}_{E \setminus E_{n,m}} \, |u_n| \, dx + \int_E \mathbf{1}_{E_{n,m}} \, |u_n| \, dx \le m|E| + \|u_n\|_p \, |E_{n,m}|^{1/q} \end{aligned} \tag{9}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato che $|u_n| \le m$ su $E \setminus E_{n,m}$ per stimare il primo integrale, e la disuguaglianza di Hölder per stimare il secondo).
Osservo ora che siccome E ha misura finita e le funzioni u_n convergono a 0 q.o. su E, allora convergono a 0 anche in misura, e questo significa che

$$\lim_{n \to +\infty} |E_{n,m}| = 0 \quad \text{per ogni } m > 0.$$

Prendendo quindi il limite per $n \to +\infty$ in (9) ottengo

$$\limsup_{n \to +\infty} \left| \int_E u_n \, dx \right| \le m|E| \, ,$$

e concludo la dimostrazione prendendo l'inf su tutti gli $m > 0$.

8 Data $f \in L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$, estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$, e $\lambda \in (0, 1)$, consideriamo la serie di Fourier "pesata"

$$T_\lambda f(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^{|n|} c_n(f) \, e^{inx} \, .$$

a) Dimostrare che $T_\lambda f$ è una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ di classe C^∞.

b) Scrivere $T_\lambda f$ come $f * g_\lambda$ con g_λ funzione positiva e 2π-periodica con integrale 1 sul periodo. [*Il prodotto $f * g_\lambda$ è inteso nel senso dell'esercizio 5, e si richiede che g_λ non dipenda da f.*]

c) Dimostrare che $T_\lambda f \to f$ in $L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ per $\lambda \to 1$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Usando la stima $|c_n(f)| \le \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$ ottengo che coefficienti di Fourier di $T_\lambda f$ soddisfano

$$\big| c_n(T_\lambda f) \big| = \lambda^{|n|} |c_n(f)| \le \frac{\|f\|_1}{2\pi} \lambda^{|n|}$$

da cui segue che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^k \big| c_n(T_\lambda f) \big| < +\infty$$

per ogni $k = 1, 2, \dots$, e quindi $T_\lambda f$ è una funzione 2π-periodica di classe C^∞.

b) Procedo come visto a lezione per la rappresentazione delle somme parziali della serie di Fourier in termini del nucleo di Dirichlet:

$$\begin{aligned} T_\lambda f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{|n|} c_n(f) \, e^{inx} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \, e^{in(x-y)} \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \bigg(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{|n|} e^{in(x-y)} \bigg) \, dy \, . \end{aligned}$$

(Nel secondo passaggio ho usato la definizione dei coefficienti di Fourier, nel terzo ho scambiato serie ed integrale.[4]) Quindi $T_\lambda f = f * g_\lambda$ dove il prodotto di convoluzione è inteso nel senso dell'esercizio 5 e

$$g_\lambda(x) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{|n|} e^{inx} \, .$$

Da questa formula si ottiene subito che g_λ è una funzione 2π-periodica di classe C^∞ e che

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_\lambda(x) \, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \, dx = 1 \, .$$

[4] Posso farlo perché $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{|n|} \int_{-\pi}^{\pi} \big| f(y) \, e^{in(x-y)} \big| \, dy = \|f\|_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^{|n|} \le \|f\|_1 \frac{2}{1 - |\lambda|} < +\infty$.

(Nell'ultimo passaggio ho usato che l'integrale è uguale a 2π se $n = 0$ e 0 altrimenti.)
Infine, per ottenere che g_λ è una funzione positiva la riscrivo come segue:

$$\begin{aligned} g_\lambda(x) &= \frac{1}{2\pi}\bigg[-1 + \sum_{n=0}^{\infty}\big(\lambda^n e^{inx} + \lambda^n e^{-inx}\big)\bigg] \\ &= \frac{1}{2\pi}\bigg[-1 + 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda e^{ix})^n\bigg] \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\bigg[-1 + \frac{2}{1-\lambda e^{ix}}\bigg] = \cdots = \frac{1-\lambda^2}{2\pi|1-\lambda e^{ix}|^2}\,. \end{aligned}$$

c) Se f è un polinomio trigonometrico allora i coefficienti $c_n(f)$ non nulli sono in numero finito, ed è chiaro che $T_\lambda f$ converge a f in L^1 per $\lambda \to 1$.
Dimostro per approssimazione che lo stesso vale per f arbitraria. Siccome i polinomi trigonometrici sono densi in $L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ (cfr. esercizio 3), per ogni $\delta > 0$ posso trovare un polinomio trigonometrico f_δ tale che

$$\|f - f_\delta\|_1 \le \delta\,, \tag{10}$$

e scomponendo $T_\lambda f - f$ come

$$T_\lambda f - f = T_\lambda(f - f_\delta) + (T_\lambda f_\delta - f_\delta) + (f_\delta - f)$$

ottengo

$$\|T_\lambda f - f\|_1 \le \|T_\lambda(f - f_\delta)\|_1 + \|T_\lambda f_\delta - f_\delta\|_1 + \|f_\delta - f\|_1\,. \tag{11}$$

Osservo ora che

$$\|T_\lambda(f - f_\delta)\|_1 = \|g_\lambda * (f - f_\delta)\|_1 \le \|g_\lambda\|_1 \|f - f_\delta\|_1 \le \delta\,. \tag{12}$$

(Nel primo passaggio ho usato l'identità dimostrata nel punto b), nel terzo ho usato la disuguaglianza dimostrata nell'esercizio 5a), e infine nell'ultimo passaggio ho usato (10) e di nuovo il punto b) per dedurre che, essendo g_λ positiva, $\|g_\lambda\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} g_\lambda\,dx = 1$.)
Mettendo insieme le stime (10)–(12) e il fatto che $T_\lambda f_\delta \to f_\delta$ in L^1 ottengo infine

$$\limsup_{\lambda\to 1} \|T_\lambda f - f\|_1 \le 2\delta\,,$$

e concludo la dimostrazione ricordando che δ può essere preso arbitrariamente piccolo.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Un approccio alternativo al punto c) è il seguente: usando che la funzione g_λ è positiva e ha integrale 1 su $I := [-\pi,\pi]$, e ponendo $\omega(y) := \|\tau_y f - f\|_{L^1(I)}$, ottengo

$$\begin{aligned} \|T_\lambda f - f\|_1 &= \int_I \big|f * g_\lambda(x) - f(x)\big|\,dx \\ &= \int_I \bigg|\int_I \big(f(x-y) - f(x)\big)\,g_\lambda(y)\,dy\bigg|\,dx \\ &\le \int_I\int_I |f(x-y) - f(x)|\,g_\lambda(y)\,dx\,dy = \int_I \omega(y)\,g_\lambda(y)\,dy\,. \end{aligned} \tag{13}$$

A questo punto, preso $\delta > 0$ e posto $I_\delta := [-\delta,\delta]$, spezzo l'ultimo integrale in due parti:

$$\|T_\lambda f - f\|_1 \le \int_{I\setminus I_\delta} \omega(y)\,g_\lambda(y)\,dy + \int_{I_\delta} \omega(y)\,g_\lambda(y)\,dy\,.$$

Si dimostra ora che il primo integrale converge a 0 per $\lambda \to 1$ usando il teorema di convergenza dominata e i seguenti fatti:

- $g_\lambda(y) \to 0$ per ogni $y \ne 0$;
- la funzioni g_λ sono equilimitate su I_δ (ma non su I!);
- la funzione ω è limitata su I (da $2\|f\|_1$).

Per quanto riguarda il secondo integrale, usando di nuovo che g_λ ha integrale 1 ottengo la stima

$$\int_{I_\delta} \omega(y)\,g_\lambda(y)\,dy \le \sup_{|y|\le\delta} \omega(y)$$

ed il termine di destra tende a 0 per $\delta \to 0$ perchè ω è continua e $\omega(0) = 0$.

1 Sia ω la 2-forma su $\mathbb{R}^3$ data da $\omega = x_1 x_2 x_3 \, dx_1 \wedge dx_3$, e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la mappa data $f(s_1, s_2) := (s_1^2, s_1 s_2, s_2^2)$. Calcolare $d\omega$ e il pull-back $f^\# \omega$.

SOLUZIONE. Si tratta di semplici calcoli:

$$d\omega = d(x_1x_2x_3) \wedge dx_1 \wedge dx_3 = \frac{\partial(x_1x_2x_3)}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 = -x_1x_3 \, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \,,$$
$$f^\#\omega = (s_1^2)(s_1s_2)(s_2^2)\, d(s_1^2) \wedge d(s_2^2) = s_1^3 s_2^3 \,(2s_1 ds_1) \wedge (2s_2 ds_2) = 4s_1^4 s_2^4 \, ds_1 \wedge ds_2 \,.$$

2 Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} x_1^2 \, d\sigma_2(x)$.

SOLUZIONE. Parametrizzo la sfera $\mathbb{S}^2$ usando le coordinate polari:

$$x = \varphi(\alpha_1, \alpha_2) := \big(\cos\alpha_1, \sin\alpha_1 \cos\alpha_2, \sin\alpha_1 \sin\alpha_2\big)$$

con $0 \le \alpha_1 \le \pi$ e $0 \le \alpha_2 \le 2\pi$. Ricordando che $J\varphi = \sin\alpha_1$ ottengo

$$\int_{\mathbb{S}^2} x_1^2 \, d\sigma_2(x) = 2\pi \int_0^\pi \cos^2\alpha_1 \sin\alpha_1 \, d\alpha_1 = 2\pi \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{4\pi}{3} \,.$$

(Nel secondo passaggio ho usato il cambio di variabile $t = \cos\alpha_1$.)

OSSERVAZIONI. Lo stesso risultato può essere ottenuto senza fare alcun calcolo: per ragioni di simmetria (dire quali) si ha che

$$\int_{\mathbb{S}^2} x_1^2 \, d\sigma_2(x) = \int_{\mathbb{S}^2} x_2^2 \, d\sigma_2(x) = \int_{\mathbb{S}^2} x_3^2 \, d\sigma_2(x) \,,$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{S}^2} x_1^2 \, d\sigma_2(x) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}^2} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \, d\sigma_2(x) = \frac{1}{3} \int_{\mathbb{S}^2} 1 \, d\sigma_2(x) = \frac{\sigma_2(\mathbb{S}^2)}{3} = \frac{4\pi}{3} \,.$$

3 Sia Ω il disco di centro 0 e raggio 2 in $\mathbb{R}^2$. Trovare la soluzione dell'equazione $\Delta u = 1 + x + y$ su Ω che soddisfa $u = xy$ su $\partial\Omega$.

SOLUZIONE. Osservo che Ω è definito dalla disequazione $x^2 + y^2 \le 4$ e sia il dato al bordo che il termine noto dell'equazione sono polinomi. Pertanto, per quanto visto a lezione, l'unica soluzione u è un polinomio di grado 3 della forma

$$u(x,y) = p(x,y)\,(x^2 + y^2 - 4) + xy \tag{1}$$

con p polinomio di grado 1, ovvero della forma $p(x,y) = ax + by + c$.
La funzione u in (1) soddisfa sempre la condizione al bordo, e trovo a, b, c imponendo che sia soddisfatta anche l'equazione. Tenendo conto che

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (6ax + 2by + 2c) + (2ax + 6by + 2c) = 8ax + 8by + 4c \,,$$

l'equazione $\Delta u = 1 + x + y$ diventa

$$8ax + 8by + 4c = 1 + x + y$$

da cui ottengo $a = b = \frac{1}{8}$ e $c = \frac{1}{4}$, ovvero

$$u(x,y) = \tfrac{1}{8}\big(x + y + 2)(x^2 + y^2 - 4) + xy \,.$$

4 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione a supporto compatto e di classe C^k con $k \ge 1$. Dimostrare che $y^h \widehat{f} \in L^1$ per $h = 0, \dots, k-1$.

SOLUZIONE. Siccome $D^h f \in L^1$ per $h = 1, \dots, k$, applicando iterativamente la formula per la trasformata della derivata vista a lezione ottengo che

$$\widehat{D^h f} = (iy)^h \widehat{f} \,.$$

Se inoltre $h < k$ ho che $g := D^h f$ è una funzione di classe C^1 tale che $g \in L^1$ e $g' \in L^2$, e abbiamo visto a lezione che in tal caso $\widehat{g} \in L^1$. Siccome $\widehat{g} = \widehat{D^h f} = (iy)^h \widehat{f}$, deduco che $y^h \widehat{f} \in L^1$.

5 a) Scrivere $u_0(x) := \sin x \cos^2 x$ come combinazione lineare di $\sin(nx)$ con $n = 1, 2, \dots$
b) Trovare la soluzione u problema (P) dato dall'equazione $u_t = -u_{xx} + \cos t \cdot u$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$. [*Non si chiede di discutere l'unicità.*]

<u>SOLUZIONE</u>. a) Scrivendo $\sin x$ e $\cos x$ in termini di e^{ix} e e^{-ix} ottengo

$$\begin{aligned} u_0(x) := \sin x \cos^2 x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 \\ &= \tfrac{1}{8i} \big(e^{3ix} + e^{ix} - e^{-ix} - e^{-3ix} \big) = \tfrac{1}{4} \sin x + \tfrac{1}{4} \sin(3x) \,. \end{aligned}$$

b) Scrivendo l'incognita u in serie di seni rispetto alla variabile x, vale a dire

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin(nx) \,,$$

ottengo (formalmente) che l'equazione e la condizione iniziale in (P) sono soddisfatte se i coefficienti b_n risolvono il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = (n^2 + \cos t) y \\ y(0) = b_n^0 \end{cases} \tag{2}$$

dove b_n^0 sono i coefficienti della serie in seni del dato iniziale u_0, vale a dire $b_n^0 = \frac{1}{4}$ se $n = 1, 3$ e $b_n^0 = 0$ altrimenti (punto a)). Siccome la soluzione dell'equazione differenziale in (2) è

$$y = c\, e^{n^2 t + \sin t} \quad \text{con } c \in \mathbb{R},$$

ottengo che $b_1(t) = \frac{1}{4} e^{t + \cos t}$, $b_3(t) = \frac{1}{4} e^{9t + \cos t}$, e $b_n(t) = 0$ per $n \neq 1$, 3, e dunque la soluzione di (P) è la funzione $u : \mathbb{R} \times [0, \pi] \to \mathbb{R}$ data da

$$u(t, x) = \tfrac{1}{4} e^{t + \cos t} \sin x + \tfrac{1}{4} e^{9t + \cos t} \sin(3x) \,.$$

In effetti è facile verificare che u risolve il problema (P).

6 Sia (x_n) una successione in $\mathbb{R}^d$ e sia (a_n) una successione in $\mathbb{C}$ tale che $\sum_1^\infty |a_n| < +\infty$.
Data $u \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ pongo

$$Tu := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \tau_{x_n} u \,.$$

a) Dimostrare che la funzione Tu è ben definita ed appartiene a $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$.
b) Trovare $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continua e limitata tale che $\widehat{Tu} = g \, \widehat{u}$ per ogni $u \in L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Ricordo il seguente lemma, visto a lezione:
Data una successione (x_n) in uno spazio normato X tale che $\sum_n \|x_n\| < +\infty$, la successione delle somme parziali della serie $\sum_n x_n$ è di Cauchy, e se X è completo la serie converge (in X).
Dimostro quindi che la serie che definisce Tu converge in $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ facendo vedere che la serie delle norme L^p degli addendi è finita:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big\| a_n \, \tau_{x_n} u \big\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, \|\tau_{x_n} u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right) \|u\|_p < +\infty$$

(nel secondo passaggio ho usato che la norma L^p è invariante per traslazioni).
b) Sia u una funzione in L^1. Tralasciando per un attimo che ho a che fare con somme infinite, usando la linearità della TdF e la formula vista a lezione per la TdF della traslata di una funzione ottengo

$$\widehat{Tu} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-x_n \cdot y} \, \widehat{u}(y)$$

(dove $\cdot$ indica il prodotto scalare in $\mathbb{R}^d$), e quindi

$$\widehat{Tu} = g \, \widehat{u} \tag{3}$$

con
$$g(y) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-x_n \cdot y} \,. \tag{4}$$
Voglio ora dimostrare rigorosamente la formula (3). Per cominciare osservo che la serie di funzioni continue in (4) converge totalmente su $\mathbb{R}$, infatti
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| a_n e^{-x_n \cdot y} \right\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty \,,$$
e quindi g è una funzione ben definita su $\mathbb{R}$, continua e limitata.

Ora, per ogni $N = 1, 2, \dots$ considero la somma parziale
$$T_N u := \sum_{n=1}^{N} a_n \, \tau_{x_n} u \,;$$
trattandosi di una somma finita è vero che
$$\mathscr{F}\big(T_N u\big) = \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{N} a_n \, e^{-x_n \cdot y} \right)}_{g_N} \widehat{u}(y)$$
e ottengo la (3) passando a limite per $N \to +\infty$. Per la precisione osservo che

(i) $T_N u \to T u$ in L^1;

(ii) $\mathscr{F}\big(T_N u\big) \to \widehat{Tu}$ uniformemente (per (i) e per la continuità della TdF);

(iii) $g_N \to g$ uniformemente, e quindi $\mathscr{F}\big(T_N u\big) = g_N \widehat{u} \to g\widehat{u}$ uniformemente;

(iv) mettendo insieme (ii) e (iii) ottengo che $\widehat{Tu} = g\widehat{u}$, vale a dire la (3).

