Teoria degli insiemi di Zermelo - Fraenkel (Z F)

$\Downarrow$

Primo sviluppiamo la teoria di Cantor.

Berarducci

14 - 05

Teoria di Cantor.

Def: Due insiemi X, Y sono *equipotenti* se esiste $f: X \to Y$ bigettiva.

Oss: In seguito definiamo uno oggetto $|\cdot|$ (cardinalità) tale che:

$$X \text{ è equipotente a } Y \iff |X| = |Y|$$

Oss: Possiamo definire $|X|$ come la classe di congruenza degli insiemi equipotenti a X. Oppure possiamo scegliere un rappresentante privilegiato.

Es: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} - \{0\}|$

Dim: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{0\}$, $x \mapsto x+1$ è la corrispondenza biunivoca cercata.

Def: Un insieme X è *numerabile* se $|X| = |\mathbb{N}|$

Es: $\mathbb{N} - \{0\}$ è numerabile.

Es: I numeri pari $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è *numerabile*

$f: x \mapsto 2x$ è la corrispondenza biunivoca.

Oss: Per gli insiemi infinito può capitare che $\exists$ un sottoinsieme proprio con la stessa cardinalità di quello che lo contiene.

Oss: $\in$ $\to$ appartiene a.

$\subset$ $\to$ contenuto in. (è equivalente a $\subseteq$)

- $3 \in \mathbb{N}$
- $2\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$

Def: $X \subset Y \iff \forall a \ (a \in X \to a \in Y)$

Def: $X = Y \iff X \subset Y$ e $Y \subset X$

Prop: A, B sono insiemi numerabili (disgiunti).

$$\Rightarrow A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\} \text{ è numerabile.}$$

Dim: $2\mathbb{N}$ è numerabile.

$2\mathbb{N}+1$ (dispari) sono numerabili

$A \overset{f}{\sim} 2\mathbb{N}$ $\quad$ $B \overset{g}{\sim} 2\mathbb{N}$ ...

mando gli elementi di A nei pari, gli elementi di B nei dispari.

Corollario: $\mathbb{Z}$ è numerabile.

Dim:

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{\text{negativi}\}$. $\qquad \{\text{negativi}\} = \{x \mid x < 0\}$

$\{\text{negativi}\} \sim \mathbb{N} \quad \Rightarrow \{\text{negativi}\}$ è numerabile.

$x \longmapsto -x$

Poichè $\mathbb{Z}$ è unione di due numerabili è numerabile.

Esercizio (Albergo di Hilbert): $\boxed{\text{Se } X \text{ è numerabile, } a \notin X \Rightarrow X \cup \{a\} \text{ è numerabile.}}$

Dim: $f : X \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$

$\Rightarrow X = \{ g(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

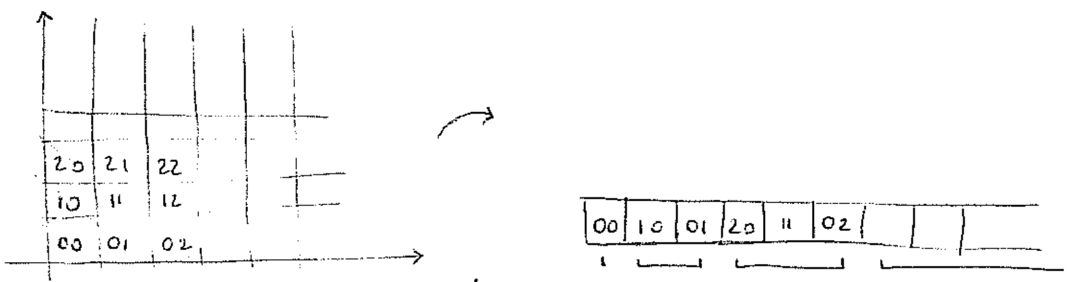
Considero:

$g : X \cup \{a\} \to \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a \longmapsto 0 \\ g(x) \longmapsto n+1 \quad \text{se } x = f^{-1}(n). \end{cases}$$

Prop: $\boxed{\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N}\} \text{ è numerabile}}$ (albergo di Cantor)

Dim:



metodo diagonale di Cantor

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

è intero poichè almeno uno tra $x+y$ e $x+y+1$ è pari

$$\frac{n(n+1)}{2} = 1 + \dots + n$$

Abbiamo $\underbrace{1}_{}+2+3+\dots \qquad + \underbrace{x}_{}$

posti su ogni diagonale. $\qquad$ posto sulla diagonale

Ci sono $k+1$ elementi sulla diagonale

$$\{(a,b) \mid a+b=k\}$$

Devo sistemare l'elemento (x,y)

Sia $n = x+y$.

Sotto (x,y) ci sono n diagonali, e quindi $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi

Quindi a partire dall'alto prima di (x,y) sulla diagonale $\{(a,b) \mid a+b=n\}$ ci sono x elementi (si parte da 0) ⇝ (x,y) va in posizione:

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x$$

■

Oss. Si può dim. algebricamente che è corrispondenza biunivoca.

2° dim.

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} - \{0\}$$

$$g(x,y) = 2^{x}(2y+1)$$

Voglio dim. che g è biunivoca.

È biunivoca poiché ogni numero (per scomposizione in fattori primi, unica) è prodotto tra una potenza di 2 e un numero dispari.

