

Elementi di Teoria degli insiemi
a.a. 2010-11
Compito del 21 Settembre 2011

Non si possono usare appunti o libri

Esercizio 1. Trovare, se esiste, un cardinale κ tale che per ogni scelta di cardinali $\alpha, \beta < \kappa$ si abbia $\alpha^\beta < \kappa$.

Esercizio 2. Si assuma la teoria degli insiemi di Zermelo Fraenkel con l'assioma di fondazione.

1. Stabilire se esistono insiemi non vuoti A, B tali che $A \times B \subset B$.
2. Stabilire se esistono insiemi non vuoti A, B tali che $A \times B = B$.

Esercizio 3. Dato un ordinale α si consideri la relazione binaria $R \subset \alpha \times \alpha$ così definita: $(x, y)R(z, w)$ se e solo se $(x < z \wedge y \leq w) \vee (x \leq z \wedge y < w)$.

1. R è un buon ordine?
2. R è una relazione ben fondata?
3. Si trovi una funzione $f : \alpha \times \alpha \rightarrow ON$ tale $(x, y)R(z, w)$ implica $f(x, y) < f(z, w)$ per ogni $x, y, z, w \in \alpha$. Si cerchi inoltre di fare in modo che f assuma i valori più piccoli possibili.
4. Supponendo $\alpha = \omega_1$, si calcolino i valori $f(3, 2)$, $f(\omega, \omega)$, $f(\omega^3 + \omega, \omega^2)$.