<u>OSSERVAZIONI</u>. La formula (3) può anche essere dimostrata direttamente (cioè senza ricorrere ad approssimazioni): il punto chiave è scambiare la Trasformata di Fourier con la somma infinita:
$$\begin{aligned}
\widehat{Tu} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-iy \cdot x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \tau_{x_n} u \, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} a_n \, \tau_{x_n} u \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \widehat{\tau_{x_n} u} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ix_h \cdot y} \right) \widehat{u} \,.
\end{aligned}$$
Nel secondo passaggio ho scambiato serie ed integrale, e ho potuto farlo perché
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-iyx} a_n \, \tau_{x_n} u \right| dx = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int_{\mathbb{R}} \tau_{x_n} |u| \, dx = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \right) \|u\|_1 < +\infty \,.$$

7 Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile tale che $e^{m|x|} g \in L^1$ per qualche $m > 0$.

a) Dimostrare che $\widehat{g}$ è la restrizione ad $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa.

b) Dimostrare che se $\int_{\mathbb{R}} x^n g(x) \, dx = 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots$ allora $g = 0$ q.o.

c) Dato $a > 0$, dimostrare che lo span di $X := \big\{ x^n e^{-ax^2} : n = 0, 1, \dots \big\}$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$.

d) Far vedere che la conclusione in b) non vale se si sostituisce l'ipotesi che $e^{m|x|} g \in L^1$ per qualche $m > 0$ con $x^n g \in L^1$ per ogni $n = 0, 1, \dots$.

[*Suggerimento per b): dimostrare che* $D^n \widehat{g}(0) = 0$ *per ogni* n.]

<u>SOLUZIONE</u>. a) Pongo $A := \big\{ z \in \mathbb{C} \colon |\operatorname{Im} z| < m \big\}$ e dimostro che la funzione $h : A \to \mathbb{C}$ data da
$$h(z) := \int_{\mathbb{R}} g(x) \, e^{-ixz} \, dx$$
è ben definita ed è olomorfa (e chiaramente coincide con $\widehat{g}$ su $\mathbb{R}$).

Per far vedere che $h(z)$ è ben definita per ogni $z \in A$ ricordo che
$$\left| e^{-ixz} \right| = e^{\operatorname{Re}(-ixz)} = e^{x \operatorname{Im}(z)} \leq e^{|x||\operatorname{Im}(z)|} \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{C},$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}} \left| g(x)\, e^{-ixz} \right| dx \le \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, e^{m|x|}\, dx < +\infty \, .$$

La dimostrazione che h è olomorfa può essere fatta in più modi, e tutti si basano sul fatto che la funzione integranda $g(x)\, e^{-ixz}$ nella definizione di $h(z)$ è olomorfa rispetto alla variabile z. Una via è la seguente: faccio vedere che, per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$, h coincide nel disco aperto $B(y_0, m)$ con una serie di potenze complesse centrata in y_0, e siccome questi dischi ricoprono A, posso concludere che h è olomorfa su A. Presi $y_0 \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{C}$ con $|w| < m$ vale infatti che

$$\begin{aligned} h(y_0 + w) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-ix(y_0+w)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-ixy_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ixw)^n}{n!}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-i)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} g(x)\, e^{-ixy_0}\, x^n\, dx \right) w^n \, , \end{aligned} \tag{5}$$

dove nel secondo passaggio ho scritto $e^{-ix(y_0+w)} = e^{-ixy_0} \cdot e^{-ixw}$ ed ho sviluppato il secondo fattore in serie di potenze, mentre nel terzo passaggio ho scambiato serie ed integrale; per giustificare questo scambio osservo che

$$\int_{\mathbb{R}} \left| g(x)\, e^{-ixy_0} \right| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|-ixw|^n}{n!}\, dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\; e^{|xw|}\, dx \le \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\; e^{m|x|}\, dx < +\infty \, .$$

b) Ricordando che la derivata n-esima di h (in senso complesso) coincide in tutti i punti di $\mathbb{R}$ con la derivata n-esima di $\widehat{g}$, e usando la formula

$$D^n \widehat{g} = \mathscr{F}\big((-ix)^n g \big) \, ,$$

ottengo

$$D^n h(0) = D^n \widehat{g}(0) = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} g(x)\, x^n\, dx = 0 \, .$$

Dunque tutti i coefficienti della serie di Taylor di h centrata in 0 sono tutti nulli, e per il principio di identità delle funzioni analitiche $h = 0$ su tutto l'aperto connesso A. In particolare $\hat{g} = 0$ su tutto $\mathbb{R}$, e quindi $g = 0$ q.o. per l'iniettività della TdF.

c) L'enunciato $\overline{\mathrm{Span}(X)} = L^2(\mathbb{R})$ equivale a $X^\perp = \{0\}$, cioè al fatto che data $f \in L^2(\mathbb{R})$ vale la seguente implicazione:

$$\int_{\mathbb{R}} x^n e^{-ax^2} f(x)\, dx = 0 \text{ per } n = 0, 1, \dots \implies f = 0 \text{ q.o.}$$

Dimostro questa implicazione ponendo $g(x) := e^{-ax^2} f(x)$ e usando il punto b). A questo scopo dimostro che $g(x)\, e^{m|x|}$ appartiene a L^1 per qualunque $m > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, e^{m|x|}\, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, \underbrace{e^{-ax^2 + m|x|}}_{\varphi(x)}\, dx \le \|f\|_2 \|\varphi\|_2 < +\infty$$

(nel secondo passaggio ho usato la disuguaglianza di Hölder, nel terzo ho usato che la funzione φ appartiene a L^2 perché è continua e decade a 0 in modo più che esponenziale per $x \to \pm\infty$).

d) Devo trovare una funzione g non q.o. nulla tale che $x^n g$ appartiene a L^1 per ogni n e

$$\int_{\mathbb{R}} x^n g(x)\, dx = 0 \quad \text{per } n = 0, 1, \dots \tag{6}$$

So che in tal caso $\widehat{g}$ deve essere di classe C^∞ e che, come già osservato in b), (6) equivale a

$$D^n \widehat{g}(0) = 0 \quad \text{per } n = 0, 1, \dots \tag{7}$$

Prendo quindi una funzione f su $\mathbb{R}$ di classe C_c^∞, non identicamente nulla e tale che $D^n f(0) = 0$ per ogni n, e pongo

$$g(x) := \tfrac{1}{2\pi}\, \widehat{f}(-x) \, ,$$

in modo da avere che

$$\widehat{g} = f$$

(questa identità segue dalla formula di inversione e dal fatto che $\widehat{f}(-x) = \mathscr{F}^* f(x)$). Il fatto che $x^n g \in L^1$ per ogni n segue dall'esercizio 4, e g soddisfa la condizione (6) perché $\widehat{g} = f$ soddisfa la condizione (7).

Osservazioni. A proposito del punto b), il fatto che i coefficienti della serie di Taylor di h centrata in 0 sono tutti nulli segue anche dallo sviluppo in serie (5) per $y_0 = 0$.

A proposito del punto a), il fatto che la funzione h è olomorfa può essere dimostrato in più modi; ne presento qui altri due.

Prima dimostrazione alternativa.
Faccio vedere che la funzione h è continua e che la 1-forma $h(z)\,dz$ è esatta (su A) e quindi uso il teorema di Morera per dedurne che h è olomorfa. Devo dunque far vedere che l'integrale di $h(z)\,dz$ su ogni curva chiusa $\gamma : [0,1] \to A$ di classe C^1 è nullo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma h(z)\,dz &= \int_0^1 h(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_\mathbb{R} g(x)\,e^{ix\gamma(t)}\,\dot\gamma(t)\,dx \right) dt \\ &= \int_\mathbb{R} \left(\int_0^1 g(x)\,e^{ix\gamma(t)}\,\dot\gamma(t)\,dt \right) dx = \int_\mathbb{R} g(x) \left(\int_\gamma e^{ixz}\,dz \right) dt = 0\,.\end{aligned}$$

Nel primo e quarto passaggio ho usato la definizione di integrale di una 1-forma su un cammino, nell'ultimo passaggio ho usato che la funzione e^{ixz} è olomorfa in z per ogni x, e quindi la forma $e^{ixz}\,dz$ è esatta; nel terzo ho usato il teorema di Fubini, e ho potuto farlo perché

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_\mathbb{R} \left|g(x)\,e^{ix\gamma(t)}\,\dot\gamma(t)\right| dx \right) dt &\le \int_0^1 \left(\int_\mathbb{R} |g(x)|\,e^{m|x|}\,dx \right) |\dot\gamma(t)|\,dt \\ &= \mathrm{lungh}(\gamma) \int_\mathbb{R} |g(x)|\,e^{m|x|}\,dx < +\infty\,.\end{aligned}$$

Seconda dimostrazione alternativa.
si dimostra che h è di classe C^1 su A (in senso reale) e soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann, vale a dire $D_t h = i D_y h$ dove y e t sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria della variabile complessa z. Applicando infatti il teorema di derivazione sotto il segno integrale, e usando che e^{-ixz} è olomorfa in z e quindi soddisfa l'equazione di C.-R., ottengo

$$D_t h(z) = \int_\mathbb{R} D_t\big(e^{-ixz}\big)\,g(x)\,dx = \int_\mathbb{R} i D_y\big(e^{-ixz}\big)\,g(x)\,dx = D_y h(z)\,.$$

Qui ho usato la seguente versione del teorema di derivazione sotto il segno di integrale:
Siano dati E insieme misurabile in $\mathbb{R}^d$, Ω aperto in $\mathbb{R}^n$, $f = f(x,s)$ funzione misurabile su $E \times \Omega$ (a valori reali, complessi o vettoriali), continua e di classe C^1 nella variabile s_j, tale che

- *esiste $g_1 \in L^1(E)$ tale che $|f(x,s)| \le g_1(x)$,*
- *esiste $g_2 \in L^1(E)$ tale che $|D_j f(x,s)| \le g_2(x)$, dove D_j è la derivata parziale rispetto a s_j.*

Allora la funzione $F : \Omega \to \mathbb{C}$ data da $F(s) := \int_E f(x,s)\,dx$ è continua e di classe C^1 nella variabile s_j e $D_j F(s) = \int_E D_j f(x,s)\,dx$.

8 Per $n = 0, 1, \dots$ pongo $u_n(x) := e^{x^2/2}\,D^n(e^{-x^2})$. Dimostrare che:

a) $u_{n+1} = \dot u_n - x u_n$;

b) $u_n = p_n\,e^{-x^2/2}$ con p_n polinomio di grado n;

c) $\widehat{u_n} = \sqrt{2\pi}(-i)^n\,u_n$;

d) le funzioni u_n formano un sistema ortogonale in $L^2(\mathbb{R})$;

e) opportunamente rinormalizzate, le funzioni u_n formano una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R})$.

[*Suggerimento per d): dato $m < n$ scrivere $\langle u_n \,;\, u_m\rangle$ come $\int_{\mathbb{R}} D^n(e^{-x^2})\, p_m\, dx$ e integrare per parti $m+1$ volte. Suggerimento per e): usare l'esercizio 7.*]

<u>SOLUZIONE</u>. a) Si tratta di un semplice calcolo:

$$\dot u_n = \big(e^{x^2/2}\, D^n(e^{-x^2})\big)' = xe^{x^2/2}\, D^n(e^{-x^2}) + e^{x^2/2}\, D^{n+1}(e^{-x^2}) = xu_n - u_{n+1}\,.$$

b) Procedo per induzione su n: il caso $n = 0$ è immediato perché $u_0 = e^{-x^2/2}$, e supponendo vera l'affermazione per n, tramite la formula in a) ottengo

$$u_{n+1} = \dot u_n - xu_n = \big(p_n\, e^{-x^2/2}\big)' - xp_n\, e^{-x^2/2} = (\dot p_n - 2xp_n)\, e^{-x^2/2}\,,$$

e dunque $u_{n+1} = p_{n+1}\, e^{-x^2/2}$ dove

$$p_{n+1} := \dot p_n - 2xp_n\,; \tag{8}$$

per concludere noto che p_{n+1} è polinomio di grado $n+1$ perché p_n è un polinomio di grado n.

c) Procedo per induzione su n: il caso $n = 0$ si riduce alla nota formula $\mathscr{F}(e^{-x^2/2}) = \sqrt{2\pi}\, e^{-y^2/2}$, e supponendo vera l'affermazione per n la dimostro per $n+1$:

$$\begin{aligned}\widehat{u_{n+1}} &= \mathscr{F}\big(\dot u_n - i(-ixu_n)\big)\\ &= iy\,\widehat{u_n} - i(\widehat{u}_n)' = \sqrt{2\pi}(-i)^{n+1}(\dot u_n - yu_n) = \sqrt{2\pi}(-i)^{n+1}u_{n+1}\,.\end{aligned}$$

(nel primo e quarto passaggio ho usato la formula ricorsiva del punto a); nel terzo ho usato l'ipotesi induttiva).

d) Dimostro che $\langle u_n \,;\, u_m\rangle = 0$ per ogni $m < n$. Usando la definizione di u_n e la rappresentazione di u_m data al punto b), ed integrando per parti $m+1$ volte, ottengo

$$\langle u_n \,;\, u_m\rangle = \int_{\mathbb{R}} D^n(e^{-x^2})\, p_m\, dx = (-1)^{m+1}\int_{\mathbb{R}} D^{n-m-1}(e^{-x^2})\, D^{m+1}(p_m)\, dx = 0\,.$$

Nel terzo passaggio ho usato che p_m ha grado m e quindi $D^{m+1}(p_m) = 0$; nel secondo passaggio ho integrato per parti $m+1$ volte, e per la precisione ho usato il seguente lemma:

Dato $k = 1, 2, \dots$ e data $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che g e g' hanno crescita la più polinomiale a $\pm\infty$, allora le funzioni $D^k(e^{-x^2})\, g$ e $D^{k-1}(e^{-x^2})\, g'$ appartengono a $L^1(\mathbb{R})$ e vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_{\mathbb{R}} D^k(e^{-x^2})\, g\, dx = -\int_{\mathbb{R}} D^{k-1}(e^{-x^2})\, g'\, dx\,. \tag{9}$$

La prima parte di questo enunciato la dimostro usando che $D^k(e^{-x^2}) = q_k(x)\, e^{-x^2}$ con q_k polinomio di grado k, mentre la (9) la ottengo passando al limite per $a \to +\infty$ nella classical formula di integrazione per parti:

$$\int_{-a}^{a} D^k(e^{-x^2})\, g\, dx = \Big|D^{k-1}(e^{-x^2})\, g\Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} D^{k-1}(e^{-x^2})\, g'\, dx\,.$$

e) Tenendo conto del punto d) basta dimostrare che $X := \mathrm{Span}(\{u_n\})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$, e grazie all'esercizio 7c) basta far vedere che $x^n e^{-x^2/2}$ appartiene a X per $n = 0, 1, \dots$

Quest'ultima affermazione la si dimostra per induzione su n usando che $u_n = p_n\, e^{-x^2/2}$ con p_n polinomio di grado n (punto b)).

<u>OSSERVAZIONI</u>. I polinomi p_n coincidono, a meno di un fattore moltiplicativo, con i polinomi di Hermite. Il punto c) dice che le funzioni u_n sono autovettori della Trasformata di Fourier; i punti c) ed e) dicono che le funzioni u_n, debitamente rinormalizzate, formano una base di Hilbert di $L^2(\mathbb{R})$ che "diagonalizza" la trasformata di Fourier.

La costante di rinormalizzazione al punto e) può essere calcolata esplicitamente: procedendo infatti come al punto d) ottengo

$$\|u_n\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} D^n(e^{-x^2})\, p_n\, dx = (-1)^n\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, D^n(p_n)\, dx = 2^n n! \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\, 2^n n!$$

dove nel secondo passaggio ho integrato per parti n volte, nel terzo ho usato che il monomio di grado massimo in p_n è $(-2)^n x^n$, cosa che segue dalla formula ricorsiva (8), e dunque

$$D^n(p_n) = D^n((-2)^n x^n) = (-2)^n n!$$

e infine nel quarto passaggio ho usato che l'integrale di e^{-x^2} è $\sqrt{\pi}$.

1 Sia $d = 1, 2, \dots$ e sia E l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ tali che $|y| \leq \dfrac{1}{x^2 + x^4}$.
Dire per quali $p \in [1, \infty)$ la funzione $x^5 y$ appartiene a $L^p(E)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Posto $r(x) := \frac{1}{x^2+x^4}$ vale che

$$\begin{aligned}
\|x^5 y\|_p^p &= \int_E |x^5 y|^p \, dx \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{B(0,r(x))} |y|^p \, dy \right) |x|^{5p} \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{r(x)} c_d \rho^{p+d-1} \, d\rho \right) |x|^{5p} \, dx = \frac{2c_d}{p+d} \int_0^\infty r(x)^{p+d} x^{5p} \, dx \,,
\end{aligned}$$

dove c_d è come al solito il volume della sfera unitaria $\mathbb{S}^{d-1}$. Tenendo conto che $r(x) \sim x^{-2}$ per $x \to 0$ e $r(x) \sim x^{-4}$ per $x \to +\infty$ ottengo che l'ultimo integrale si comporta come la somma dei seguenti integrali impropri:

$$\int_0^1 x^{3p-2d} \, dx + \int_1^\infty x^{p-4d} \, dx \,,$$

e dunque è finito se e solo se $3p - 2d > -1$ e $p - 4d < -1$.
Pertanto $x^5 y$ appartiene a $L^p(E)$ se e solo se $\frac{2}{3}d - \frac{1}{3} < p < 4d - 1$.

2 Calcolare la TdF di $u(x) := e^{-|x|} \cos x$.

<u>SOLUZIONE</u>. Ricordando che $\mathscr{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+y^2}$ e usando la formula $\mathscr{F}(e^{iax} u) = \widehat{u}(y-a)$ ottengo

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(e^{-|x|} \cos x) &= \mathscr{F}\left(\tfrac{1}{2} e^{ix} e^{-|x|} + \tfrac{1}{2} e^{-ix} e^{-|x|}\right) \\
&= \frac{1}{1 + (y-1)^2} + \frac{1}{1 + (y+1)^2} = \frac{4 + 2y^2}{4 + y^4} \,.
\end{aligned}$$

3 Sia $\alpha \in \wedge^2(\mathbb{R}^{2n})$ dato da $\alpha := dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$.
Calcolare $\beta := \underbrace{\alpha \wedge \cdots \wedge \alpha}_{n \text{ volte}}$.

<u>SOLUZIONE</u>. Pongo

- $\wedge^n \alpha$ per la potenza n-esima di α rispetto al prodotto esterno;
- $\alpha_j := dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}$ per $j = 1, \dots, n$; quindi $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$;
- $\beta_0 := dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$;
- J per l'insieme delle funzioni σ da I in sé dove $I := \{0, \dots, n\}$.

