Elementi di Teoria degli insiemi
Appello 6
Prova scritta del 9 Marzo 2011

Esercizio 1. (Funzione di Ackermann) Si dimostri all'interno della teoria degli insiemi di Zermelo Fraenkel che esiste una ed una sola funzione $A\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che verifica le seguenti proprietà:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } m = 0 \\ A(m-1,1) & \text{se } m > 0 \text{ e } n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{se } m > 0 \text{ e } n > 0. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia X l'insieme di tutte le successioni binarie infinite $f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Data una successione binaria finita $\sigma\colon \{0,\ldots,n\} \to \{0,1\}$ ($n \in \mathbb{N}$) sia $[\sigma] \subset X$ l'insieme delle $f \in X$ che estendono σ. Dato un sottoinsieme Y di X diciamo che Y è aperto se è una unione di insiemi della forma $[\sigma]$, e diciamo che Y è chiuso se il suo complemento è aperto. Diciamo che $Y \subset X$ è denso se interseca ogni aperto. Diciamo che $f \in Y$ è un punto isolato di Y se esiste un aperto O tale che f è l'unico elemento di $O \cap Y$ (o equivalentemente esiste una successione binaria finita σ tale che f è l'unico elemento di Y che estende σ). Infine diciamo che $Y \subset X$ è perfetto se è chiuso, non vuoto, e senza punti isolati.

1. Si trovi un sottoinsieme non chiuso di X.
2. Quanti sono i sottoinsiemi chiusi di X?
3. Si dimostri che ogni insieme perfetto ha cardinalità $2^{\aleph_0}$.
4. Si trovi un sottoinsieme denso di X diverso da X stesso.
5. Si calcoli la minima cardinalità di un sottoinsieme denso di X.
6. Quanti sono i sottoinsiemi densi di X?