■

Come procede graficamente la II° dim?

$00 \longrightarrow 0$

$01 \longrightarrow 2$

$02 \longrightarrow 4$

⇝ quelli del primo piano vanno nei numeri pari

$10 \longrightarrow 1$

$11 \longrightarrow 5$

⇝ vanno nelle stanze libere una sì e una no

⇓

anche gli altri piani.

Corollario:

$\boxed{A, B \text{ numerabili} \rightarrow A \times B \text{ è numerabile}}$

Teorema (Cantor): $\mathbb{Q}$ è numerabile

1° dimostrazione:

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \quad \text{iniettiva}$$

$$\frac{m}{n} \longmapsto (m,n)$$

$(m,n)=1$ cioè coprimi.

$n > 0$

tuttavia non è suriettiva.

$(0) = (0, 1)$

$\Rightarrow$ Ho messo in corrispondenza $\mathbb{Q}$ con $f(\mathbb{Q})$.

$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}$ è in corrispondenza con un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$.

) Lemma (esercizio): Un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$ è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$.

Dando per buono il lemma, ottengo la tesi ∎

Def: Sia X insieme. $n \in \mathbb{N}$. Dico che X ha n elementi se $\exists f: X \to \{0, 1, \dots, n\}$ corrispondenza biunivoca.

Def: X è finito se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. X ha n elementi.

Esercizio (difficile): Un sottoinsieme di un insieme finito è finito. (dim. per induzione) (vedi [illegible])

Esercizio (difficile): Se $X \subsetneq Y$ e Y ha n elementi $\Rightarrow \exists k < n$ t.c. X ha k elementi.

Corollario (dell'esercizio): Un insieme finito non può essere messo in corrispondenza con una parte propria di se' stesso.

Teorema: $\boxed{\mathbb{Q} \text{ è numerabile}}$

2° dimostrazione:

Fissato $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ un numero finito di elementi di $\mathbb{Q}$ della forma $\frac{a}{b}$ (ridotti) con $|a| + |b| < n$

$n = 1 \to \frac{0}{1} \rightsquigarrow (0, 0)$

$n = 2 \to$

$\vdots$

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\frac{m}{n} \longmapsto k$

[da verificare che sia biettiva]

$f\left(\frac{m}{n}\right) = k \iff$ ci sono k razionali che precedono $\frac{m}{n}$ se li ordino nell'ordine su $\mathbb{Q}$ in cui vengono prima di $\frac{m}{n}$ i razionali $\frac{a}{b}$ con $|a| + |b| < |m| + |n|$ e a parità di somma precede quello con numeratore più piccolo.

(lo posso fare perchè con una data somma ci sono un numero finito).

Teorema: $\boxed{|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|}$

Dim: (dimostrazione diagonale)

Considero $\{a_n\}$. $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n$. Basta fare vedere che $\exists b \notin \{a_n\}$ $b \in \mathbb{R}$.

$b \in (0, 1)$. $b = 0, \dots$

L'n-esima cifra decimale di b è [illegible]

In questo modo $b \neq a_n \ \forall n \Rightarrow b \notin \{a_n\}$ ∎

[perché differisce per l'n-esima cifra decimale]

Def. X, Y sono insiemi.

$$|X| \leq |Y| \iff X \text{ è equipotente a un sottoinsieme di } Y.$$

cioè $\exists \ f: X \to Y$ iniettiva.

Def. $|X| < |Y|$ se $|X| \leq |Y|$ e $|X| \neq |Y|$

Teo.: $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

Dim.: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$

Per il teo. di Cantor, $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

(*) **Dim.:**

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ insieme infinito. Voglio definire $f: A \to \mathbb{N}$ biettiva.

$\exists \ a_0 = \min(A)$ per le proprietà dei naturali.

Definisco $f: a_0 \longmapsto 0$.

A infinito $\Rightarrow A \setminus \{a_0\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists \ a_1 = \min(A \setminus \{a_0\})$

Definisco $f: a_1 \longmapsto 1$

⋮

∎

Va bene qualsiasi libro con:
1) Cardinali
2) ordinali
3) assiomi di Z.F.

Borandacci

16.03

Vedremo che $|\mathbb{R}-\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}| =: c$ continuo

$$|\mathbb{N}| =: \aleph_0$$

Prop: $\boxed{|\mathbb{R}-\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|}$

Dim: $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ non è numerabile.

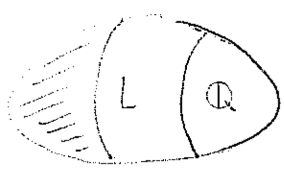
Se fosse $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ numerabile $\Rightarrow \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ è numerabile. ASS.

$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ contiene un sottoinsieme numerabile.

(Vedremo che vale che ogni insieme infinito contiene un insieme numerabile)

Ad esempio:
$$\sqrt{2}+\mathbb{Q} = \left\{ \sqrt{2} + \frac{m}{n} \;\middle|\; m,n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}-\mathbb{Q}$$
ed è numerabile (lo posso mettere in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Q}$ tramite $-\sqrt{2}$).