Usando la proprietà distributiva del prodotto esterno ottengo

$$\beta := \wedge^n \alpha = \bigwedge^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \right) = \sum_{\sigma \in J} \bigwedge_{j=1}^n \alpha_{\sigma(j)} \,.$$

Osservo ora che

- se σ non è iniettiva allora $\wedge_j \alpha_{\sigma(j)} = 0$ perchè svolgendo il prodotto trovo che il fattore dx_i appare almeno due volte per almeno due indici i;
- se σ è iniettiva (cioè è una permutazione di I) allora $\wedge_j \alpha_{\sigma(j)} = \wedge_j \alpha_j = \beta_0$ perché i fattori α_j, essendo tutti 2-covettori, commutano tra di loro.

Ricordando infine che il numero delle permutazioni di I è $n!$ ottengo

$$\beta = \sum_{\sigma \text{ perm.}} \beta_0 = n! \, \beta_0 \,.$$

Osservazioni. Dimostrazione alternativa proposta da alcuni dei presenti (traccia): prendo α_j come sopra e per $m = 1, 2 \dots$ pongo

$$\gamma_m := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \,.$$

Utilizzando il fatto che i multi-covettori di ordine pari commutano dimostro per induzione su k che per $k = 1, 2 \dots$ vale

$$\wedge^{k+1}\gamma_{m+1} = \big(\wedge^k \gamma_m \big) \wedge (\gamma_m + k\alpha_{m+1}) \,.$$

In particolare, osservando che $\wedge^{m+1}\gamma_m = 0$ (perché, in un certo senso, si tratta di un $2m+2$ covettore su $\mathbb{R}^m$), per $k = m+1$ ottengo

$$\wedge^{m+1}\gamma_{m+1} = m\big(\wedge^m \gamma_m \big) \wedge \alpha_{m+1}$$

e partendo da questa identità dimostro per induzione su m che

$$\wedge^m \gamma_m = m!\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2m} \,,$$

e per $m = n$ questa identità si riscrive come $\beta = n!\beta_0$.

$\boxed{4}$ Sia $f \in L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ una funzione 2π-periodica e sia $g \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.

a) Dimostrare che $f * g$ è ben definita, appartiene a $L^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, ed è 2π-periodica.

b) Calcolare i coefficienti di Fourier di $f * g$ in funzione della Trasformata di Fourier di g e dei coefficienti di Fourier di f.

Soluzione. a) Sappiamo dalla teoria che il prodotto di convoluzione $f * g$ è ben definito, continuo e limitato se $f \in L^\infty$ e $g \in L^1$ (perché 1 e ∞ sono esponenti coniugati); la periodicità segue immediatamente dalla periodicità di f.

b) I coefficienti di Fourier di $f * g$ sono dati da:

$$\begin{aligned} c_n(f*g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) e^{-inx}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, g(y)\, e^{-inx}\, dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, e^{-in(x-y)}\, dx \right) g(y)\, e^{-iny}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, g(y)\, e^{-iny}\, dy = c_n(f)\, \widehat{g}(n) \,, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio ho applicato il teorema di Fubini, nel terzo ho scomposto e^{-inx} come $e^{-in(x-y)}e^{-iny}$, e nel quarto ho usato che l'integrale di una funzione periodica su un periodo coincide con l'integrale di una qualunque traslata. Ho potuto applicare il teorema di Fubini perché

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big| f(x-y)\, g(y)\, e^{-inx} \big|\, dx \right) dy \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-y)|\, dx \right) |g(y)|\, dy \\ &\qquad \le \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_\infty\, |g(y)|\, dx = \|f\|_\infty \|g\|_1 < +\infty \,. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Consideriamo lo spazio di Hilbert $L^2 = L^2(\mathbb{R})$, il sottospazio X delle funzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e con supporto compatto, e l'operatore lineare $T : X \to L^2$ dato da $Tu := u - \ddot{u}$.

a) Dimostrare che T è autoaggiunto.

b) Discutere la segnatura di T.

c) Cosa succede se nella definizione di X sostituisco l'ipotesi che u abbia supporto compatto con l'ipotesi $u, \dot{u}, \ddot{u} \in L^2$?

<u>SOLUZIONE</u>. a) Date $u, v \in X$ e preso a tale che il supporto di v è contenuto in $[-a, a]$ ho che

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle &= \int_{-a}^{a} uv\,dx - \int_{-a}^{a} \ddot{u}v\,dx \\ &= \int_{-a}^{a} uv\,dx - \Big|\dot{u}v\Big|_{-a}^{a} + \int_{-a}^{a} \dot{u}\dot{v}\,dx = \int_{\mathbb{R}} uv + \dot{u}\dot{v}\,dx\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho integrato per parti il secondo integrale, nel terzo ho usato il fatto che $v(a) = v(-a) = 0$), ovvero

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_{\mathbb{R}} uv + \dot{u}\dot{v}\,dx\,. \tag{1}$$

Applicando questa identità a $\langle Tu\,;\,v\rangle$ e $\langle Tv\,;\,u\rangle$ ottengo

$$\langle Tu\,;\,v\rangle = \int_{\mathbb{R}} uv + \dot{u}\dot{v}\,dx = \langle u\,;\,Tv\rangle\,.$$

b) Data $u \in X$, l'identità (1) dà

$$\langle Tu\,;\,u\rangle = \int_{\mathbb{R}} u^2 + \dot{u}^2\,dx \geq \|u\|_2^2\,,$$

e dunque la forma quadratica associata a T è definita positiva.

c) Non cambia nulla: T è sempre autoaggiunto e definito positivo. In effetti mi basta dimostrare che l'identità (1) vale anche in questo caso, e per farlo seguo l'idea di una dimostrazione vista a lezione.
Prese $u, v \in X$, allora $\dot{u}, v \in L^2$ implica $\dot{u}v \in L^1$ e quindi il liminf di $|\dot{u}v|$ a $\pm\infty$ deve essere 0. Pertanto posso trovare due successioni di numeri reali (a_n) e (b_n) tali che, per $n \to \infty$,

$$a_n \to -\infty\,, \quad b_n \to +\infty\,, \tag{2}$$
$$\dot{u}(a_n)\,v(a_n) \to 0\,,\ \dot{u}(b_n)\,v(b_n) \to 0\,. \tag{3}$$

Integrando per parti ottengo che, per ogni n,

$$\int_{a_n}^{b_n} \ddot{u}\,v\,dx = \Big|\dot{u}v\Big|_{a_n}^{b_n} - \int_{a_n}^{b_n} \dot{u}\dot{v}\,dx\,,$$

e passando al limite per $n \to \infty$ ottengo

$$\int_{\mathbb{R}} \ddot{u}\,v\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \dot{u}\dot{v}\,dx\,,$$

che implica la (1). Nel passaggio al limite ho usato che, per $n \to \infty$,

- $\big|\dot{u}v\big|_{a_n}^{b_n} \to 0$ per via della (3);
- $\int_{a_n}^{b_n} \ddot{u}\,v\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a_n,b_n]}\ddot{u}\,v\,dx \to \int_{\mathbb{R}} \ddot{u}\,v\,dx$ per il teorema di convergenza dominata (la convergenza puntuale segue dal fatto che $\mathbf{1}_{[a_n,b_n]} \to 1$ in ogni punto per via di (2), e la dominazione è $|\ddot{u}v|$, che appartiene a L^1 perchè $\ddot{u}, v \in L^2$);
- $\int_{a_n}^{b_n} \dot{u}\dot{v}\,dx \to \int_{\mathbb{R}} \dot{u}\dot{v}\,dx$ sempre per convergenza dominata (ometto i dettagli).

$\boxed{6}$ Posto $u_0(x) := x^2 - \pi x$, consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = u_{xx} + tu$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$. Discutere l'esistenza della soluzione.

<u>SOLUZIONE</u>. Scrivo l'incognita u in serie di seni nella variabile x:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t)\,\sin(nx)\,.$$

Procedendo formalmente nel solito modo ottengo che l'equazione differenziale e la condizione iniziale in (P) sono soddisfatte se b_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = (t - n^2)y \\ y(0) = b_n^0 \end{cases}$$

dove b_n^0 sono i coefficienti in serie di seni del dato iniziale u_0, vale a dire

$$b_n^0 := \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (x^2 - \pi x) \sin(nx)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari,} \\ -\frac{8}{\pi n^3} & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

(Per calcolare l'integrale ho integrato per parti due volte.)

Pertanto

$$b_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari,} \\ -\frac{8}{\pi n^3} \exp\left(\frac{1}{2}t^2 - n^2 t\right) & \text{per } n \text{ dispari,} \end{cases} \tag{4}$$

e quindi la soluzione di (P) dovrebbe essere data da

$$u(t,x) = -\frac{8}{\pi} e^{t^2/2} \sum_{n=1,3,\dots} \underbrace{\frac{1}{n^3} e^{-n^2 t} \sin(nx)}_{u_n} . \tag{5}$$

Dimostro ora i seguenti enunciati:

(i) *la formula* (5) *definisce una funzione continua* u *su* $R := [0,+\infty) \times \mathbb{R}$*;*

(ii) u *è di classe* C^∞ *nell'aperto* $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$*;*

(iii) u *risolve* (P)*;*

(iv) *il problema* (P) *non ammette alcuna soluzione definita su* $(-\delta, 0] \times [0,\pi]$ *con* $\delta > 0$.

Siccome

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \frac{1}{n^3} ,$$

la serie di funzioni in (5) converge totalmente su R, e (i) è dimostrato.

Per ogni $\delta > 0$ sia $R_\delta := (\delta, +\infty) \times \mathbb{R}$; allora per ogni $h, k = 0, 1, \dots$ vale che

$$D_t^h D_x^k u_n = n^{2h+k-3} e^{-n^2 t} g_{h,k}(x)$$

dove $g_{h,k}(x)$ è $\pm\sin(nx)$ oppure $\pm\cos(nx)$. Da questa formula segue che

$$\left\| D_t^h D_x^k u_n \right\|_{L^\infty(R_\delta)} = n^{2h+k-3} e^{-n^2\delta} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) ,$$

e quindi la serie delle derivate $D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente in R_δ per qualunque h, k; pertanto u è una funzione di classe C^∞ sull'aperto R_δ. L'enunciato (ii) segue dal fatto che gli aperti R_δ ricoprono $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$.

La dimostrazione di (iii) è standard: il fatto che u soddisfa le condizioni al bordo e la condizione iniziale in (P) è immediato; la verifica che u risolve l'equazione differenziale in (P) è un calcolo diretto in cui si usa la convergenza dimostrata in (i) e (ii) per scambiare derivate e serie.

La dimostrazione di (iv) è pure standard: se esistesse una soluzione v definita su $(-\delta, 0] \times [0,\pi]$ allora i coefficienti b_n dello sviluppo in serie di seni dovrebbero necessariamente essere dati dalla formula (4), ma quindi, per ogni $t < 0$, non sarebbero infinitesimi per $n \to \infty$ e di conseguenza neanche in ℓ^2, cosa che è assurda.

7 Sia data $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^2. Si dice che u è *subarmonica* se $\Delta u \geq 0$ su $\mathbb{R}^d$. Dimostrare che:

a) se u è subarmonica allora vale (P_1): $u(x) \leq \fint_{\partial B} u\, d\sigma_{d-1}$ per ogni palla $B = B(x,r)$;

b) se u è subarmonica allora vale (P_2): $u(x) \leq \fint_B u\, d\mathscr{L}^d$ per ogni palla $B = B(x,r)$;

c) se u soddisfa (P_1) oppure (P_2) allora è subarmonica;

d) se u è subarmonica e Ω è un aperto limitato in $\mathbb{R}^d$ allora $\max\limits_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max\limits_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Pongo $\alpha_d := \mathscr{L}^d(B(0,1))$ e $c_d := \sigma_{d-1}(\partial B(0,1)) = d\alpha_d$ come al solito, e scrivo B_r per $B(x,r)$.

a) Sia $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Fissato $x \in \mathbb{R}^d$, per ogni $r > 0$ pongo

$$h(r) := \fint_{\partial B_r} u \, d\sigma_{d-1} \, .$$

Abbiamo visto a lezione che h è C^1 e vale

$$h'(r) = \frac{d}{dr} \fint_{\partial B_r} u \, d\sigma_{d-1} = \frac{c_d}{r^{d-1}} \int_{B_r} \Delta u \, d\mathscr{L}^d \, . \tag{6}$$

Pertanto se u è subarmonica allora h è una funzione crescente di r.
Inoltre sempre a lezione abbiamo visto che $h(r) \to u(x)$ per $r \to 0^+$.
Da queste due proprietà segue che $h(r) \geq u(x)$ per ogni $r > 0$, che è la (P_1).

b) Se u è subarmonica allora

$$\int_{B_r} u \, d\mathscr{L}^d = \int_0^r \left(\int_{\partial B_r} u \, d\sigma_{d-1} \right) d\rho \geq \int_0^r c_d \rho^{d-1} u(x) \, d\rho = \alpha_d r^d u(x) \, ,$$

dove il primo passaggio è un'identità vista a lezione e nel secondo ho usato la proprietà (P_1) dimostrata al punto a). Questa catena di disequazioni implica la proprietà (P_2).

c) Suppongo che u non sia subarmonica, ovvero che esista x tale che $\Delta u(x) < 0$, e dimostro che u non soddisfa le proprietà (P_1) e (P_2).
L'ipotesi $\Delta u(x) < 0$ implica che esiste r_0 tale che $\Delta < 0$ nella palla $B(x, r_0)$ e ragionando come nella dimostrazione del punto a) si ottiene che la funzione $h(r)$ è *strettamente decrescente* per $0 < r \leq r_0$, e quindi $h(r) < u(x)$ per $r \leq r_0$, per cui la (P_1) non vale. Argomentando poi come nella dimostrazione del punto b) si ottiene che $\fint_B u \, d\mathscr{L}^d < u(x)$ per $r \leq r_0$, e questo significa che non vale neanche la (P_2).

d) Procedo come nella dimostrazione del principio del massimo (ometto quindi i dettagli dei passaggi già visti a lezione). Siano dunque M e x_M il valore di massimo ed un punto di massimo di u relativamente all'insieme $\overline{\Omega}$. Se $x_M \in \partial\Omega$ la tesi è vera. Se invece $x_M \in \Omega$ considero la componente connessa A di Ω che contiene e x_M e l'insieme

$$E := \{ x \in A \colon u(x) = M \} \, .$$

Chiaramente E è chiuso in A, e usando la proprietà (P_2) si fa vedere che è anche aperto, e più precisamente per ogni $x \in E$ ed ogni r tale che $B(x, r) \subset \Omega$ vale che $B(x, r) \subset E$. Siccome A è connesso ed E è un sottoinsieme non vuoto e aperto e chiuso in A, allora E coincide con A. Pertanto $u = M$ su $\overline{A}$, e siccome ∂A interseca $\partial\Omega$, ottengo che il massimo di u su $\partial\Omega$ coincide con M.

$\boxed{8}$ Data Γ curva[1] compatta e di classe C^1 contenuta in $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$, e dati $h, k = 2, 3 \ldots$, considero l'insieme Σ dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ tali che $(|x|, |y|) \in \Gamma$.[2]

a) Dimostrare che Σ è una superficie compatta di classe C^1 e dimensione $d = h + k - 1$.

b) Esprimere il volume di Σ come integrale su Γ di un'opportuna funzione.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Sia $p : \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la mappa data da $p(x, y) := (|x|, |y|)$; per definizione

$$\Sigma = p^{-1}(\Gamma) \, .$$

Siccome p è continua e $|p(x, y)| \to +\infty$ se $|(x, y)| \to +\infty$, allora p è *propria*, vale a dire che $p^{-1}(K)$ è compatto per ogni K compatto. In particolare $\Sigma = p^{-1}(\Gamma)$ è compatto perchè Γ è compatto.

Dimostro ora che Σ si scrive localmente come luogo di zeri di una funzione scalare con gradiente non nullo (cioè di rango massimo), che costruisco partendo dal fatto che Γ si scrive come luogo di zeri di una funzione con gradiente non nullo.
Preso $(x_0, y_0) \in \Sigma$, ho che $z_0 := p(x_0, y_0)$ appartiene a Γ e quindi esiste un intorno U di z_0 e una funzione $g : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\nabla g \neq 0$ in U e

$$\Gamma \cap U = \{ z \in U \colon g(z) = 0 \} \, ,$$

[1] Per curva intendo una superficie di dimensione 1 senza bordo.
[2] Dunque Σ è la superficie di rotazione generata da Γ.

e siccome $z_0 \in \Gamma \subset (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ posso chiaramente supporre che

$$U \subset (0,+\infty)\times(0,+\infty)\,. \tag{7}$$

Pertanto

$$\Sigma \cap V = \big\{(x,y) \in V : G(x,y) = 0\big\} \quad \text{dove } V := p^{-1}(U) \text{ e } G := g \circ p.$$

Osservo ore che g è ben definita sull'aperto V, è di classe C^1 in quando composizione di mappe C^1, e per la precisione p è di classe C^1 sull'aperto $A := (\mathbb{R}^h \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^k \setminus \{0\})$ e V è contenuto in A per via di (7). Per concludere osservo che

$$\nabla G(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial z_1}(|x|,|y|)\,\frac{x}{|x|}\,,\ \frac{\partial g}{\partial z_2}(|x|,|y|)\,\frac{y}{|y|}\right) \neq 0 \quad \text{su } V$$

perché $\nabla g \neq 0$ su U.

b) Al solito, indico con $\mathbb{S}^{h-1}$ e $\mathbb{S}^{k-1}$ le sfere di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^h$ e $\mathbb{R}^k$ rispettivamente, e prendo due parametrizzazioni quasi iniettive $\Phi_1 : D_1 \to \mathbb{S}^{h-1}$ e $\Phi_2 : D_2 \to \mathbb{S}^{k-1}$ (per esempio le parametrizzazioni in coordinate sferiche).

Suppongo inoltre che Γ sia connesso e prendo una parametrizzazione quasi iniettiva $\gamma : I \to \Gamma$ (se Γ non è connesso devo prendere una parametrizzazione per ogni componente connessa di Γ, ma nella sostanza la dimostrazione non cambia).

