

Elementi di Teoria degli insiemi
a.a. 2010-11
Compitino del 30 Maggio 2011

Non si possono usare appunti o libri

Esercizio 1. Ricordiamo la definizione della gerarchia di von Neumann:

$$\begin{aligned}V_0 &= \emptyset \\V_{\alpha+1} &= P(V_\alpha) \\V_\lambda &= \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha \text{ per } \lambda \text{ ordinale limite.}\end{aligned}$$

Senza usare l'assioma della scelta, per quali ordinali α riuscite a dimostrare l'esistenza di un buon ordine su V_α ?

Esercizio 2. Senza usare l'assioma della scelta, per quali ordinali α riuscite a dimostrare l'esistenza di un ordine totale su V_α ?

Esercizio 3. Ricordiamo la definizione della funzione \beth da ordinali a cardinali.

$$\begin{aligned}\beth_0 &= \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} &= 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\lambda &= \sup_{\alpha < \lambda} \beth_\alpha \text{ per } \lambda \text{ ordinale limite.}\end{aligned}$$

Per quali ordinali α si ha $|V_\alpha| = \beth_\alpha$?

Esercizio 4. Si calcoli $\beth_\alpha^{\beth_\beta}$ (si diano delle stime se non è possibile fornire il risultato esatto).