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



$$\mathbb{R} = [\mathbb{R}-(L\cup\mathbb{Q})] \cup (L\cup\mathbb{Q})$$ con L insieme num. $L \subset \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

$\Rightarrow L\cup\mathbb{Q}$ è numerabile.

$$\Rightarrow \mathbb{R} = [\mathbb{R}-(L\cup\mathbb{Q})] \cup (L\cup\mathbb{Q}) \sim [\mathbb{R}-(L\cup\mathbb{Q})] \cup L = \mathbb{R}-\mathbb{Q}$$

$$|L\cup\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}| = |L| = \aleph_0$$

Più in generale vale che:

Teorema: A insieme, B insieme infinito. Allora:
$$\boxed{|A|<|B| \Rightarrow |B-A| = |B|}$$

Faremo più avanti la dim.

Def. $x_0 \in \mathbb{R}$ è algebrico se $\exists\, p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ t.c. $p(x_0)=0$.

Per esempio: $\sqrt{2}$ è algebrico poichè è zero di x^2-2.

Si può dimostrare che i numeri algebrici sono numerabili

Es. I numeri algebrici sono numerabili, e quindi i trascendenti sono c.

(Per il teo. non dimostrato; oppure si può ripetere il ragionamento della prop. a meno di dim. che π è trascendente e considerare $\{\pi + \frac{m}{n} | \ldots$

...ante cardinalità ci sono?

Cardinalità finite $\qquad \aleph_0 \qquad c$

$\mathbb{N} \qquad \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \qquad \mathbb{R}-\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \qquad$ trascendenti.

algebrici

$\vdots$

...omanda: $A \subset \mathbb{R}$. Posso concludere che

$$|A| = \begin{cases} \aleph_0 \\ c \\ \text{finito} \end{cases} \quad ? \quad \rightsquigarrow \text{ \underline{non} si sa!}$$

Se A è aperto, chiuso, sì!

...sistono altre cardinalità infinite.

...ef: X insieme $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(X) = \{ Y \mid Y \subset X \} \ni X$ insieme delle parti

...sempio: $X = \{0,1,2\} \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

...ss: X è finito con n elementi $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.

...ef: X ha n elementi se lo posso mettere in corr. biunivoca con $\{0,\dots,n-1\}$.

...o di Cantor: X insieme $\Rightarrow$ $\boxed{|\mathcal{P}(X)| > |X|}$

Dim. È ovvio che $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ tramite

$$f: X \longrightarrow \mathcal{P}(X) \qquad (f \text{ è iniettiva!})$$
$$x \longmapsto \{x\}$$

Oss. La dim. che $\mathbb{R}$ non è numerabile si dice diagonale.

Mostro che $|\mathcal{P}(X)| \neq |X|$

Per assurdo, esiste $f: X \to \mathcal{P}(X)$ biunivoca.

$$x \longmapsto A(x) \in \mathcal{P}(X)$$

Mostriamo che f non può essere suriettiva.

Cerco $\Delta \subset X$ t.c. $\Delta \neq A_x \ \forall x$

Cerco Δ in modo che

$$x \in \Delta \Leftrightarrow x \notin A_x.$$

Cioè definisco

$$\boxed{\Delta = \{x \in X \mid x \notin A_x\}.}$$

$\Rightarrow \forall x,\ \Delta \neq A_x$ poiché $x \in \Delta \Leftrightarrow x \notin A_x$. $\Rightarrow f$ \underline{non} è suriettiva ∎

Oss. [illegible]

Poniamo

$$2^c = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| \qquad 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$
$$\vee$$
$$c$$
$$\vee$$
$$\aleph_0$$

⇝ possiamo fare parti delle parti e ottenere cardinalità sempre più grandi.

Teorema: $2^{\aleph_0} = c$ cioè $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

Dim.: Possiamo dim. che $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \geq |\mathbb{R}|$ e $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{R}|$ in virtù di

Teo di Cantor-Bernstein: $|A| \leq |B|,\ |B| \leq |A| \Longrightarrow |A| = |B|$.

Esempio: $|(-1,1)| = |[-1,1]|$

$$f: (-1,1) \longrightarrow [-1,1] \qquad x \longmapsto x$$ inclusione che è iniettiva.

$$g: [-1,1] \longrightarrow (-1,1) \qquad x \longmapsto \frac{x}{2}$$ iniettiva.

$\Rightarrow |(-1,1)| = |[-1,1]|$ (Trovare la corrispondenza biunivoca non è facile)

$X \mapsto |X| \in \text{CARD} = \{\text{classe delle cardinalità}\}$.

Un paradosso sull'insieme dei cardinali: è un insieme ???

Domanda: $|\text{CARD}| = ?$

$$K =: |\text{CARD}| \geq \aleph_0 \quad ⇝ \quad \aleph_0,\ 2^{\aleph_0},\ 2^{2^{\aleph_0}} \ldots$$

Sono almeno $\aleph_0$

In realtà sono di più!

Sia $\{A_i \mid i \in I\}$ t.c. $|I| = K$; per ogni cardinale, scelgo un ~~elemento~~ insieme di quella cardinalità e lo metto lì.

Sia $X = \bigcup_i A_i \Rightarrow |X| \geq |A_i| \Rightarrow |\mathcal{P}(X)| > |X| \geq |A_i|\ \forall i$.

Ma gli A_i esauriscono tutte le cardinalità esistenti $\longrightarrow$ PARADOSSO!