Osservo quindi che Σ si scrive come unione di prodotti di sfere,

$$\Sigma = \bigcup_{z\in\Gamma} p^{-1}(z) = \bigcup_{z\in\Gamma} z_1\mathbb{S}^{h-1} \times z_2\mathbb{S}^{k-1} = \bigcup_{t\in[0,1]} \gamma_1(t)\,\mathbb{S}^{h-1} \times \gamma_2(t)\,\mathbb{S}^{k-1}\,,$$

e quindi una parametrizzazione quasi iniettiva di Σ è

$$\Phi : I \times D_1 \times D_2 \to \Sigma\,, \quad \Phi : (t,s_1,s_2) \mapsto \big(\gamma_1(t)\,\Phi_1(s_1),\ \gamma_2(t)\,\Phi_2(s_2)\big)\,.$$

Uso Φ per calcolare il volume di Σ. Devo prima calcolarne lo Jacobiano; osservo che

$$\nabla\Phi = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1\Phi_1 & \gamma_1\nabla\Phi_1 & 0 \\ \dot\gamma_2\Phi_2 & 0 & \gamma_2\nabla\Phi_2 \end{pmatrix}$$

(in questa formula e in quelle che seguono è sottinteso che le mappe γ, Φ_1 e Φ_2 e le loro derivate dipendono dalle rispettive variabili, vale a dire in t, s_1 e s_2, e che Φ_1 e Φ_2 sono vettori colonna); quindi

$$\begin{aligned} \nabla^t\Phi\,\nabla\Phi &= \begin{pmatrix} \dot\gamma_1\Phi_1^t & \dot\gamma_2\Phi_2^t \\ \gamma_1\nabla^t\Phi_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2\nabla^t\Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_1\Phi_1 & \gamma_1\nabla\Phi_1 & 0 \\ \dot\gamma_2\Phi_2 & 0 & \gamma_2\nabla\Phi_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot\gamma_1^2\Phi_1^t\Phi_1 + \dot\gamma_2^2\Phi_2^t\Phi_2 & \dot\gamma_1\gamma_1\Phi_1^t\nabla\Phi_1 & \dot\gamma_2\gamma_2\Phi_2^t\nabla\Phi_2 \\ \dot\gamma_1\gamma_1\nabla^t\Phi_1\,\Phi_1 & \gamma_1^2\nabla^t\Phi_1\,\nabla\Phi_1 & 0 \\ \dot\gamma_2\gamma_2\nabla^t\Phi_2\,\Phi_2 & 0 & \gamma_2^2\nabla^t\Phi_2\,\nabla\Phi_2 \end{pmatrix}\ ; \end{aligned}$$

ricordo adesso che ciascuna Φ_i parametrizza una sfera e quindi $\Phi_i^t\Phi_i = |\Phi_i|^2 = 1$, e derivando questa identità ottengo che $\Phi_i^t\nabla\Phi_i = \nabla^t\Phi_i\,\Phi_i = 0$, dunque la formula precedente diventa

$$\nabla^t\Phi\,\nabla\Phi = \begin{pmatrix} |\dot\gamma|^2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1^2\nabla^t\Phi_1\,\nabla\Phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2^2\nabla^t\Phi_2\,\nabla\Phi_2 \end{pmatrix}\,,$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} (J\Phi)^2 &= \det(\nabla^t\Phi\,\nabla\Phi) \\ &= |\dot\gamma|^2\,\det\!\big(\gamma_1^2\nabla^t\Phi_1\,\nabla\Phi_1\big)\,\det\!\big(\gamma_2^2\nabla^t\Phi_2\,\nabla\Phi_2\big) \\ &= |\dot\gamma|^2\,\gamma_1^{2h-2}(J\Phi_1)^2\,\gamma_2^{2k-2}(J\Phi_2)^2\,, \end{aligned}$$

e infine

$$J\Phi = |\dot\gamma|\,\gamma_1^{h-1}\gamma_2^{k-1}\,J\Phi_1\,J\Phi_2\,.$$

Posso ora calcolare il volume di Σ:

$$\begin{aligned}\sigma_d(\Sigma) &= \int_I \int_{D_1} \int_{D_1} |\dot\gamma|\, \gamma_1^{h-1} \gamma_2^{k-1}\, J\Phi_1\, J\Phi_2\, ds_2 ds_1 dt \\ &= \Big(\int_{D_1} J\Phi_1\, ds_1\Big)\Big(\int_{D_2} J\Phi_2\, ds_2\Big)\Big(\int_I \gamma_1^{h-1}\gamma_2^{k-1}\, |\dot\gamma|\, dt\Big) \\ &= \underbrace{\sigma_{h-1}(\mathbb{S}^{h-1})}_{c_h}\, \underbrace{\sigma_{k-1}(\mathbb{S}^{k-1})}_{c_k} \int_\Gamma z_1^{h-1} z_2^{k-1}\, d\sigma_1(z)\,.\end{aligned}$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. Il modo più elegante e diretto per risolvere questo esercizio consiste nel parametrizzare Σ tramite un'unica mappa definita su una superficie compatta di dimensione d. Per la precisione prendo

$$\Phi : \underbrace{\Gamma \times \mathbb{S}^{h-1} \times \mathbb{S}^{k-1}}_{S} \to \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k\,, \quad \Phi : (z, x, y) \mapsto (z_1 x, z_2 y)\,,$$

e osservo che

- Φ è una bigezione continua dal prodotto $S := \Gamma \times \mathbb{S}^{h-1} \times \mathbb{S}^{k-1}$ in Σ, e siccome lo spazio S è compatto, Σ è pure compatto e $\Phi : S \to \Sigma$ è un omeomorfismo;
- S è una superficie senza bordo, di classe C^1 e di dimensione d in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$;
- Φ è di classe C^1 perché restrizione a S di una mappa C^1 da $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$;
- lo spazio tangente ad S in $p = (z, x, y)$ è $T_pS = T_z\Gamma \times T_x\mathbb{S}^{h-1} \times T_y\mathbb{S}^{k-1}$ e il differenziale $d_p\Phi$ è una mappa lineare da T_pS in $\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k$ con $|\det(d_p\Phi)| = z_1^{h-1} z_2^{k-1}$;
- poiché $|\det(d_p\Phi)| > 0$, l'applicazione lineare $d_p\Phi$ ha rango massimo (cioè d) per ogni $p \in S$, quindi Φ è una parametrizzazione regolare di Σ e questo dimostra che Σ è una superficie senza bordo di classe C^1 dimensione d;
- usando la formula per $|\det(d_p\Phi)|$ ottengo

$$\begin{aligned}\sigma_d(\Sigma) = \int_S |\det(d_p\Phi)|\, d\sigma_d &= \int_S z_1^{h-1} z_2^{k-1}\, d\sigma_1(z)\, d\sigma_{h-1}(x), d\sigma_{k-1}(y) \\ &= c_h c_k \int_S z_1^{h-1} z_2^{k-1}\, d\sigma_1(z)\,.\end{aligned}$$

Il difetto di questa soluzione è che usa molte nozioni e risultati che, pur essendo abbastanza naturali, non sono stati presentati a lezione, per esempio che il prodotto di superfici senza bordo è una superficie senza bordo, che la misura su tale prodotto è il prodotto delle misure sui fattori, che l'esistenza di una parametrizzazione regolare da S in Σ implica che Σ è una superficie. Inoltre il calcolo di $|\det(d_p\Phi)|$ è abbastanza delicato.

1 Calcolare $d\omega$ dove ω la 1-forma su $\mathbb{R}^k$, $k \geq 3$, data da $\omega := \displaystyle\sum_{i=2}^{k-1} (x_{i-1} - x_i + x_{i+1})\, dx_i$.

<u>SOLUZIONE</u>. Si tratta di un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i=2}^{k-1} d(x_{i-1} - x_i + x_{i+1}) \wedge dx_i \\ &= \sum_{i=2}^{k-1} dx_{i-1} \wedge dx_i - dx_i \wedge dx_{i+1} = dx_1 \wedge dx_2 - dx_{k-1} \wedge dx_k\,. \end{aligned}$$

2 Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione $g(x) := e^x + e^{-x}$.

<u>SOLUZIONE</u>. Si tratta di un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} + e^{(-1-in)x}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{e^{(1-in)x}}{1-in} + \frac{e^{(-1-in)x}}{-1-in} \right|_{-\pi}^{\pi} = \cdots = \frac{(-1)^n(e^\pi - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)} \end{aligned}$$

3 Per ogni $\varepsilon > 0$ calcolare la Trasformata di Fourier della funzione $\varphi_\varepsilon(x) := \dfrac{x}{x^2 + \varepsilon^2}$.

<u>SOLUZIONE</u>. La funzione φ_ε appartiene a $L^2(\mathbb{R})$ ma non a $L^1(\mathbb{R})$, e quindi la trasformata è data

$$\widehat{\varphi_\varepsilon}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\, e^{-iyx}\, dx$$

a patto che l'integrale a sinistra dell'uguale esista come integrale improprio.

Calcolo questo integrale usando il teorema dei residui. Considero dunque la funzione meromorfa

$$f(z) := \frac{z}{z^2+\varepsilon^2}\, e^{-iyz}\,,$$

e per ogni $r > 0$ indico con γ_r la parametrizzazione standard del segmento $[-r, r]$ e con con $\widetilde{\gamma}_r$ la parametrizzazione standard della semicirconferenza di centro 0 e raggio r nel semipiano superiore, vale a dire

$$\gamma_r(t) := t \quad \text{con } -r \leq t \leq r, \quad \widetilde{\gamma}_r(t) := re^{it} \quad \text{con } 0 \leq t \leq \pi.$$

Poiché l'unica singolarità di f nel semipiano superiore è in $z = i\varepsilon$, il teorema dei residui dice che, per $r > \varepsilon$,

$$\int_{\gamma_r} f(z)\, dz + \int_{\widetilde{\gamma}_r} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\varepsilon)\,. \tag{1}$$

Inoltre per $y < 0$ vale che

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\widetilde{\gamma}_r} f(z)\, dz = 0\,. \tag{2}$$

Per dimostrare quest'ultimo fatto scrivo l'integrale come

$$\int_{\widetilde{\gamma}_r} f(z)\, dz = \int_0^\pi \underbrace{f(re^{it}) ire^{it}}_{g_r(t)}\, dt$$

ed applico il teorema di convergenza dominata: partendo infatti dalla stima

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{|z|^2 - \varepsilon^2}\, e^{y \operatorname{Im}(z)}$$

ottengo

$$|g_r(t)| = \left| f(re^{it}) ire^{it} \right| \leq \frac{r^2}{r^2 - \varepsilon^2}\, e^{ry \sin t}\,,$$

e supponendo $y < 0$ ne deduco che

- $g_r(t)$ converge puntualmente a 0 quando $r \to \infty$ per ogni $0 < t < \pi$;

- vale la dominazione $|g_r(t)| \leq 2$ per $0 \leq t \leq \pi$ e $r \geq \sqrt{2}\varepsilon$.

Mettendo insieme le formule (1) e (2) ottengo infine che, sempre per $y < 0$,

$$\widehat{\varphi_\varepsilon}(y) = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i\varepsilon) = 2\pi i \frac{z\, e^{-iyz}}{2z}\bigg|_{z=i\varepsilon} = \pi i\, e^{\varepsilon y}\,.$$

Osservo infine che φ_ε è una funzione dispari, quindi anche $\widehat{\varphi_\varepsilon}$ è dispari, e dunque

$$\widehat{\varphi_\varepsilon}(y) = -\pi i\, e^{-\varepsilon|y|} \operatorname{sgn}(y)\,.$$

<u>Osservazioni</u>. Un soluzione alternativa potrebbe essere la seguente: posto

$$g(x) := \frac{1}{x^2+1}\,,$$

ho che $\varphi_1 = i(-ix\, g)$, e usando la regola $\mathscr{F}(-ixu) = (\widehat{u})'$ ed il fatto che $\widehat{g} = \pi e^{-|y|}$ ottengo

$$\widehat{\varphi_1} = i\mathscr{F}(-ix\, g) = i(\widehat{g})' = \pi i \left(e^{-|y|}\right)' = -\pi i\, e^{-|y|} \operatorname{sgn}(y)\,.$$

Osservo infine che $\varphi_\varepsilon = \sigma_\varepsilon\varphi_1$, e usando la regola $\widehat{\sigma_\varepsilon u}(y) = \widehat{u}(\varepsilon y)$ ottengo

$$\widehat{\varphi_\varepsilon}(y) = \widehat{\varphi_1}(\varepsilon y) = -\pi i\, e^{-\varepsilon|y|} \operatorname{sgn}(y)\,.$$

Il risultato è corretto ma la procedura utilizzata no.
Il problema è che, nella versione vista a lezione, la regola $\mathscr{F}(-ixu) = (\widehat{u})'$ richiede che sia u che xu appartengano a L^1, condizione che in questo caso non è verificata (xg appartiene a L^2 ma non ad L^1, e infatti $\widehat{g}$ non è una funzione di classe C^1).
Esiste una versione "avanzata" di questa regola che legittima il calcolo fatto, ma che non è alla portata di questo corso.

$\boxed{4}$ Sia $D := B(0,1)$ in $\mathbb{R}^2$ e sia $f : D \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) := (3|x|^2, 6|x|^3)$. Calcolare l'area del grafico di f.

<u>Soluzione</u>. Indico con Σ il grafico di f. Siccome f è una mappa di classe C^1 definita su un aperto, è noto che Σ è una superficie di classe C^1 parametrizzata dalla mappa $\Phi : D \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ data da

$$\Phi(x) := (x, f(x))\,.$$

Osservo ora che

$$\nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 6x_1 & 6x_2 \\ 18\,|x|x_1 & 18\,|x|x_2 \end{pmatrix}\,,$$

e detto d_{ij} il determinante del minore formato dalle righe i e j di questa matrice, vale che

$$d_{1,2} = 1\,,\ d_{1,3} = 6x_2\,,\ d_{2,3} = 6x_1\,,\ d_{1,4} = 18\,|x|x_2\,,\ d_{2,4} = 18\,|x|x_1\,,\ d_{3,4} = 0\,,$$

e quindi

$$J\Phi = \Bigg(\sum_{1\leq i<j\leq 4} d_{ij}^2\Bigg)^{1/2} = \left(1 + 6^2|x|^2 + 18^2|x|^4\right)^{1/2} = 1 + 18\,|x|^2\,.$$

Pertanto l'area di Σ è data da

$$\sigma_2(\Sigma) = \int_D J\Phi(x)\, dx = \int_0^1 (1 + 18\,\rho^2)\, 2\pi\rho\, d\rho = 10\,\pi$$

(nel secondo passaggio ho parametrizzato D in coordinate polari e integrato rispetto a θ).

$\boxed{5}$ Posto $H := L^2([0,3])$ e $H' := L^2([0,1])$, sia $T : H \to H'$ l'applicazione lineare data da $[Tu](x) := u(x+2) - u(x)$ per q.o. $x \in [0,1]$, e sia $X := \ker(T)$.

a) Dimostrare che T è continua e quindi X è chiuso;

b) determinare l'aggiunta $T^* : H' \to H$;

c) determinare $X^\perp$ e le proiezioni di H su X e $X^\perp$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Siccome T è lineare, la continuità segue da una stima del tipo $\|Tu\|_{H'} \le m\|u\|_H$ con m costante finita che non dipende da u. E in effetti per ogni $u \in H$ vale che

$$\begin{aligned}\|Tu\|_{H'} &\le \|u(x+2)\|_{L^2(0,1)} + \|u(x)\|_{L^2(0,1)} \\ &\le \|u(x)\|_{L^2(2,3)} + \|u(x)\|_{L^2(0,1)} \le 2\|u\|_H\,.\end{aligned}$$

b) Date $u \in H$ e $v \in H'$ ho che

$$\begin{aligned}\langle Tu\,;\,v\rangle_{H'} &= \int_0^1 u(x+2)\,v(x)\,dx - \int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx \\ &= \int_2^3 u(y)\,v(y-2)\,dx - \int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx = \langle u\,;\,Sv\rangle\end{aligned}$$

dove ho posto

$$Sv(y) := \begin{cases} -v(y) & \text{se } 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{se } 1 < y \le 2, \\ v(y-2) & \text{se } 2 < y \le 3. \end{cases} \tag{3}$$

Da questa identità segue che $T^* = S$.

c) Come visto a lezione, $X^\perp = (\ker T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(T^*)} = \overline{\mathrm{Im}(S)}$, e si vede facilmente a partire dalla definizione (3) che l'immagine di S coincide con l'insieme delle funzioni $u \in H$ tali che

- $u(y) = 0$ per (quasi) ogni $y \in (1,2]$;
- $u(y) + u(y-2) = 0$ per (quasi) ogni $y \in (2,3]$,

e in particolare è un sottospazio chiuso. Infine si può scomporre ogni $u \in H$ come $u = u' + u''$ con $u' \in X = \ker(T)$ e $u'' \in X^\perp = \mathrm{Im}(S)$ ponendo

$$u'(y) := \begin{cases} \frac12(u(y)+u(y+2)) & \text{se } 0 \le y \le 1, \\ u(y) & \text{se } 1 < y \le 2, \\ \frac12(u(y)+u(y-2)) & \text{se } 2 < y \le 3, \end{cases}$$

e

$$u''(y) := \begin{cases} \frac12(u(y)-u(y+2)) & \text{se } 0 \le y \le 1, \\ 0 & \text{se } 1 < y \le 2, \\ \frac12(u(y)-u(y-2)) & \text{se } 2 < y \le 3. \end{cases}$$

Chiaramente u' e u'' sono le proiezioni di u su X e $X^\perp$ rispettivamente.

6 Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \ne 0$ poniamo $\varphi(x) := 1/x$. Dati $x \in \mathbb{R}$ e u funzione su $\mathbb{R}$, definiamo il prodotto di convoluzione $\varphi * u$ come

$$\varphi * u(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{t\colon |t|\ge\varepsilon\}} \frac{u(x-t)}{t}\,dt\,,$$

quando questo limite esiste.[1] Dimostrare che $\varphi * u(x)$ è ben definito e finito se u appartiene a L^2 ed è α-Hölderiana in x per qualche $\alpha > 0$.
[*Suggerimento: cominciare dal caso in cui $u(x) = 0$; supporre (se serve) che u è continua con supporto compatto.*]

<u>SOLUZIONE</u>. Pongo $E_\varepsilon := \{t \in \mathbb{R}\colon |t| \ge \varepsilon\}$ e

$$I_\varepsilon := \int_{E_\varepsilon} \frac{u(x-t)}{t}\,dt\,.$$

Per prima cosa osservo che l'integrale I_ε è ben definito e finito per ogni $\varepsilon > 0$ perché le funzioni $u(x-t)$ e $1/t$ appartengono a $L^2(E_\varepsilon)$, e I_ε coincide con il loro prodotto scalare in questo spazio. Il fatto che u sia α-Hölderiana in x significa che esistono $r, m > 0$ tali che

$$|u(x-t) - u(x)| \le m|t|^\alpha \quad \text{per } t \in F_r := [-r, r]. \tag{4}$$

[1] Questo limite è noto come *valore principale di Cauchy* dell'integrale improprio $\int_{\mathbb{R}} \frac1t\, u(x-t)\,dt$.

Osservo che la funzione $1/t$ è dispari e l'insieme $F_r \cap E_\varepsilon$ è simmetrico rispetto all'origine, e quindi, per ogni $\varepsilon < r$,

$$\int_{F_r \cap E_\varepsilon} \frac{u(x)}{t}\, dt = u(x) \int_{F_r \cap E_\varepsilon} \frac{1}{t}\, dt = 0\,; \tag{5}$$

usando questa identità e il fatto che E_ε è dato dall'unione disgiunta di $F_r \cap E_\varepsilon$ e E_r, scrivo l'integrale I_ε come segue:

$$I_\varepsilon = \int_{F_r \cap E_\varepsilon} \frac{u(x-t)}{t}\, dt + I_r = \int_{F_r \cap E_\varepsilon} \frac{u(x-t) - u(x)}{t}\, dt + I_r\,.$$

Inoltre l'integranda dell'ultimo integrale appartiene a $L^1(F_r)$ per via della stima (4):

$$\int_{F_r} \left| \frac{u(x-t) - u(x)}{t} \right| \le \int_{F_r} \frac{m}{|t|^{1-\alpha}} dt = \frac{2mr^\alpha}{\alpha}\,,$$

e da questo segue (per il teorema di convergenza dominata) che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{F_r \cap E_\varepsilon} \frac{u(x-t) - u(x)}{t}\, dt = \int_{F_r} \frac{u(x-t) - u(x)}{t}\, dt\,.$$

Riassumendo, ho dimostrato che

$$\varphi * u(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \int_{F_r} \frac{u(x-t) - u(x)}{t}\, dt + \int_{E_r} \frac{u(x-t)}{t}\, dt\,. \tag{6}$$

7 Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = (2\cos t - 1)\, u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con le condizioni di periodicità al bordo $u(\cdot, \pi) = u(\cdot, -\pi)$ e $u_x(\cdot, \pi) = u_x(\cdot, -\pi)$ e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = g(\cdot)$, dove g è data nell'esercizio 2.

a) Dimostrare che non esiste alcuna soluzione nell'intervallo temporale $[0, +\infty)$.

b) Dimostrare che esiste una soluzione nell'intervallo temporale $[0, T)$ per qualche $T > 0$.

c) Caratterizzare l'estremo superiore T^* dei T al punto b), stimandolo dall'alto e dal basso.

<u>SOLUZIONE</u>. Sia u una soluzione di (P) definita per sull'intervallo temporale $[0, T)$, e siano $c_n(t)$ i coefficienti di Fourier di $u(t, \cdot)$. Procedendo come al solito si ottiene che ogni c_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = n^2(1 - 2\cos t) y \\ y(0) = c_n(g) \end{cases}$$

e tenendo conto dei valori dei coefficienti $c_n(g)$ calcolati nell'esercizio 2 ottengo

$$c_n(t) = \frac{m(-1)^n}{n^2+1}\, e^{n^2 \varphi(t)} \quad \text{dove } \varphi(t) := t - 2\sin t\,,\ m := \tfrac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\,. \tag{7}$$

Osservo che preso $\bar t$ tale che $\varphi(\bar t) > 0$ (per esempio $\bar t = \pi$) allora

$$\lim_{n \to \pm\infty} |c_n(\bar t)| = +\infty\,;$$

d'altra parte per ogni $t \in [0, T)$ la funzione $u(t, \cdot)$ appartiene a L^2, quindi la successione $c_n(t)$ appartiene a ℓ^2 e in particolare

$$\lim_{n \to \pm\infty} |c_n(t)| = 0\,.$$

Mettendo insieme queste due considerazioni ottengo che $T \le \bar t$. In particolare T deve essere finito, e questo dimostra il punto a).

b), c) L'argomento appena usato dimostra che se esiste una soluzione di (P) nell'intervallo temporale $[0, T)$ allora $T \le T_0$ dove

$$T_0 := \inf\{t > 0 \colon \varphi(t) > 0\}\,,$$

e dunque $T^* \le T_0$. Faccio vedere sotto che vale anche la disuguaglianza opposta, e quindi

$$T^* = T_0\,.$$

Prima però cerco delle stime su T_0 e dimostro in particolare che $T_0 > 0$: studiando il segno di $\dot\varphi(t) = 1 - 2\cos t$ ottengo infatti che

- φ è strettamente decrescente in $\big[0, \frac{\pi}{3}\big]$, e siccome $\varphi(0) = 0$ ho che $\varphi < 0$ in $\big(0, \frac{\pi}{3}\big]$;

- $\varphi(2) > 0$ e quindi $\frac{\pi}{3} < T_0 < 2$;
- φ è *strettamente* crescente in $\left[\frac{\pi}{3}, 2\right]$ e quindi

$$\varphi(t) < 0 \text{ per } 0 < t < T_0. \tag{8}$$

Per concludere l'esercizio faccio vedere che esiste una soluzione di (P) definita nell'intervallo temporale $[0, T_0)$ e quindi $T_0 \le T^*$, come annunciato sopra.

La formula (7) dice che la soluzione di (P) dovrebbe essere della forma

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{m(-1)^n}{n^2+1}\, e^{n^2\varphi(t)}\, e^{inx}}_{u_n(t,x)} . \tag{9}$$

Dimostro ora che la funzione u data in (9)

- è ben definita e continua sulla striscia chiusa $R := [0, T_0] \times \mathbb{R}$, e 2π-periodica in x;
- è di classe C^1 in t e di classe C^∞ in x nella strisce aperta $A := (0, T_0) \times \mathbb{R}$;
- risolve il problema (P) nell'intervallo temporale $[0, T_0)$.

La dimostrazione è divisa in più passi.

Passo 1. Siccome $\varphi \le 0$ in $[0, T_0]$ le funzioni u_n in (9) soddisfano

$$\|u_n\|_{L^\infty(R)} = \frac{m}{n^2+1} ,$$

quindi la serie di funzioni in (9) converge totalmente su R e pertanto u è ben definita e continua su R, ed è 2π-periodica in x perché lo sono le funzioni u_n.

Passo 2. Osservo che

$$D_t u_n = \frac{m(-1)^n}{n^2+1}\, n^2 \dot\varphi(t)\, e^{n^2\varphi(t)}\, e^{inx} , \quad D_x^h u_n = \frac{m(-1)^n}{n^2+1}\, (in)^h\, e^{n^2\varphi(t)}\, e^{inx} . \tag{10}$$

Per ogni $\delta > 0$ indico con A_δ la striscia $(\delta, T_0 - \delta) \times \mathbb{R}$. Siccome $\varphi < 0$ su $(0, T_0)$ (formula (8)), esiste $m_\delta > 0$ tale che

$$\varphi \le -m_\delta \text{ su } [\delta, T_0 - \delta].$$

Usando questa stima e le formule (10) ottengo che, per $n \to \pm\infty$,

$$\begin{aligned} \|D_t u_n\|_{L^\infty(A_\delta)} &= O(e^{-m_\delta n^2}) = O(1/n^2) , \\ \|D_x^h u_n\|_{L^\infty(A_\delta)} &= O(|n|^{h-2}\, e^{-m_\delta n^2}) = O(1/n^2) . \end{aligned}$$

Ne deduco che, riguardo alla serie di funzioni in (9), la serie delle derivate prime in t e la serie delle derivate di ordine h in x convergono totalmente su A_δ per ogni $\delta > 0$ e ogni h. Dunque u è di classe C^1 in t e di classe C^∞ in x sull'aperto A_δ per ogni $\delta > 0$, e quindi ha la stessa regolarità sull'unione di tutti gli aperti A_δ, vale a dire su A.

Passo 3. La verifica che u risolve (P) nell'intervallo temporale $[0, T_0)$ è routine e la ometto.

<u>Osservazioni</u>. Soluzione alternativa: usando il cambio di variabile $\tau = 2\sin t - t$ l'equazione in (P) diventa l'equazione del calore: per la precisione, detta $v = v(\tau, x)$ la soluzione dell'equazione del calore $v_\tau = v_{xx}$ nell'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$ con condizioni di periodicità al bordo e condizione iniziale $v(0, \cdot) = g(\cdot)$, allora la funzione $u(t,x) := v(2\sin t - t, x)$ risolve (P):

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= (2\sin t - t)'\, v_t(2\sin t - t, x) \\ &= (2\sin t - t)'\, v_{xx}(2\sin t - t, x) = (2\cos t - 1)\, u_{xx}(t,x) . \end{aligned}$$

Per quanto visto a lezione, v è definita e continua nell'intervallo temporale $[0, +\infty)$ e risolve l'equazione del calore nell'intervallo temporale $(0, +\infty)$; pertanto u è definita e continua su $[0, T) \times \mathbb{R}$ e risolve l'equazione del calore su $(0, T) \times \mathbb{R}$ a patto che $2\sin t - t > 0$ per ogni $t \in (0, T)$.

Il massimo di tali T è il primo zero positivo della funzione $2\sin t - t > 0$, vale a dire

$$T_1 := \min\{t > 0 \colon 2\sin t - t = 0\} ,$$

e studiando la funzione $2\sin t - t$ si vede facilmente che $\frac{\pi}{3} < T_1 < 2$.

Da quanto detto segue immediatamente che $T_1 \le T^*$, e per far vedere che $T_1 = T^*$ bisogna

dimostrare (P) non ammette alcuna soluzione nell'intervallo temporale $[0,T)$ se $T > T_1$, cosa che segue dalla non risolubilità dell'equazione del calore nel passato per il dato iniziale g.
Supponiamo infatti per assurdo che (P) ammetta una soluzione nell'intervallo temporale $[0,T)$ con $T > T_1$. Siccome la funzione $2\sin t - t$ ha derivata negativa in T_1, è strettamente decrescente in un intorno di T_1 ed in particolare ammette un inversa σ da $(-\delta, 0]$ in $[T_1, T)$ che porta 0 in T_1. Ma allora $v(\tau, x) := u(\sigma(\tau), x)$ risolve l'equazione del calore nell'intervallo temporale $(-\delta, 0]$, cosa che è assurda.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Per ogni $y \in \mathbb{R}$ sia $g(y) := -\frac{i}{2}\,\mathrm{sgn}(y)$. Dimostrare quanto segue:

a) esiste un'applicazione lineare e continua H da $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ in sé tale che $\widehat{Hu} = g\,\widehat{u}$ per ogni u;[2]

b) per ogni $u \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $Hu = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon * u$ dove φ_ε è definita nell'esercizio 3 e il limite è inteso nella norma L^2;

c) se u appartiene a $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ed è α-Holderiana per qualche $\alpha > 0$ allora $Hu = \varphi * u$ per q.o. x, dove $\varphi * u$ è definita nell'esercizio 6.

<u>Soluzione</u>. a) Sia H' l'applicazione lineare da $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ in sé data da $v \mapsto gv$. Osservo che H' è ben definita e continua perché $|g| = \pi$ q.o. e dunque $\|gv\|_2 = \pi\|v\|_2$. Pongo quindi

$$H := \mathscr{F}^{-1}\widetilde{H}\mathscr{F}\,.$$

Siccome H' coincide a meno di un fattore π con un'isometria di $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, e la Trasformata di Fourier $\mathscr{F}$ coincide a meno di un fattore $\sqrt{2\pi}$ con un'isometria di $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, anche H' coincide a meno di un fattore π con un'isometria.

b) Dimostro che $\widehat{\varphi_\varepsilon * u} \to g\,\widehat{u}$ in $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per $\varepsilon \to 0$, e la tesi segue dalla continuità dell'inversa della TdF.
Usando la formula sulla trasformata del prodotto di convoluzione vista a lezione e quanto fatto nell'esercizio 3 ottengo

$$\widehat{\varphi_\varepsilon * u} = \tfrac{1}{2\pi}\,\widehat{\varphi_\varepsilon}\,\widehat{u} = -\tfrac{1}{2}\,e^{-\varepsilon|y|}\,\mathrm{sgn}(y)\,\widehat{u}\,,$$

e quindi, per $\varepsilon \to 0$,

$$\left\|g\,\widehat{u} - \widehat{\varphi_\varepsilon * u}\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-\varepsilon|y|})^2 |\widehat{u}(y)|^2 dy \to 0\,,$$

dove la convergenza segue dal teorema di convergenza dominata: la convergenza puntuale della funzione integranda a 0 è ovvia, mentre una dominazione è $(1 - e^{-\varepsilon|y|})^2|\widehat{u}|^2 \le |\widehat{u}|^2$ (ricordo che $\widehat{u}$ appartiene a L^2 e quindi $|\widehat{u}|^2$ appartiene a L^1).

c) Siccome $\varphi_\varepsilon * u$ converge ad Hu in L^2, mi basta dimostrare che $\varphi_\varepsilon * u$ converge puntualmente a $\varphi * u$.
Procedendo come nella dimostrazione esercizio 6 scrivo $\varphi_\varepsilon * u(x)$ come

$$\varphi_\varepsilon * u(x) = \int_{F_r} \varphi_\varepsilon(t)\,(u(x-t) - u(x))\,dt + \int_{E_r} \varphi_\varepsilon(t)\,u(x-t)\,dt\,, \tag{11}$$

e ora uso il teorema di convergenza dominata per dimostrare che la somma degli integrali in (11) converge alla somma

$$\int_{F_r} \frac{1}{t}\,(u(x-t) - u(x))\,dt + \int_{E_r} \frac{1}{t}\,u(x-t)\,dt\,,$$

che per la formula (6) coincide con $\varphi * u(x)$.
Per quanto riguarda l'applicazione del teorema di convergenza dominata, la convergenza puntuale delle funzioni integrande segue dal fatto che il fatto che

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{t}{t^2 + \varepsilon^2} \to \frac{1}{t}\,;$$

la dominazione per il primo integrale in (11) è

$$\left|\varphi_\varepsilon(t)\,(u(x-t) - u(x))\right| \le \frac{m}{|t|^{1-\alpha}}\,,$$

[2] L'operatore H coincide a meno di un fattore costante con la *Trasformata di Hilbert*.

e segue dal fatto che $|u(x-t) - u(x)| \leq m|t|^\alpha$ per l'Holderianità di u, e

$$|\varphi_\varepsilon(t)| = \frac{|t|}{t^2 + \varepsilon^2} \leq \frac{|t|}{t^2} = \frac{1}{|t|} \, ;$$

infine la dominazione per il secondo integrale è

$$\big|\varphi_\varepsilon(t)\, u(x-t)\big| \leq |\varphi_\varepsilon(t)|^2 + |u(x-t)|^2 \leq \frac{1}{t^2} + |u(x-t)|^2 \, .$$

1 Data $g \in C^1(\mathbb{R})$, consideriamo la 1-forma su $\mathbb{R}^d$ data da $\omega := g(|x|^2) \sum_i x_i \, dx_i$. Calcolare $d\omega$, e dire se ω si può scrivere come differenziale di una funzione f su $\mathbb{R}^d$ (e in caso affermativo trovare tale f).

<u>SOLUZIONE</u>. Calcolo $d\omega$:

$$d\omega = \sum_{i \neq j} \frac{\partial}{\partial x_j} \big(g(|x|^2)\, x_i\big)\, dx_j \wedge \wedge dx_i = 2\, \dot{g}(|x|^2) \sum_{i \neq j} \underbrace{x_j x_i \, dx_j \wedge dx_i}_{a_{ij}} = 0$$

(nel primo passaggio ho usato la definizione di differenziale e il fatto che $dx_i \wedge dx_i = 0$, nel secondo ho usato che la derivata di $g(|x|^2)$ rispetto a x_j è $\dot{g}(|x|^2)\, 2x_j$, nel terzo ho usato che $a_{ij} = -a_{ji}$ perché $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$).
Presa inoltre G primitiva di g si vede che

$$\omega = \tfrac{1}{2}\, g(|x|^2) \sum_i 2x_i \, dx_i = \tfrac{1}{2}\, g(|x|^2)\, d(|x|^2) = \tfrac{1}{2}\, d\big(G(|x|^2)\big)$$

e dunque $\omega = df$ con $f(x) := \frac{1}{2}\, G(|x|^2)$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. Il calcolo di $d\omega$ riportato sopra poteva essere omesso: infatti, una volta trovata una funzione f tale che $\omega = df$, la nota identità $d^2 = 0$ implica $d\omega = d^2 f = 0$.

2 Sia Ω l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $0 < y(1 + x^8) < 1$. Dire per quali $p \in [1, \infty)$ la funzione $f(x, y) := x^2 + y^2$ appartiene a $L^p(\Omega)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Osservo che Ω è l'insieme dei punti (x, y) tali che

$$0 < y < \frac{1}{1 + x^8}\,,$$

e in particolare per i punti di Ω vale che $0 \leq y \leq 1$ e quindi

$$x^2 \leq f(x, y) \leq x^2 + 1\,.$$

Ne segue che la norma $L^p(\Omega)$ di f è finita se e solo se lo è la norma della funzione x^2, cioè l'integrale

$$\int_\Omega |x|^{2p} \, dx\, dy = 2 \int_0^\infty \frac{x^{2p}}{1 + x^8} \, dx\,,$$

che a sua volta è finito se e solo se $\int_1^\infty x^{2p-8} dx < \infty$, ovvero se e solo se $p < \frac{7}{2}$.