Da questi paradossi come si esce? ⇝ CARD non è un insieme.

C'è quindi bisogno di una teoria che mi definisca quali sono gli insiemi.

Proposizione: Sia X finito con n elementi $\Rightarrow |\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

Dim.: Procediamo per induzione su n.

$n=0$. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \rightarrow |\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$ ✓

$n=1$ $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\} \rightarrow |\mathcal{P}(\{a\})| = 2 = 2^1$ ✓

Sia $n>1$. Suppongo la tesi verificata per n e dimostro per $n+1$

Voglio dimostrare che $\mathcal{P}(\{0,\dots,n\}) = 2^{n+1}$

Sia $\Gamma_1 = \{\emptyset, \{n\}\}$ $\quad \Gamma_2 = \{X \subseteq \{0,\dots,n\} \mid n \notin X\} = \mathcal{P}(\{0,\dots,n-1\})$

$$\Phi : \mathcal{P}(\{0,\dots,n\}) \longrightarrow \Gamma_2 \times \Gamma_1$$

$$\Phi(A) = \begin{cases} A \times \emptyset & \text{se } n \notin A \\ (A \setminus \{n\}) \times \{n\} & \text{se } n \in A. \end{cases}$$

$\Rightarrow \Phi$ è biettiva.

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(\{0,\dots,n\})| = |\Gamma_2 \times \Gamma_1| = \underbrace{|\Gamma_2|}_{\substack{\parallel \\ 2}} \cdot \underbrace{|\Gamma_1|}_{\substack{\parallel \\ 2^n}} \leftarrow \text{hp ind.} = 2^{n+1}$$

∎

Assiomi di Zermelo (1904-1908)

Berarducci
18 [illegible]

Altro test: Levy

Prima di Zermelo, Frege costruì un sistema di soli due assiomi

$\in$ → unico simbolo da assiomatizzare.

Diamo per buoni i simboli logici:

$$= \quad \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \exists x \quad \forall x \quad \to$$

Tutta la matematica può essere scritta utilizzando solo i simboli logici.
Frege diede prima questi due assiomi.

1. Assioma di estensionalità: X, Y sono insiemi.

$$x = y \iff \forall u\,(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$$

(N.B. non conta l'ordine!)

Principio di Leibniz su $=$.

$$x = y \Rightarrow [P(x) \leftrightarrow P(y)]$$

Se due cose sono uguali godono delle stesse proprietà.

⇒ Nell'assioma di estensionalità, la freccia ⇐ è l'unica che conta.

2. Astrazione di Frege

Data una proprietà P, $\exists$ un insieme X t.c.

$$\forall u\,(u \in X \leftrightarrow p(u))$$

← esistenza degli insiemi che godono delle prop. P.

Oss. Tale insieme X è unico per l'estensionalità. Posso chiamarne X

$$X = \{x \mid p(x)\}$$

Frege diede solo questi due assiomi. Poi Russel trovò un paradosso:

Paradosso di Russel. In base agli assiomi di Frege posso considerare due tipi di insiemi:

1) X è normale se $X \notin X$.

2) X è anormale se $X \in X$.

Considero:

$$R = \{X \mid X \notin X\}$$ insieme degli insiemi normali.

Domanda: $R \in R$?

Se $R \in R \Rightarrow R \notin R$ per def. di R.

Se $R \notin R \Rightarrow$ per definizione di normali, $R \in R$ poiché R è insieme degli insiemi normali.

Allora:

$$R \in R \iff R \notin R \quad \text{ASSURDO!}$$

⇒ Anche il sistema di Frege è paradossale.

Come si esce? Zermelo propose di indebolire l'assioma di astrazione facendolo diventare:

Assioma di comprensione: Dato A insieme, $\exists$ un insieme B t.c.

$$\forall x \ (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$$

$\forall A, \exists B$ t.c. $B = \{x \in A \mid P(x)\}$

Def: $y = \{x \mid p(x)\} \overset{def}{\iff} \forall u \ (u \in y \leftrightarrow p(u))$ (può esistere oppure no)

Def: $\{x \mid p(x)\}$ esiste $\leftrightarrow$ $\exists$ y insieme t.c. $y = \{x \mid p(x)\}$

Def: $\{x \in A \mid p(x)\} = \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$.

N.B. Tutte le variabili sono insiemi.

Quindi l'assioma di comprensione dice che

$$\forall A, \ \exists \ \{x \mid x \in A \wedge p(x)\}$$

Con questo assioma, l'insieme di Russel <u>non</u> esiste. {Cioè dagli assiomi non posso dedurre che R sia un insieme: infatti non lo è, perché la sua esistenza mi porta ad un paradosso.

Teorema: $\boxed{\neg \exists V \quad \forall x \ (x \in V)}$ (Non esiste l'insieme di tutte le cose)

$\Updownarrow$

$\neg \exists V$ t.c. $V = \{x \mid x = x\}$ ($x = x$ vale $\forall x$)

Dimostrazione: Sia A insieme. Basta trovare un oggetto che non sta in A.

Sia $R = \{x \in A \mid x \notin x\}$

$R \in R \leftrightarrow R \in A \wedge R \notin R$ (1)

Assioma (del vuoto) $\exists X$ t.c. $\forall u \ (u \notin X)$ (esistenza del vuoto)

Sicuramente $R \notin A$. Se $R \in A$, avremmo un paradosso. $\Rightarrow R \notin A$ (2) ■ ⊛

Oss: In un sistema contraddittorio, posso dim. tutto.