3 Calcolare la Trasformata di Fourier di $u(x) := e^{-2|x|} \cos x$.

<u>SOLUZIONE</u>. Calcolo $\widehat{u}$ partendo direttamente dalla definizione:

$$\begin{aligned}
\widehat{u}(y) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} \, \cos x \,\big(\cos(xy) - i \sin(xy)\big)\, dx \\
&= 2 \int_0^\infty e^{-2x} \, \cos x \, \cos(yx)\, dx \\
&= 2 \int_0^\infty e^{-2x} \, \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \, \frac{e^{ixy} + e^{-ixy}}{2} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{(-2+i+iy)x} + e^{(-2-i-iy)x} + e^{(-2+i-iy)x} + e^{(-2-i+iy)x} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2 - i(1+y)} + \frac{1}{2 + i(1+y)} + \frac{1}{2 + i(y-1)} + \frac{1}{2 - i(y-1)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{4 + (1+y)^2} + \frac{4}{4 + (y-1)^2} \right] = \frac{4y^2 + 20}{y^4 + 6y^2 + 25}
\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho usato che l'integrale su $\mathbb{R}$ di una funzione dispari è nullo, mentre l'integrale di una funzione pari è due volte l'integrale su $[0, \infty)$; nel terzo ho scritto i coseni in termini di esponenziali complessi).

<u>OSSERVAZIONI</u>. Si può calcolare $\widehat{u}$ anche partendo dal fatto, noto, che $\mathscr{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+y^2}$ usando le varie regole per il calcolo della TdF.

4 a) Scrivere la serie di Fourier complessa della funzione $f(t) := \cos t \, \sin^3 t$.
b) Trovare la funzione armonica u sul disco unitario D tale che $u(x, y) = 4xy^3$ su ∂D.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Basta scrivere seno e coseno in termini di esponenziali complessi:

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 &= \tfrac{i}{16} \big(e^{it} + e^{-it}\big)\big(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}\big) \\ &= \tfrac{i}{16} e^{4it} - \tfrac{i}{8} e^{2it} + \tfrac{i}{8} e^{-2it} - \tfrac{i}{16} e^{-4it} . \end{aligned}$$

b) Al solito, identifico ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $z := x + iy \in \mathbb{C}$. Tenendo conto di a), per $z = e^{it}$ (cioè $x = \cos t$, $y = \sin t$) il dato al bordo si scrive come

$$\begin{aligned} 4xy^3 = 4 \cos t \, \sin^3 t &= \tfrac{i}{4} e^{4it} - \tfrac{i}{2} e^{2it} + \tfrac{i}{2} e^{-2it} - \tfrac{i}{4} e^{-4it} \\ &= \tfrac{i}{4} z^4 - \tfrac{i}{2} z^2 + \tfrac{i}{2} \bar{z}^2 - \tfrac{i}{4} \bar{z}^4 = -\tfrac{1}{2} \operatorname{Im}(z^4) + \operatorname{Im}(z^2) . \end{aligned}$$

Osservo ora che l'ultimo termine è una funzione armonica (perché le parti reali e immaginarie di funzioni olomorfe sono armoniche) e quindi è la funzione armonica cercata, che posso anche scrivere come segue:

$$u(z) := -\tfrac{1}{2} \operatorname{Im}(z^4) + \operatorname{Im}(z^2) = 2xy \, (1 + y^2 - x^2) .$$

<u>OSSERVAZIONI</u>. In alternativa posso trovare u sapendo che, per un teorema visto a lezione, deve essere della forma

$$u(x, y) = 4xy^3 + p(x, y) \, (x^2 + y^2 - 1)$$

con p polinomio di secondo grado.

5 Sia X is sottospazio di $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ formato delle funzioni u di classe C^1 tali che xu e $\dot{u}$ appartengono a L^2, e sia $T : X \to L^2$ l'operatore dato da

$$Tu := i\dot{u} + 2xu \; .$$

Dimostrare che T è autoaggiunto e calcolare $\ker(T)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Per risolvere l'esercizio mi serve la seguente formula di integrazione per parti, vista a lezione: date due funzioni u, w su $\mathbb{R}$ di classe C^1 tali che $u, \dot{u}, v, \dot{v}$ appartengono a L^2, allora

$$\int_{\mathbb{R}} \dot{u} \, w \, dx = - \int_{\mathbb{R}} u \, \dot{w} \, dx .$$

Mostro ora che T è autoaggiunto: date $u, v \in X$, usando la formula precedente ottengo

$$\begin{aligned} \langle Tu \, ; \, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}} i\dot{u} \, \bar{v} \, dx + \int_{\mathbb{R}} 2xu \, v \, dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} iu \, \dot{\bar{v}} \, dx + \int_{\mathbb{R}} 2xu \, v \, dx = \int_{\mathbb{R}} u \, \overline{(i\dot{v} + 2xv)} \, dx = \langle u \, ; \, Tv \rangle . \end{aligned}$$

Determino ora $\ker(T)$: data $u \in X$ tale che $Tu = 0$, allora u risolve l'equazione differenziale $\dot{u} = 2ix \, u$ e quindi è necessariamente della forma $u(x) = c \, e^{ix^2}$ con $c \in \mathbb{R}$; poiché inoltre xu deve appartenere a L^2, l'unico valore ammissibile per la costante c è zero. Dunque $\ker(T) = \{0\}$, ovvero l'operatore T è iniettivo.

6 Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_t = 2t \, u_{xx} + u$ sull'intervallo spaziale $[-\pi, \pi]$, con le condizioni di periodicità al bordo e la condizione iniziale $u(0, \cdot) = u_0$.
Dire sotto quali ipotesi su u_0 il problema (P) ammette una soluzione, discutendone l'intervallo di definizione e la regolarità. [*L'unicità può essere data per scontata.*]

<u>SOLUZIONE</u>. La risoluzione segue lo schema standard e quindi tengo i commenti al minimo.

Detta u la soluzione di (P), per ogni t indico con $c_n(t)$ is coefficienti di Fourier di $u(t,\cdot)$. Allora, ad ogni istante t, i coefficienti di Fourier di u_t sono $\dot c_n(t)$ e quelli di u_{xx} sono $-n^2\, c_n(t)$; quindi, per via dell'equazione e della condizione iniziale in (P), ogni funzione c_n risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot y = (1-2n^2 t) y \\ y(0) = c_{0,n} \end{cases}$$

dove $c_{0,n}$ sono i coefficienti di Fourier del dato iniziale u_0. Risolvendo tale problema ottengo

$$c_n(t) = c_{0,n} e^{t-n^2t^2} \,,$$

e quindi la soluzione di (P) dovrebbe essere data dalla formula

$$u(t,x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{c_{0,n}\, e^{t-n^2t^2}\, e^{inx}}_{u_n} \,. \tag{1}$$

Dimostro adesso il seguente enunciato: *Supponiamo che*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{0,n}| < +\infty \,, \tag{2}$$

condizione che è verificata se, per esempio, u_0 è di classe C^1 e $u_0(-\pi) = u_0(\pi)$. Allora la funzione u in (1) è ben definita e continua su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, 2π-periodica nella variabile x, e di classe C^∞ per $t \neq 0$, vale a dire sull'aperto $A := (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}$, e infine risolve (P).

Preso $m > 0$ pongo $R_m := (-m,m)\times\mathbb{R}$, ed usando che $e^{t-n^2t^2} \le e^m$ se $t \le m$, ottengo che

$$\big\| u_n \big\|_{L^\infty(R_m)} = e^m |c_{0,n}| \,.$$

Questa stima e l'ipotesi (2) implicano che la serie delle funzioni u_n converge totalmente sull'aperto R_m, da cui segue che u è ben definita e continua su R^m, e quindi anche sull'unione di tutti tali aperti, cioè su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Inoltre è ovvio che u è 2π-periodica in x.

Preso $m > 0$ pongo

$$A_m := \big\{ (t,x) \colon \tfrac{1}{m} < |t| < m \big\} \,.$$

Prendo ora due interi $h,k \ge 0$ ed osservo che

$$D_t^h D_x^k u_n(t,x) = c_{0,n}\, P_h(n,t)\, e^{t-n^2t^2}\, (in)^k e^{inx} \,,$$

dove P_h è un polinomio di grado $2h$ in n e in t (questa affermazione si dimostra facilmente per induzione su h). Pertanto esiste una costante C_h tale che

$$|P_h(n,t)| \le C_h n^{2h} \quad \text{per ogni } n\in\mathbb{Z} \text{ e } t\in[-m,m],$$

e quindi

$$\big\| D_t^h D_x^k u_n \big\|_{L^\infty(A_m)} \le C_h\, n^{2h+k} e^{m-n^2/m^2} |c_{0,n}| = o(c_{0,n}) \quad \text{per } n\to\pm\infty.$$

Da questo segue la serie delle derivate parziali $D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su A_m, e siccome questo vale per ogni h,k, la funzione u è di classe C^∞ su A_m, e quindi anche sull'unione degli aperti A_m, che è appunto A.

Per concludere la dimostrazione devo verificare che u risolve (P), ma questo è standard.

<u>OSSERVAZIONI</u>. La risoluzione data sopra potrebbe essere semplificata (e non di poco) riscrivendo la formnla risolutiva (1) come segue:

$$u(t,x) := e^t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{0,n}\, e^{-n^2t^2}\, e^{inx} \,.$$

$\boxed{7}$ Presi $d \ge 2$ e $k \ge 1$ interi, sia B la palla aperta di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^d$ e $B^* := B\setminus\{0\}$. Data $u : [0,1) \to \mathbb{R}^k$ una mappa di classe C^1, indico con $v : B \to \mathbb{R}^k$ la mappa data da $v(x) := u(|x|)$, con Σ il grafico di v, e con Σ^* il grafico della restrizione di v a B^*.

a) Dimostrare che Σ^* è una superficie di classe C^1.

b) Far vedere che Σ non è necessariamente una superficie di classe C^1.

c) Dare delle ipotesi su u che garantiscano che Σ è una superficie di classe C^1.

<u>SOLUZIONE</u>. a) La restrizione di v all'aperto B^* è una mappa di classe C^1 (in quanto composizione di mappe di classe C^1) e quindi è noto che il suo grafico è una superficie di classe C^1 (senza bordo).

c) Il ragionamento precedente non si applica a Σ perché la funzione $|x|$ non è derivabile in 0, e quindi $v(x) = u(|x|)$ non è a priori una mappa di classe C^1 su tutto B. Tuttavia se $\dot u(0) = 0$ allora si dimostra che v è una mappa di classe C^1 su B e quindi Σ è una superficie di classe C^1. Infatti se $\dot u(0) = 0$ allora lo sviluppo di Taylor di u in 0 all'ordine 1 è $u(s) = u(0) + o(s)$, da cui segue che $v(x) = u(0) + o(|x|)$, e questo implica che u è differenziabile in 0 con $\nabla v(0) = 0$. Per concludere basta ora osservare che il gradiente

$$\nabla v(x) = \dot u(|x|) \otimes \nabla(|x|) = \dot u(|x|) \otimes \frac{x}{|x|}$$

è continuo in 0, cioè tende a 0 per $x \to 0$, perché $\dot u(|x|)$ tende a 0 mentre $x/|x|$ è limitato. (Ricordo che $v \otimes w$ indica la matrice di coordinate $v_i w_j$.)

b) Per vedere che Σ può non essere una superficie di classe C^1 basta osservare che per $k = 1$ e $u(s) = s$, Σ è un cono, e abbiamo visto a lezione che tale oggetto non è una superficie regolare nell'origine.

Dimostro più in generale che se $\dot u(0) \neq 0$ allora Σ non è una superficie di classe C^1. Suppongo per assurdo che lo sia, e considero il punto $p := (0, u(0))$. Preso un vettore $e \in \mathbb{R}^d$ con $|e| = 1$, osservo che il cammino $\gamma : [0, 1) \to \Sigma$ dato da $\gamma(t) := (et, u(t))$ parte dal punto p e soddisfa

$$\dot\gamma(0) = (e, \dot u(0)) \,.$$

Ne segue che il vettore $(e, \dot u(0))$ appartiene allo spazio tangente $T_p\Sigma$, ma allora appartengono a $T_p\Sigma$ anche $(-e, \dot u(0))$, e poi, per linearità, $(e, 0)$ e $(0, u(0))$. Pertanto $T_p\Sigma$ contiene il piano $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ ma anche il vettore $(0, u(0))$, e dunque deve avere dimensione almeno $d+1$, cosa che è assurda.

8 Dati $v \in \mathbb{R}^h$ e $w \in \mathbb{R}^k$ ricordo che $v \otimes w$ indica la matrice $h \times k$ di coordinate $v_i w_j$, vale a dire $v \otimes w = v\, w^t$ dove intendo v e w come matrici $h \times 1$ e $k \times 1$, cioè come vettori colonna.

a) Detta I la matrice identità $h \times h$, dimostrare che $\det(I + v \otimes v) = 1 + |v|^2$.

b) Trovare una formula per il volume della superficie Σ^* nell'esercizio 7.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Indico on $e_1, \dots, e_h$ la base canonica di $\mathbb{R}^h$, scrivo v come $v = \lambda e$ con e vettore unitario e $\lambda := |v|$, e prendo una matrice ortogonale R tale che $e = Re_1$. Allora

$$I + v \otimes v = I + v\, v^t = I + \lambda^2\, Re_1\, (Re_1)^t = R\, (I + \lambda^2\, e_1\, e_1^t)\, R^t \,,$$

e ricordando che $\det R = \det(R^t) = \pm 1$,

$$\det(I + v \otimes v) = \det(I + \lambda^2\, e_1\, e_1^t) = \det \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = 1 + \lambda^2 = 1 + |v|^2 \,.$$

b) Parametrizzo la superficie Σ^* tramite la mappa $\Phi : B^* \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k$ data da

$$\Phi(x) := (x, v(x)) = (x, u(|x|)) \,.$$

Per calcolare il determinante Jacobiano di Φ osservo che

$$\nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix} I \\ \dot u \otimes \frac{x}{|x|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ \frac{1}{|x|}\, \dot u\, x^t \end{pmatrix}$$

dove $\dot u$ è calcolato in $|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} \nabla^t\Phi\, \nabla\Phi &= \begin{pmatrix} I & \frac{1}{|x|}\, x\, \dot u^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ \frac{1}{|x|}\, \dot u\, x^t \end{pmatrix} \\ &= I + \tfrac{1}{|x|^2}\, x\, \dot u^t\, \dot u\, x^t = I + \tfrac{1}{|x|^2}\, |\dot u|^2\, x\, x^t = I + \Big(\tfrac{|\dot u|}{|x|} x\Big) \otimes \Big(\tfrac{|\dot u|}{|x|} x\Big) \,. \end{aligned}$$

Pertanto, usando la formula ottenuta al punto a),

$$\big(J\Phi(x)\big)^2 = \det\big(\nabla^t\Phi\,\nabla\Phi\big) = \det\Big(I + \Big(\tfrac{|\dot u|}{|x|}x\Big)\otimes\Big(\tfrac{|\dot u|}{|x|}x\Big)\Big) = 1 + |\dot u|^2\,,$$

e quindi

$$\sigma_d(\Sigma^*) = \int_{B^*} J\Phi(x)\,dx = \int_{B^*}\sqrt{1+|\dot u|^2}\,dx = c_d\int_0^1 s^{d-1}\sqrt{1+|\dot u(s)|^2}\,ds$$

dove c_d indica il volume $(d-1)$-dimensionale della sfera unitaria in $\mathbb{R}^d$.

1 Dato $a \in \mathbb{R}$ considero la seguente 2-forma su $\mathbb{R}^3$: $\omega(x) := 2x_1x_2\, e^{ax_3}\, dx_1 \wedge dx_2$. Dire per quali a la forma ω è chiusa (cioè $d\omega = 0$) e per questi trovarne una primitiva (cioè una 1-forma α tale che $d\alpha = \omega$).

<u>SOLUZIONE</u>. Un semplice calcolo dà

$$d\omega = \tfrac{\partial}{\partial x_3}\big(2x_1x_2\, e^{ax_3}\big)\, dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 = 2ax_1x_2\, e^{ax_3}\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\,,$$

e quindi $d\omega = 0$ se e solo se $a = 0$; in tal caso

$$\omega = 2x_1x_2\, dx_1 \wedge dx_2 = d\big(x_1^2 x_2\, dx_2\big)\,,$$

e quindi prendo $\alpha := x_1^2 x_2\, dx_2$.

<u>OSSERVAZIONI</u>. La forma α data sopra non è l'unica primitiva di ω; un'altra è $-x_1x_2^2\, dx_1$.

2 Sia $d = 1, 2, \dots$, e sia E l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ tali che $1 \le y \le |x|^{-4}$. Fare un disegno approssimativo di E per $d = 1, 2$ e dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) := y^a$ appartiene a $L^1(E)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Calcolo $\|f\|_1$ usando il teorema di Fubini e il fatto che $|x|^{-4} \ge 1$ se e solo se $|x| \le 1$, cioè se x appartiene alla palla chiusa B di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{R}^d$, e nel farlo devo distinguere due casi.

Caso $a \ne -1$:

$$\begin{aligned}\|f\|_1 = \int_E y^a\, dx\, dy &= \int_B \bigg(\int_1^{|x|^{-4}} y^a\, dy\bigg)\, dx \\ &= \int_B \frac{|x|^{-4(a+1)} - 1}{a+1}\, dx = \frac{c_d}{a+1} \int_0^1 \big(\rho^{-4(a+1)} - 1\big)\, \rho^{d-1}\, d\rho\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio ho usato la formula vista a lezione per l'integrale delle funzioni radiali). Osservo adesso che l'ultimo integrale se e solo se è finito l'integrale

$$\int_0^1 \rho^{-4a+d-5}\, d\rho$$

cioè se e solo se $-4a + d - 5 > -1$, vale a dire $a < \frac{d}{4} - 1$.