Tavole di verità: Dati due enunciati A, B

0 = falso

1 = vero.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A	$\neg A$
0	1
1	0

Esempio: $x > 2 \rightarrow x^2 > 4$

È sempre vera questa implicazione, anche per i valori di x per cui $x \leq 2$.

Se (1) è vero, abbiamo due casi:

- (2) è vero
- (2) è falso

$\text{Vero} \wedge \varphi \leftrightarrow \varphi$ (vero è elemento neutro rispetto a $\wedge$)

Se $R \in A \Rightarrow$ $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ ASSURDO!

Oss. la comprensione mi crea sottoinsiemi di insiemi che ho già.
→ ho bisogno di nuovi assiomi (eccezioni all'astrazione).

Assioma della coppia. $\forall a,b$ $\exists \{x \mid x = a \vee x = b\}$ cioè

$$\forall a,b, \ \exists Y \ \forall x \ (x \in Y \leftrightarrow x = a \vee x = b)$$

Oss: l'assioma della coppia deriva da quello di astrazione di Frege, ma non da quello di comprensione.

La soluzione di Frege è considerare solo gli insiemi che servono ai matematici.

Notazioni:

* $\{a,b\}$, $\{a,b,c,d\}, \dots$ ← assiomi della coppia e dell'unione
* $\{x \in A \mid P(x)\}$ ← assioma di comprensione
* $\{F(x) \mid x \in A\}$ → Es. $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ ← assioma di rimpiazzamento (Fraenkel)

Assioma dell'unione. $\forall F$ (famiglia di insiemi), $\exists Y$ t.c. $(Y = \bigcup F)$

Def: $Y = \bigcup F \Leftrightarrow \forall z \ (z \in Y \to \exists X \ (x \in F \wedge z \in X))$ (unione unaria).

Notazione: $\bigcup F = \bigcup_{X \in F} X$

Nota [illegible]

($\Rightarrow$ $\exists F$ [illegible])

In fatti [illegible] $\forall z$ [illegible] perché $\not\exists$ $x \in F$ [illegible]

$\Rightarrow \forall z$, $z \notin \bigcup F$ [illegible]

Esercizio: $\{a,b\} = \{b,a\}$.

$\varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$ (Due enunciati veri negli stessi casi sono equivalenti)

Notazione: $\exists x \in A \ P(x) \Leftrightarrow \exists x \ (x \in A \wedge P(x))$

$\forall x \in A \ P(x) \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \to P(x))$

Def. $A \cup B = \bigcup \underbrace{\{A,B\}}_{\text{assioma della coppia}}$ (uso ass. della coppia e poi dell'unione) Unione binaria

Oss. $u \in A \cup B \Leftrightarrow \exists z \in \{A,B\}$ t.c. $u \in z \Leftrightarrow u \in A \vee u \in B$

⇝ Dall'unione generalizzata si può ottenere quella binaria.

Es. Come costruisco $\{a,b,c\}$? $\{a,b,c\} = \{a,b\} \cup \{c\} = \bigcup \{\{a,b\}, \{c,c\}\}$

$\{c\} = \{c,c\}$

Def: $A\cap B = \{x \mid x\in A \wedge x\in B\} = \{x\in A \mid x\in B\}$ ← lo definiamo con l'assioma di comprensione.

Def: $Y \overset{def}{=} \bigcap F = \bigcap_{X\in F} X \quad \leftrightarrow \quad \forall z\ (z\in Y \leftrightarrow \forall X\in F\ (z\in X))$

Es. Posso dedurre che $\forall F,\ \exists Y$ t.c. $Y = \bigcap F$?

$$Y = \bigcap\phi \leftrightarrow \forall z\ (z\in Y \leftrightarrow \forall x\ (\underbrace{x\in\phi}_{\text{falsa}} \to z\in X)$$

$$\updownarrow$$

$$\forall z (z\in Y) \longrightarrow \bot \quad \underline{\text{ASSURDO!}}$$

(Abbiamo dimostrato che non esiste la famiglia di tutti gli insiemi)

Teorema: $\boxed{\forall F\neq\phi \quad \exists Y\ (Y=\bigcap F)}$ (Per $F=\phi$ non si può fare l'intersezione).

Dim 1.:

$\circledast$ $Y = \{x\in \bigcup F \mid \forall z\in F,\ x\in z\}$ esiste poiché esiste l'unione e applichiamo l'estensione

Devo verificare che coincide con la mia definizione di Y (verificare!)

Dim 2:

Assiomi logici: $\underbrace{=}_{\uparrow \text{ Leibniz}}$ $\quad \underbrace{\vee\ \wedge\ \neg\ \to}_{\uparrow \text{ tavole di verità}}$ $\quad \underbrace{\forall x \quad \exists x}_{?}$

S)

$F\neq\phi \Rightarrow \exists A\in F$. Allora

$\bigcap Y = \{u\in A \mid \forall X\in F,\ u\in X\}$ è insieme per l'estensionalità. ■

$\forall x \to$ lo dimostro per un elemento arbitrario senza ipotesi su tale elemento

Regola $\forall x$: Se x non compare nelle hp e ottengo $P(x)$, allora $\forall x\ P(x)$

Regola $\exists x$:

1)
⋮
$\exists x\ P(x)$. | ← rimuovere un $\exists$.
Sia a t.c. $P(a)$
⋮

2) $\dfrac{P(t)}{\exists x P(x)}$ | ← costruire un $\exists$.

Sia $Q(\dots)$ predicato. BERARDUCCI 21-03

$$Q(\{x \mid P(x)\}) \iff \exists Y \text{ insieme t.c. } [\underbrace{Y = \{x \mid P(x)\}}_{\forall u\,[u \in Y \leftrightarrow P(u)]} \wedge Q(Y)]$$

$Q(z) = (Y = z)$

Def: $\{x \mid P(x)\}$ si dice classe.

Def: $Y = \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$ $\qquad \mathcal{F}$ = insieme di insiemi $\iff Y = \{u \mid \exists X \in \mathcal{F} \quad u \in X\}$

OSS: $u \in X \in \mathcal{F} \Rightarrow u \in \bigcup \mathcal{F}$ (non è detto che $u \in \mathcal{F}$)

Assioma dell'unione: $\forall \mathcal{F} \quad \exists Y$ t.c. $Y = \bigcup \mathcal{F}$ (per ogni famiglia posso farne l'unione)

Oss: $P(u) =: \exists X \in \mathcal{F} \quad u \in X \rightarrow \bigcup \mathcal{F} = \{u \mid P(u)\}$ è insieme (per l'assioma di unione)

Oss: $A \cup B = \bigcup \{A, B\}$ unione binaria.

Assioma della coppia: $\forall a, b \quad \exists Y \qquad (Y = \{a, b\})$

Def: $Y = \{a, b\} = \{x \mid x = a \vee x = b\}$

Es: $\{a, b\} = \{b, a\}$ $\qquad$ Oss: $\{a, a\} =: \{a\}$

Assioma della potenza: $\forall X \quad \exists Y \quad (Y = \mathcal{P}(X))$ (esistenza dell'insieme delle parti).

Def: $Y = \mathcal{P}(X) \iff Y = \{u \mid u \subset X\}$

Es. Se X ha n elementi $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.

Dobbiamo vedere gli assiomi di: scelta, infinito, rimpiazzamento, fondazione.

FUNZIONI.

vedi quaderno degli esercizi

Def: $\langle x, y \rangle =: \{\{x\}, \{x, y\}\}$ coppia ordinata. (coppia di Kuratowski)

$\leftarrow$ modo per ordinare gli insiemi che naturalmente non sono ordinati.

Es: $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \iff a = c \wedge b = d$

mentre

$\{a, b\} = \{c, d\} \not\Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Infatti $\{0, 1\} = \{1, 0\}$

Oss: può succedere che $x = y$.

Def: $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}. \leftrightarrow \forall u\,(u \in Y \leftrightarrow \exists a \in A, \exists b \in B \quad u = \langle a, b \rangle)$

Dobbiamo dim. che esiste.

Oss: Non c'è bisogno di mettere un assioma per dimostrare che esiste, deriva dagli assiomi già dati. vedi [illegible]

Oss: $x \in \{x\} \in \langle x, y \rangle \Rightarrow x \in \bigcup \langle x, y \rangle$?

$\{x,y\} \subseteq A\cup B \Rightarrow \{x,y\} \in \mathcal{P}(A\cup B)$

$\{x\} \subseteq A\cup B \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A\cup B)$

$\Big\} \Rightarrow \{\{x\},\{x,y\}\} \subset \mathcal{P}(A\cup B) \Rightarrow \langle x,y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B))$

$\Rightarrow A\times B = \{\langle a,b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B)) \mid a\in A, b\in B\} = \{x\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A\cup B)) \mid \exists a\in A, \exists b\in B \; x=\langle a,b\rangle\}$

⇝ da cui deduco che $A\times B$ esiste (per la comprensione) (A,B insiemi)

Def. Una relazione binaria R tra A e B è un sottoinsieme di $A\times B$.

Def. Una relazione binaria è una funzione $R: A\to B$ se

A si dice dominio.

1) $\langle a,b\rangle \in R$, $\langle a,b'\rangle \in R \Rightarrow b=b'$ ← Oss: · $\leq$ non è funzione
(funzione parziale) · succ. di A è funzione

2) $\forall a\in A, \exists b\in B \quad \langle a,b\rangle \in R$.

In tale caso $b=R(a) \iff \langle a,b\rangle \in R$

Oss: Stiamo identificando le funzioni con i loro grafici.

Assioma della scelta (AC)

$\forall F$ (insieme di insiemi) $\exists f$ (funzione) $f: F \to \bigcup F$ t.c.

$\forall \underbrace{X\in F}_{\neq \emptyset} \quad f(X) \in X$ (funzione scelta di un elemento di ogni X di F)

Es: $F=\mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}$. Sia f funzione scelta.
$\mathrm{dom}(f)=\mathcal{P}(\mathbb{N})\setminus\{\emptyset\}$
Per esempio: $f(X)=\min(X)$ (usando il fatto che ogni insieme di naturali non vuoto ha minimo)

Oss: Nel caso di $f: \mathcal{P}(\mathbb{R})\setminus\{\emptyset\} \to \bigcup F$ non riesco a descriverla esplicitamente.
⇝ Se riuscissi sempre a scrivere f non avrei bisogno di avere l'assioma della scelta!