Caso $a = -1$:

$$\|f\|_1 = \int_B \bigg(\int_1^{|x|^{-4}} \frac{dy}{y}\bigg)\, dx = \int_B -4\log(|x|)\, dx = -4c_d \int_0^1 \rho^{d-1}\, \log\rho\, d\rho$$

e l'ultimo integrale è finito per ogni d perché $\rho^{d-1}\, \log\rho = o(\rho^{-1/2})$.

Riassumendo, f appartiene a $L^1(E)$ se e solo se $a < \frac{d}{4} - 1$.

3 Scrivere la serie di Fourier reale e quella complessa della funzione $v(x) := x(x^2 - \pi^2)$.

<u>SOLUZIONE</u>. Calcolo come prima cosa i coefficienti della serie di Fourier complessa. Per farlo uso il fatto che v è una funzione regolare che soddisfa $v(\pi) = v(-\pi)$ e $\dot v(\pi) = \dot v(-\pi)$, e quindi $c_n(\ddot v) = in\, c_n(\dot v) = -n^2\, c_n(v)$, ovvero

$$c_n(v) = -\frac{c_n(\ddot v)}{n^2} \quad \text{per ogni intero } n \ne 0.$$

Calcolo quindi i coefficienti di Fourier $c_n(\ddot v)$ per $n \ne 0$ a partire dalla definizione tramite un'integrazione per parti:

$$2\pi\, c_n(\ddot v) := \int_{-\pi}^{\pi} 6x\, e^{-inx}\, dx = \bigg|6x\, \frac{i}{n} e^{-inx}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{6i}{n} e^{-inx}\, dx = \frac{12\,\pi i(-1)^n}{n}\,.$$

Usando quindi la formula precedente ottengo

$$c_n(v) = \frac{6i(-1)^{n+1}}{n^3} \quad \text{per ogni intero } n \ne 0,$$

inoltre $c_0(v) = 0$ perché v è dispari. In conclusione la serie di Fourier complessa di v è

$$v(x) = \sum_{n\neq 0} \frac{6i(-1)^{n+1}}{n^3}\, e^{inx}\,.$$

Osservo adesso che i termini di indice n con quelli di indice $-n$ hanno coefficienti opposti, e quindi sommandoli a due a due ottengo

$$v(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6i(-1)^{n+1}}{n^3}\,(e^{inx} - e^{-inx}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12\,(-1)^n}{n^3}\, \sin(nx)\,,$$

e quest'ultima è necessariamente la serie di Fourier reale di v.

$\boxed{4}$ Posto $L^1 := L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ e $C_0 := C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$, indico con X l'immagine della trasformata di Fourier $\mathscr{F} : L^1 \to C_0$. Dimostrare che X è un sottospazio denso di C_0, ed è chiuso rispetto al prodotto.

<u>SOLUZIONE</u>. Il fatto che X è chiuso rispetto al prodotto di funzioni segue dal fatto che L^1 è chiuso rispetto al prodotto di convoluzione e la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione di due funzioni in L^1 è il prodotto delle rispettive trasformate.
Abbiamo inoltre visto che il teorema di inversione per la TdF si applica a tutte le funzioni di classe C^1 in L^1 con derivata in L^2, e quindi X contiene tutte queste funzioni, ed in particolare contiene tutte le funzioni di classe C^1 con supporto compatto, ed è noto che quest'ultime sono dense in C_0.

$\boxed{5}$ Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Dire per quali $a > 0$ la condizione $u(x) = O(|x|^{-a})$ per $x \to \pm\infty$ implica che la Trasformata di Fourier $\widehat{u}$ è di classe C^3.

<u>SOLUZIONE</u>. Affinché $\widehat{u}$ sia di classe C^3 basta che le funzioni $x^k u$ appartengano a L^1 per $k = 0, \dots, 3$, e siccome $x^k u = O(|x|^{-a+k})$ per $k \to \pm\infty$, l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^k u(x)|\, dx$$

è finito se $-a + k < -1$, ovvero $a > k + 1$. Dunque $\widehat{u}$ è di classe C^3 se $a > 4$.

$\boxed{6}$ Data $v(x) := x(x^2 - \pi^2)$, considero il problema (P) dato dall'equazione delle onde $u_{tt} = u_{xx}$ sul dominio spaziale $[0, \pi]$, dalle condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$, e dalle condizioni iniziali $u(0, \cdot) = 0$ e $u_t(0, \cdot) = v(\cdot)$. Scrivere la soluzione di (P) specificando l'intervallo temporale di esistenza e la regolarità.
[*L'unicità può essere data per scontata*]

<u>SOLUZIONE</u>. Scrivo la funzione incognita u in serie di seni rispetto alla variabile spaziale x:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t)\, \sin(nx)\,.$$

Osservo inoltre che la rappresentazione in serie di seni del dato iniziale v coincide con la serie di Fourier reale ottenuta alla fine dell'esercizio 3, vale a dire

$$v(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12\,(-1)^n}{n^3}\, \sin(nx) \tag{1}$$

Procedendo al solito modo ottengo se u risolve l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$ allora i coefficienti b_n devono risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{y} = -n^2 y\,, \\ y(0) = 0\,, \\ \dot{y}(0) = \frac{12\,(-1)^n}{n^3}\,, \end{cases}$$

da cui ottengo, facendo i dovuti calcoli,

$$b_n(t) = \frac{12\,(-1)^n}{n^4}\, \sin(nt)\,.$$

La soluzione di (P) dovrebbe quindi essere

$$u(t,x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{12\,(-1)^n}{n^4}\,\sin(nt)\,\sin(nx)}_{u_n}\,. \tag{2}$$

Per concludere dimostro che *la funzione u in (2) è ben definita e di classe C^2 su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e risolve il problema (P)*. Divido la dimostrazione di questo enunciato in più passi.

Passo 1: u è ben definita e continua su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Mi basta dimostrare che la serie in (2) converge totalmente su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, e questo segue dalla stima

$$\|u_n\|_\infty = \frac{12}{n^4}\,.$$

Passo 2: u è di classe C^2. Mi basta dimostrare che la serie delle derivate parziali $D_t^h D_x^k u_n$ converge totalmente su tutto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ se $h+k\le 2$, e questo segue dalla stima

$$\|D_t^h D_x^k u_n\|_\infty = \frac{12}{n^{4-h-k}}\,,$$

che a sua volta segue immediatamente dalla formula

$$D_t^h D_x^k u_n(t,x) = \frac{12\,(-1)^n}{n^{4-h-k}}\,g_h(nt)\,g_k(nx)\,,$$

dove $g_h(s)$ è la derivata h-esima di $\sin s$, vale a dire $\pm\cos s$ oppure $\pm\sin s$.

Passo 3: u risolve (P). La funzione u risolve l'equazione delle onde perchè la risolvono separatamente tutti gli addendi u_n (e la convergenza della serie permette di scambiare derivate e somme). Il fatto che u soddisfa le condizioni al bordo $u(\cdot,0)=u(\cdot,\pi)=0$ e la condizione iniziale $u(0,\cdot)=0$ segue direttamente dalla formula (2); infine

$$u_t(0,x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12\,(-1)^n}{n^3}\,\sin(nx) = v(t)\,,$$

dove la prima identità è stata ottenuta derivando la (2) rispetto a t e imponendo $t=0$, mentre la seconda segue dalla (1).

<u>OSSERVAZIONI</u>. Usando l'identità

$$\sin(nt)\,\sin(nx) = \tfrac{1}{2}\cos(n(x-t)) - \tfrac{1}{2}\cos(n(x+t))$$

nella formula (2) otteniamo una rappresentazione più esplicita della soluzione u:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6\,(-1)^n}{n^4}\big(\cos(n(x-t)) - \cos(n(x+t))\big) = \varphi(x-t) - \varphi(x+t) \tag{3}$$

dove $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è la funzione 2π-periodica di classe C^2 definita da

$$\varphi(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6\,(-1)^n}{n^4}\,\cos(ns)\,.$$

Ricordando la (1) ottengo inoltre che

$$\dot\varphi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{6\,(-1)^n}{n^3}\,\sin(ns) = -\frac{v(s)}{2} = -\frac{s^3}{2} + \frac{\pi^2 s}{2}\,,$$

e quindi φ è la funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ che coincide sull'intervallo $[-\pi,\pi]$ con la funzione

$$\varphi(s) = -\frac{s^4}{8} + \frac{\pi^2 s^2}{4} + c \quad \text{dove} \quad c := \varphi(0) = 6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\,.$$

Notare che φ è di classe C^2 ma non di classe C^3, infatti le derivate terze destra e sinistra di φ in π esistono ma sono diverse. In particolare anche la soluzione u non è di classe C^3.

Osservo infine che la formula (3) suggerisce che le soluzioni u dell'equazione delle onde sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ che soddisfano le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ possono essere sempre scritte nella forma

$$u(t, x) = \varphi^+(x - t) - \varphi^-(x + t)$$

per un'opportuna scelta delle funzioni φ^+ e φ^-. E in effetti si può dimostrare che così è, sotto opportune ipotesi sui dati iniziali.

7 Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := \dfrac{1}{1 + x^2}$. Dimostrare che:

a) la derivata k-esima di f appartiene a $L^1(\mathbb{R})$ per ogni intero k,

b) il prodotto di convoluzione $f * g$ è ben definito e di classe C^∞ se $g \in L^\infty(\mathbb{R})$,

c) lo stesso vale se $g \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \le p < +\infty$.

<u>Soluzione</u>. a) Dimostro per induzione che per ogni intero $k \ge 0$ esiste un polinomio P_k di grado al più k tale che

$$D^k f(x) = \frac{P_k(x)}{(1 + x^2)^{k+1}}\,. \tag{4}$$

In effetti la formula (4) vale per $k = 0$ con $P_0(x) := 1$; supponendo inoltre valga per un certo k, derivandola ottengo

$$D^{k+1} f(x) = \frac{-2(k + 1)x\, P_k(x) + (x^2 + 1)\, P_k'(x)}{(1 + x^2)^{k+2}}\,,$$

e quindi la (4) vale per $k + 1$ con

$$P_{k+1}(x) := -2(k + 1)x\, P_k(x) + (x^2 + 1)\, P_k'(x)\,.$$

Chiaramente P_{k+1} ha grado al più $k + 1$ perché P_k ha grado al più k.

Dalla formula (4) segue che per $q \ge 1$ vale

$$|D^k f(x)|^q = O(|x|^{-q(k+2)}) = O(|x|^{-2}) \quad \text{per } x \to \pm\infty,$$

e questo implica che $D^k f$ appartiene a $L^q(\mathbb{R})$ per ogni $q \ge 1$ ed ogni $k = 0, 1, \dots$.

b), c) Ricordo il seguente risultato: se p, q sono esponenti coniugati, g è una funzione in $L^p(\mathbb{R})$ ed h è una funzione di classe C^1 in $L^q(\mathbb{R})$ tale che h' appartiene a $L^q(\mathbb{R})$, allora il prodotto di convoluzione $g * h$ appartiene è di classe C^1 e $(g * h)' = g * h'$.
Partendo da questo risultato si dimostra inoltre (per induzione su k) che se h è di classe C^k con tutte le derivate in L^q fino a quella di ordine k, allora $g*h$ appartiene a C^k e $D^k(g*h) = g*D^k h$.
Usando questa affermazione e quanto fatto al punto a) ottengo che $f * g$ è di classe C^∞.

8 Sia S l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ tali che $(y + y^3)(1 + |x|^2) = 1$.

a) Dimostrare che S è una superficie senza bordo di classe C^∞, e per la precisione è il grafico di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ che tende a 0 all'infinito.

b) Per quali $p \ge 1$ la funzione $u(x, y) := y$ appartiene a $L^p(S)$?

<u>Soluzione</u>. a) La funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(s) := s + s^3$ è di classe C^∞, tende a $\pm\infty$ per $s \to \pm\infty$, e ha derivata $\dot g(s) = 1 + 3s^2$ è strettamente positiva. Da questo segue che g è una biiezione, e che l'inversa di g, che indico con φ, è di classe C^∞.

Per definizione S è l'insieme dei punti (x, y) tali che $g(y) = (1 + |x|^2)^{-1}$ e quindi è il grafico della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) := \varphi\big((1 + |x|^2)^{-1}\big)\,,$$

ed in particolare S è una superficie senza bordo di classe C^∞.
Inoltre $\dot\varphi(0) = 1/\dot g(0) = 1$ e quindi $\phi(s) \sim s$ per $s \to 0$, da cui segue che

$$f(x) \sim |x|^{-2} \quad \text{per } |x| \to +\infty. \tag{5}$$

b) La superficie S è parametrizzata dalla mappa $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ data da $\Phi(x) := (x, f(x))$, e ricordo che

$$J\Phi(x) = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|}\,.$$

Osservo ora che, per $|x| \to +\infty$,

$$\nabla f(x) = \dot{\varphi}\big((1+|x|^2)^{-1}\big)\,\frac{-2x}{(1+|x|^2)^2} \to 0\,,$$

pertanto

$$J\Phi(x) = \sqrt{1+|\nabla f(x)|} \to 1\,,$$

e quindi

$$|f(x)|^p J\Phi(x) \sim |x|^{-2p}\ .$$

Usando questo fatto ottengo che la norma

$$\|u\|_p^p = \int_S |y|^p \, d\sigma_2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^p J\Phi(x)\, dx$$

è finita se e solo se lo è l'integrale

$$\int_{|x|\geq 1} |x|^{-2p}\, dx = 2\pi \int_0^1 \rho^{1-2p}\, d\rho$$

(l'uguaglianza segue dalla formula per l'integrale delle funzioni radiali sul piano), ovvero se e solo se $1-2p<-1$, vale a dire $p>1$.

$\boxed{1}$ Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $u(x) := x^2 e^{-|x|}$.

<u>SOLUZIONE</u>. Posto $v(x) := e^{-|x|}$ ho che

$$\begin{aligned}\widehat{u} = \widehat{x^2 v} = -\widehat{(-ix)^2 v} = -(\widehat{v})'' &= -2\big((1+y^2)^{-1}\big)'' \\ &= 4\big(y(1+y^2)^{-2}\big)' = \frac{4(1-3y^2)}{(1+y^2)^3}\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio ho usato due volte la formula $\widehat{-ixg} = (\widehat{g})'$, ed ho potuto farlo perché le funzioni v, xv, x^2v appartengono a $L^1(\mathbb{R})$; nel quarto passaggio ho usato che $\widehat{v}(y) = 2(1+y^2)^{-1}$).

$\boxed{2}$ Data $\omega := dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + dx_5 \wedge dx_6$, calcolare $\alpha := \omega \wedge \omega \wedge \omega$.

<u>SOLUZIONE</u>. Scrivo $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ dove $\omega_1 := dx_1 \wedge dx_2$, $\omega_2 := dx_3 \wedge dx_4$, $\omega_3 := dx_5 \wedge dx_6$. Utilizzando la distributività del prodotto $\wedge$ ottengo

$$\alpha := \wedge^3 \omega = \wedge^3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \sum_\sigma \underbrace{\omega_{\sigma(1)} \wedge \omega_{\sigma(2)} \wedge \omega_{\sigma(3)}}_{\omega_\sigma}, \tag{1}$$

dove σ varia tra tutte le funzioni da $I := \{1, 2, 3\}$ in sé.
Osservo ora che se σ non è iniettiva allora ω_σ è un prodotto di 1-covettori con almeno due fattori uguali e quindi $\omega_\sigma = 0$.
Se invece σ è iniettiva allora è una permutazione di I, e tenendo conto che il prodotto $\wedge$ è commutativo sui 2-covettori vale che

$$\omega_\sigma = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_6 .$$

Applicando quanto appena detto alla formula (1), e tenendo conto che le permutazioni di I sono $3! = 6$, ottengo infine

$$\alpha = \sum_{\sigma \text{ iniettiva}} \omega_\sigma = 6\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_6 .$$

$\boxed{3}$ a) Scrivere la funzione $g(x) := x(\pi^2 - x^2)$ in serie di Fourier sull'intervallo $[-\pi, \pi]$.
[*Suggerimento: partire dalla serie di Fourier di* $\ddot{g}$.]
b) Scrivere la funzione $g(x)$ in serie di seni sull'intervallo $[0, \pi]$.

<u>SOLUZIONE</u>. a) Calcolo i coefficienti di Fourier (complessi) di $\ddot{g}(x) = -6x$ per $n \neq 0$:

$$c_n(\ddot{g}) = -\frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, e^{-inx}\, dx = -\frac{3}{\pi}\left| x\,\frac{e^{-inx}}{-in}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{-in}\, dx = \frac{6i(-1)^{n-1}}{n}$$

(nel secondo passaggio integro per parti, nel terzo uso che l'integrale rimasto è nullo).
Siccome $\dot{g}(-\pi) = \dot{g}(\pi)$ e $g(-\pi) = g(\pi)$ ho che

$$c_n(\ddot{g}) = in\, c_n(\dot{g}) = -n^2\, c_n(g) ,$$

e quindi, sempre per $n \neq 0$,

$$c_n(g) = -\frac{1}{n^2} c_n(\ddot{g}) = \frac{6i(-1)^n}{n^3} .$$

Infine $c_0(g) = 0$ perché g è dispari. Pertanto la serie di Fourier (complessa) di g è

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0} \frac{6i(-1)^n}{n^3} e^{inx} .$$

b) Siccome g è una funzione dispari su $[-\pi, \pi]$, la serie in seni si ottiene dalla serie di Fourier complessa mettendo insieme il termine n-esimo con il termine $(-n)$-esimo e poi sommando su $n = 1, 2, \dots$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6i(-1)^n}{n^3}\big(e^{inx} - e^{-inx}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{12\,(-1)^{n-1}}{n^3} \sin(nx) .$$

4 Dato $a \geq 0$ e $d = 1, 2, \dots$, sia E l'insieme degli $x \in \mathbb{R}^d$ tali che $0 < |x| < 1$, e sia f la funzione su E data da
$$f(x) := \frac{1}{|x|(1-|x|)^a}\,.$$
Preso p con $1 \leq p < +\infty$, dire per quali a, d la funzione f appartiene a $L^p(E)$.