L'assioma della scelta fu molto contestato poiché da esso sembrano derivare paradossi.

Paradosso di BANACH-TARSKI: Si può dimostrare che data una sfera, smontandola in 5 pezzi, la posso rimontare e ottenere due sfere di eguali dimensioni. (utilizzando A.C.)

Def. P è una proprietà funzionale se
1) $P(x,y) \wedge P(x,z) \to y=z$
2) $\forall x \exists y \; P(x,y)$

Oss: Non è detto che $\{\langle x,y\rangle \mid P(x,y)\}$ esista come insieme.
Chiamiamo le proprietà funzionali funzioni classe. ($y=P(x) \leftrightarrow P(x,y)$)

Esempio: $x\mapsto \{x\}$ sono funzioni classe (input non viene da un insieme)
$x\mapsto \bigcup x$
$x\mapsto \mathcal{P}(x) \leftrightarrow P(x,y)\equiv [y=\mathcal{P}(x)]$ (esiste unico (per assioma delle parti e estensionalità) se X è insieme)

Assioma di rimpiazzamento (di Fraenkel): Se $P(x,y)$ è funzione classe, A è insieme
$\Rightarrow \exists B$ insieme $B=\{P(x) \mid x\in A\}$ $(y=P(x) \iff P(x,y))$

· Esempio di funzione scelta (Rossel).

$F = \{$famiglia di paia di scarpe$\}$ $\quad f(\text{paio}) =$ scarpa sinistra.

Rossel osservò che per le paia di calzini la scelta è arbitraria, quindi ho bisogno dell'assioma della scelta.

Esempio: $\{\{x\} \mid x = x\}$ non esiste, non è insieme

$\{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$ è insieme (poiché $\mathbb{N}$ è insieme, lo vedremo) (basta l'assioma delle parti)

$\{P(x) \mid x \in A\}$ è insieme se A è insieme. (forse basta l'assioma delle parti?)

$V_{\omega+\omega} = \ldots$

Oss: Gli assiomi dati non ci permettono di creare insiemi infiniti ⇝ potrebbero esistere solo insiemi finiti con elementi finiti ⇝ insiemi ereditariamente finiti.
Per esempio non possiamo creare i numeri naturali.

Def (Von-Neumann):

$0 = \emptyset$

$1 = \{0\}$

$2 = \{0, 1\} =$

$3 = \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\}$ ← questi numeri naturali così definiti esistono per l'assioma della coppia e dell'unione, però non potrebbe esistere l'insieme dei naturali ⇝ abbiamo bisogno dell'assioma dell'infinito.

$\vdots$

Assioma dell'infinito: $\exists X\, (\underbrace{0 \in X \wedge \forall u\, (u \in X \to s(u) \in X)}_{= P(X)})$ (esiste un insieme chiuso per successore)

Dove $s(u) =$ successore di u

$s(u) = u \cup \{u\}$

Oss: X può anche essere più grande di $\mathbb{N}$.

Def: $\mathbb{N} =$ il piccolo di tali X

Oss: L'intersezione di una classe non vuota esiste, è un insieme. ⇝ $\exists\, \mathbb{N}$. Infatti:

Sia X_0: tale che $P(X_0)$ (deriva dagli assiomi della logica: se qualcosa esiste ne posso scegliere uno, non è conseguenza dell'assioma della scelta)

Def. $\mathrm{Nat}(x) \equiv \forall X\, (P(X) \to x \in X)$ proprietà funzionale

$\mathbb{N} \doteq \{x \in X_0 \mid \mathrm{Nat}(x)\}$ → $\mathbb{N}$ è insieme! (per la comprensione)

Assioma di fondazione.

Domanda: • $\exists\, x$ t.c. $x \in x$?

• $\exists\, a, b, c$ t.c. $a \in b \in c \in a$?

• $\exists\, x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \ldots$?

Con gli assiomi dati ora potrebbe!

$\exists\, x$ t.c. $x = \{x\} \Rightarrow x = \{x\} = \{\{x\}\} = \{\{\{x\}\}\} \ldots$ ⇝ non mi riesco a fermare.

L'assioma di fondazione mi dice no: la nostra idea è che nascono prima gli elementi e poi li metto in insiemi. ⇝ l'idea è che ogni insieme abbia una data di nascita che chiameremo rango.

Oss: quelli che definiscono le proprietà sono detti schemi.

Assioma di fondazione: $\forall x\ \exists a \in x\ \forall b \in x\ b \notin a$.

'assioma di fondazione vieta $a \in b \in c \in a$

Corollario: $\nexists\ a,b,c$ t.c. $a \in b \in c \in a$.

Dim: Se $\exists\ a,b,c$ t.c. $a \in b \in a \Rightarrow \exists\ X = \{a,b,c\}$ e in X non esiste l'elemento nato prima degli altri, cioè X viola la fondazione. ASSURDO!

In modo analogo si escludono gli altri 2 casi strani.

$x_0 \ni x_1 \ni \dots$

Teorema: $\nexists\ f$ funzione t.c. $\mathrm{dom}(f) =: \mathbb{N}$ (in teoria degli insiemi importa il dominio) t.c.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) \in f(n)$$

(cioè esclude la succ. decrescente infinita).