SOLUZIONE. Usando una nota formula per l'integrale delle funzioni radiali ottengo
$$\|f\|_p^p = \int_E \frac{dx}{|x|^p(1-|x|)^{ap}} = \int_0^1 \frac{c_d\rho^{d-1}\,d\rho}{\rho^p(1-\rho)^{ap}} = c_d\int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{p-d+1}(1-\rho)^{ap}}$$
dove c_d è il volume $(d-1)$-dimensionale della sfera $\mathbb{S}^{n-1}$. Osservo ora che l'ultimo integrale è improprio in 0 e 1, ed in particolare è finito se e solo se $p-d+1 < 1$ e $ap < 1$, vale a dire $d > p$ e $a < 1/p$.

5 Sia X il sottospazio delle funzioni $f \in L^2(\mathbb{R})$ tali che $f(x) = 0$ per q.o. $x \in [0,1]$.

a) Dimostrare che X è chiuso in $L^2(\mathbb{R})$.

b) Determinare $X^\perp$ e le proiezioni ortogonali di $L^2(\mathbb{R})$ su X e $X^\perp$.

SOLUZIONE.

a) Posto $I := [0,1]$, considero l'applicazione lineare $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(I)$ che porta f nella restrizione all'intervallo I. Siccome $\|Tf\|_2 \leq \|f\|_2$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$, T è continua, e quindi $X = \ker T$ è un sottospazio chiuso.

b) Affermo che $X^\perp$ coincide con il sottospazio Y delle funzioni $f \in L^2(\mathbb{R})$ tali che $f(x) = 0$ per q.o. $x \notin [0,1]$. Che Y sia chiuso si dimostra come per X, ed è facile verificare che $X \perp Y$: presi infatti $f \in X$ e $g \in Y$ si ha che $fg = 0$ q.o., e in particolare $\langle f\,;\,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} fg\,dx = 0$.
Per concludere che $Y = X^\perp$ mi basta ora far vedere che ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ si scompone come somma di una funzione in X e di una in Y: in effetti
$$f = f\cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[0,1]} + f\cdot\mathbf{1}_{[0,1]}\,,$$
ed è ovvio che il primo addendo a destra dell'uguale appartiene a X mentre il secondo appartiene a Y. In particolare queste due funzioni sono le proiezioni ortogonali di f su X e $X^\perp$ rispettivamente.

OSSERVAZIONI. Il punto a) può essere dimostrato anche in modo diretto: data f_n una successione di funzioni in X che converge ad f in $L^2(\mathbb{R})$, devo far vedere che f appartiene a X. Ricordo che, a patto di passare ad una sottosuccessione, le funzioni f_n convergono a f puntualmente q.o., cioè al di fuori di un insieme di misura nulla M. Inoltre $f_n \in X$ significa che $f_n = 0$ su $[0,1]$ meno un insieme di misura nulla N_n. Mettendo insieme questi fatti otteniamo che $f = 0$ su $[0,1]$ meno l'insieme di misura nulla dato dall'unione di M e di tutti gli N_n, e quindi $f \in X$.

6 Dato $k = 2, 3, \dots$, dire per quali $r, p_1, \dots, p_k \in [1, \infty]$ vale il seguente enunciato:

(E) per ogni $f_1 \in L^{p_1}(\mathbb{R}), \dots, f_k \in L^{p_k}(\mathbb{R})$ il prodotto di convoluzione $f := f_1 * \cdots * f_k$ è ben definito (q.o.) e vale
$$\|f\|_r \leq \|f_1\|_{p_1}\cdots\|f_k\|_{p_k}\,. \tag{2}$$

[*Questa è nota come disuguaglianza di Young per la convoluzione, il caso $k = 2$ è stato visto a lezione.*]

SOLUZIONE. Voglio dimostrare che l'enunciato (E) vale se e solo se
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} + 1 - k\,. \tag{3}$$

Dimostrazione che (3) implica (E).
Per quanto visto a lezione basta dimostrare la (2) per ogni scelta di $f_1, \dots, f_k$ positive.
Posso inoltre supporre che $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_k$.

Procedo per induzione su k. Il caso $k = 2$ è stato visto a lezione. Faccio ora vedere che se (2) è vera per $k-1$ allora è vera anche per k. Prendo r' definito da

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{k-1}} + 1 - (k-1) \tag{4}$$

e pongo $f' := f_1 * \cdots * f_{k-1}$: per l'ipotesi induttiva vale allora che

$$\|f'\|_{r'} \le \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_{k-1}\|_{p_{k-1}} .$$

Osservo adesso che $f = f' * f_k$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \frac{1}{p_k} - 1$, e quindi posso applicare (2) per $k = 2$:

$$\|f\|_r \le \|f'\|_{r'} \|f_k\|_{p_k} .$$

Mettendo insieme questa formula e la precedente ottengo la (2).

Per completare questa dimostrazione manca solo un dettaglio: far vedere che il numero r' definito in (4) appartiene a $[1, +\infty]$, ovvero che $\frac{1}{r'} \le 1$. Usando (3) e (4) ottengo

$$\frac{1}{r'} = 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{p_k}$$

e dunque la condizione $\frac{1}{r'} \le 1$ equivale a

$$\frac{1}{p_k} \ge \frac{1}{r} .$$

Essendo $\frac{1}{p_k}$ maggiore o uguale a $\frac{1}{p_i}$ per ogni i (per l'ipotesi fatta all'inizio della dimostrazione), mi basta dimostrare che la media dei $\frac{1}{p_i}$ è maggiore o uguale a $\frac{1}{r}$, e in effetti

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p-i} = \frac{1}{k}\Big(\frac{1}{r} + k - 1\Big) \ge \frac{1}{k}\Big(\frac{1}{r} + (k-1)\frac{1}{r}\Big) = \frac{1}{r}$$

(Nel primo passaggio ho usato la formula (3), nel secondo ho usato che $1 \ge \frac{1}{r}$ per ipotesi.)

Dimostrazione che (E) implica (3).

Seguo l'idea vista a lezione. Data una funzione g su $\mathbb{R}$ e $\lambda > 0$, indico come al solito con $\sigma_\lambda g$ la funzione riscalata

$$\sigma_\lambda g(x) := \frac{1}{\lambda}\, g\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) ,$$

ed osservo che, per ogni $p \in [1, \infty)$,

$$\|\sigma_\lambda g\|_p = \lambda^{\frac{1}{p}-1} \|g\|_p \tag{5}$$

(basta applicare il cambio di variabile $x = \lambda t$ all'integrale $\|\sigma_\lambda g\|_p^p = \lambda^{-p} \int_{\mathbb{R}} |g(x/\lambda)|^p \, dx$).

Prese inoltre $f_1, \dots, f_k$ ed f come sopra, vale che

$$(\sigma_\lambda f_1) * \cdots * (\sigma_\lambda f_k) = \sigma_\lambda f . \tag{6}$$

Dimostro questa identità per induzione su k: per $k = 2$ ho che

$$\begin{aligned}(\sigma_\lambda f_1) * (\sigma_\lambda f_2)(x) &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} f_1\Big(\frac{x-y}{\lambda}\Big)\, f_2\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)\, dy \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} f_1\Big(\frac{x}{\lambda} - t\Big)\, f_2(t)\, dt = \frac{1}{\lambda} f_1 * f_2\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) = \sigma_\lambda f(x)\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio ho applicato il cambio di variabile $y = \lambda t$).

Suppongo ora che la (6) valga per $k-1$ e la dimostro per k: preso f' come sopra, l'ipotesi induttiva diventa $(\sigma_\lambda f_1) * \cdots * (\sigma_\lambda f_{k-1}) = \sigma_\lambda f'$, da cui segue che

$$(\sigma_\lambda f_1) * \cdots * (\sigma_\lambda f_k) = (\sigma_\lambda f') * (\sigma_\lambda f_k) = \sigma_\lambda (f' * f_k) = \sigma_\lambda f$$

(nel secondo passaggio ho usato la (6) per $k = 2$).

Usando quanto appena fatto ottengo infine che

$$\begin{aligned}\|f\|_r = \lambda^{1-\frac{1}{r}} \big\|\sigma_\lambda f\big\|_r &= \lambda^{1-\frac{1}{r}} \big\|(\sigma_\lambda f_1) * \cdots * (\sigma_\lambda f_k)\big\|_r \\ &\le \lambda^{1-\frac{1}{r}} \big\|\sigma_\lambda f_1\big\|_{p_1} \cdots \big\|\sigma_\lambda f_k\big\|_{p_k} \\ &= \lambda^{1-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}} \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k}\end{aligned}$$

(nel primo passaggio ho usato la (5), nel terzo la (6), nel quarto la (2), nel quinto la (5)). Riassumendo, ho dimostrato che per ogni $\lambda > 0$ vale

$$\|f\|_r \leq \lambda^{1-k-\frac{1}{r}+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k}} \|f_1\|_{p_1} \cdots \|f_k\|_{p_k} \,.$$

Ma se per assurdo non valesse la (3), allora l'esponente di λ in questa formula sarebbe diverso da zero, e quindi prendendo il limite per λ che tende a 0 oppure a $+\infty$ questa potenza di λ tende a zero; ottengo quindi $\|f\|_r = 0$ (a patto che le norme $\|f_i\|_{p_i}$ siano tutte finite) e questo è assurdo (a patto che f non sia identicamente nulla).

$\boxed{7}$ Consideriamo il problema (P) dato dall'equazione $u_{tt} + 2u_t = u_{xx}$ sull'intervallo spaziale $[0, \pi]$ con le condizioni al bordo $u(\cdot, 0) = u(\cdot, \pi) = 0$ e le condizioni iniziali $u(0, \cdot) = 0$ e $u_t(0, \cdot) = g$, dove g è la funzione nell'esercizio 3.

a) Discutere l'esistenza di una soluzione di (P), prestando particolare attenzione all'intervallo temporale di definizione.

b) Discutere la regolarità di tale soluzione.

Soluzione. Come al solito, risolvo formalmente il problema (P) scrivendo l'incognita u in serie di seni rispetto alla variabile x:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \, \sin(nx) \,.$$

Seguendo la solita procedura ottengo che il coefficiente b_n deve risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} = -n^2 y \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{12\,(-1)^{n-1}}{n^3} \end{cases}$$

(il valor imposto per $\dot{y}(0)$ è il coefficiente n-esimo della serie in seni di g, cfr. esercizio 3). Risolvo questo problema per $n = 0$ usando che la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$ è $y = e^{-t}(\alpha_1 + \alpha_2 t)$, ed ottengo

$$b_1(t) = 12\, te^{-t} \,.$$

Per $n = 2, 3 \ldots$ uso che la soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{y} + 2\dot{y} + n^2 y = 0$ è $y = e^{-t}\big(\alpha_1 \sin(\omega_n t) + \alpha_2 \cos(\omega_n t)\big)$ dove

$$\omega_n := \sqrt{n^2 - 1} \,,$$

ed ottengo

$$b_n(t) = \frac{12\,(-1)^{n-1}}{n^3 \omega_n} \, e^{-t} \sin(\omega_n t) \,.$$

Pertanto l'eventuale soluzione di (P) è data da dalla somma delle funzioni $b_n(t) \sin(nx)$ per $n = 1, 2, \ldots$, che però conviene riscrivere raccogliendo il fattore comune $12\, e^{-t}$, vale a dire

$$u(t, x) := 12\, e^{-t}(t \sin x + v(t, x)) \tag{7}$$

dove

$$v(t, x) := \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \omega_n} \sin(\omega_n t) \, \sin(nx)}_{v_n} \,. \tag{8}$$

Dimostro ora i seguenti enunciati, rispondendo così sia alla domanda a) che alla b):

(i) *la funzione v in (8) è ben definita e di classe C^2 su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e lo stesso vale per u in (7);*

(ii) *la funzione $v(t, \cdot)$ non è di classe C^4 per una famiglia densa di t; in particolare v è al più di classe C^3, e lo stesso vale per u;*

(iii) *u risolve il problema (P).*

Dimostrazione di (i). Osservo che per ogni $h, k = 0, 1, \ldots$ vale

$$D_t^h D_x^k v_n(t,x) = (-1)^{n-1} \omega_n^{h-1} n^{k-3} f_h(\omega_n t) f_k(nx)$$

dove $f_h(s) := D_s^h(\sin s)$ è uguale a $\pm \sin s$ oppure a $\pm \cos s$, a seconda di h. Quindi [1]

$$\left\| D_t^h D_x^k v_n(t,x) \right\|_\infty = \omega_n^{h-1} n^{k-3} \sim n^{h+k-4} ,$$

e dunque la somma su n di queste norme è finita se $h + k \le 2$, da cui segue che la funzione v è ben definita e di classe C^2 su $\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione di (ii). Supponiamo che per un certo t la funzione u sia derivabile 4 volte in x con derivata continua. Allora, tenendo conto che $v(t,\cdot)$ e $D_x^2 v(t,\cdot)$ si annullano per $x = 0$ e $x = \pi$, i coefficienti $c_n(t)$ della serie in seni di $D_x^4 v(t,\cdot)$ sono quelli di $v(t,\cdot)$ moltiplicati per n^4, vale a dire

$$c_n(t) = \frac{(-1)^{n-1} n}{\omega_n} \sin(\omega_n t) ,$$

e se t/π è irrazionale la successione $c_n(t)$ non tende a 0 per $n \to +\infty$, ed in particolare non appartiene a ℓ^2, ma questo è non è possibile.
Per dimostrare che $c_n(t)$ non tende a 0 osservo che $\omega_n t = nt + o(1)$ per $n \to +\infty$, quindi $\sin(\omega_n t) = \sin(nt) + o(1)$ ed è noto che se t/π è irrazionale i punti di accumulazione della successione $\sin(nt)$ sono tutti i punti di $[-1, 1]$, e dunque lo stesso vale per la successione $\sin(\omega_n t)$, e quindi anche per $c_n(t)$.

Dimostrazione di (iii). Usando le formule (7) e (8) si vede facilmente che u soddisfa le condizioni al bordo e le condizioni iniziali del problema (P). Utilizzando il fatto che la serie in (8) commuta con tutte le derivate di ordine 1 o 2 si dimostra con qualche calcolo che u soddisfa l'equazione differenziale in (P).

<u>OSSERVAZIONI</u>. La soluzione di (P) è effettivamente di classe C^3, ma la dimostrazione non è semplice.

$\boxed{8}$ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione *positiva* e di classe C^1 che si annulla solo in $x = \pm 1$, sia S l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tali che $|x| < 1$ e $|y| = f(x)$, e infine sia $\overline{S}$ la chiusura di S.

a) Dimostrare che S è una superficie di classe C^1 (senza bordo e di dimensione 2).

b) Dimostrare che $\overline{S}$ non è una superficie di classe C^1, con o senza bordo.

c) Esprimere l'area di S in termini della funzione f.

<u>SOLUZIONE</u>. a) L'insieme S è contenuto nell'aperto $A := (-1, 1) \times \mathbb{R}^2$, e in questo aperto è definito dall'equazione $|y| = f(x)$, ovvero

$$\underbrace{|y|^2 - f^2(x)}_{g(x,y)} = 0 .$$

Siccome la funzione g è di classe C^1 mi basta quindi dimostrare che il gradiente di g non è nullo nei punti di S. In effetti

$$\nabla g(x,y) = (-2f(x)\, f'(x),\, 2y)$$

e per ogni $(x, y) \in S$ si ha che $|y| = f(x) > 0$, e dunque $y \neq 0$ e $\nabla g(x, y) \neq 0$.

b) L'insieme $\overline{S}$ contiene il punto $p := (1, 0)$ e ora dimostro che lo spazio tangente a $\overline{S}$ in p è contenuto nella retta $\mathbb{R} \times \{0\}$, mentre se $\overline{S}$ fosse una superficie dovrebbe essere un piano o un semipiano.
Ricordo che lo spazio tangente in questione è dato dall'insieme dei vettori $\dot\gamma(0)$ dove $\gamma : [0, \delta] \to \overline{S}$ è un cammino di classe C^1 tale che $\gamma(0) = p$. Dette γ_x e γ_y le componenti di γ, devo dimostrare che $\dot\gamma_y(0) = 0$. Usando l'equazione che definisce $\overline{S}$ e lo sviluppo di Taylor di ordine 1 di γ_x in $t = 0$ ottengo che, per $t \to 0$,

$$|\gamma_y(t)| = f(\gamma_x(t)) = f\big(1 + \dot\gamma_x(0)\, t + o(t)\big) .$$

[1] $\|\cdot\|_\infty$ indica la norma del sup su $\mathbb{R}^2$; il simbolo $\sim$ si riferisce al comportamento asintotico per $n \to +\infty$.

Osservo ora che $f(1) = 0$ per ipotesi, e che $f'(1) = 0$ perché 1 è un punto di minimo di f; dunque lo sviluppo di Taylor di ordine 1 di f in $x = 1$ è $f(1 + h) = o(h)$ e quindi

$$|\gamma_y(t)| = f\big(1 + \dot{\gamma}_x(0)\, t + o(t)\big) = o(t)\,,$$

che implica $\dot{\gamma}_y(0) = 0$.

c) Osservo che la mappa $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ data da

$$\Phi(x, \theta) = (x,\ f(x) \cos\theta,\ f(x) \sin\theta)$$

è di classe C^1 e mappa bigettivamente il rettangolo $D := (-1, 1) \times [0, 2\pi)$ in S; pertanto posso usarla per calcolare l'area di S.

A questo scopo osservo che

$$\nabla^t\Phi\,\nabla\Phi = \begin{pmatrix} 1 & f'\cos\theta & f'\sin\theta \\ 0 & -f\sin\theta & f\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'\cos\theta & -f\sin\theta \\ f'\sin\theta & f\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (f')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}\,,$$

quindi il determinante Jacobiano di Φ è

$$J\Phi = \sqrt{\det\big(\nabla^t\Phi\,\nabla\Phi\big)} = f\sqrt{1 + (f')^2}\,,$$

e infine l'area di S è

$$\sigma_2(S) = \int_D J\Phi\,dx\,d\theta = 2\pi \int_{-1}^{1} f\sqrt{1 + (f')^2}\,dx\,.$$