Dim: Per assurdo $\exists\ f. \Rightarrow X = \mathrm{Im}(f) = \{ f(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$
Allora X viola la fondazione ASSURDO!

, la fondazione $\nexists$ cicli e insiemi decrescenti infiniti.

Esercizio: Se f è una funzione $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(f)$ è insieme
(Non serve il rimpiazzamento) $\mathrm{dom}(f)$ è insieme

← N.B. In questo caso il codominio di f non si conosce.

Def: f è una funzione se
1) f è un insieme
2) $\forall u \in f\ \exists\ a,b$ t.c. $u = \langle a,b \rangle$
3) $\langle a,b \rangle = \langle a,b' \rangle \rightarrow b = b'$

Def: $\mathrm{Dom}(f) = \{ a \mid \exists b\ \langle a,b \rangle \in f \}$

$\mathrm{Im}(f) = \{ b \mid \exists a\ \langle a,b \rangle \in f \}$

$\Rightarrow \mathrm{dom}(f), \mathrm{Im}(f)$ sono insieme.

Dim: $\langle a,b \rangle \in f$. $\mathrm{Im} f = \{ b \mid \exists a\ (\langle a,b \rangle \in f) \}$

$a \in \{a\} \in \langle a,b \rangle \in f \overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\boxed{\{a\} \in \bigcup f \Rightarrow a \in \bigcup\bigcup f}$

$b \in \{a,b\} \in \langle a,b \rangle \in f \Rightarrow$

$\Rightarrow b \in \bigcup\bigcup f$

$\mathrm{dom}(f) = \{ a \in \bigcup\bigcup f \mid \exists b\ \langle a,b \rangle \in f \}$

$\mathrm{Im}(f) = \{ b \in \bigcup\bigcup f \mid \exists a\ \langle a,b \rangle \in f \}$

$\Rightarrow \mathrm{dom}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ sono insiemi.

(*) lemma: $A \in B \in F \Rightarrow A \in \bigcup F$

Dim: $A \in \bigcup F \Leftrightarrow \exists\ X \in F$ t.c. $A \in X$

Scelgo $X = B$

□

NUMERI CARDINALI

$\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ $\quad c = |\mathbb{R}|$

GERARDUCCI
23-03
Venerdì 11-13
aula 01.

Vogliamo definire somma, prodotto, esponenziazione di cardinali

Def: Siano κ, λ cardinali. Vogliamo def. $\kappa + \lambda$.
Siano A, B due insiemi disgiunti t.c. $|A| = \kappa$ $|B| = \lambda$ $\Rightarrow$ $\kappa + \lambda = |A \cup B|$

Oss: Dato un cardinale κ, $\exists$ A insieme t.c. $|A| = \kappa$.
Se non esistesse A, non avrebbe senso definire κ.

Oss: Possiamo considerare A e B disgiunti poiché, nel caso in cui A e B non fossero disgiunti posso considerare:

$$A \times \{0\} \quad e \quad B \times \{1\}$$

$$\Rightarrow \quad |A| = |A \times \{0\}| \quad e \quad |B| = |B \times \{1\}| \quad e \quad (A \times \{0\}) \cap (B \times \{1\}) = \emptyset.$$

Oss: $+$ è ben posta, cioè non dipende da A e B (dim. per es.) (*) $\rightsquigarrow$ vedi fine esercizi

Es: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (pari $\cup$ dispari $= \mathbb{N}$)

$\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ (albergo di Cantor)

Attenzione: non posso generalmente definire $\kappa - \lambda$ $(\lambda \leq \kappa)$
Se per esempio definissi:

$|\kappa| = A$, $|\lambda| = B$ $B \subset A$ $\Rightarrow$ $\kappa - \lambda := |A \setminus B|$ ma non è ben definita!
Dipende da come scelgo A e B. ($A = \mathbb{N}$, $B_1 = \mathbb{N}$, $B_2 = \{\text{pari}\}$)

Vedremo che è ben definita a condizione che $\lambda < \kappa$.

Def: (prodotto). κ, λ cardinali. Siano A, B t.c. $\kappa = |A|$ e $\lambda = |B|$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\kappa \cdot \lambda = |A \times B|}$$

Def: (esponenziazione). κ, λ cardinali. Siano A, B insiemi t.c. $\kappa = |A|$ e $\lambda = |B|$

$$\boxed{\kappa^\lambda = |\{f \mid f: B \to A\}|}$$ $\leftarrow$ non dipende dalla scelta di A e B $\rightsquigarrow$ vedi fine esercizi (**)

Oss: $\{f \mid f: B \to A\}$ esiste poiché $\forall f$, $f \subset B \times A$ $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{P}(B \times A)$

$\Rightarrow$ $\{f \mid f: B \to A\} = \{f \in \mathcal{P}(B \times A) \mid f: B \to A\}$ è insieme per la comprensione.

Attenzione: $0, 1, 2, \ldots$ vengono usati per definire cose diverse:

$2 = |\{\text{Pippo}, \text{Caio}\}|$ oppure $0 = \emptyset$ $\quad 2 = \{0, 1\}$
ecc. $\quad 1 = \{\emptyset\}$

Tuttavia: $2 = |2|$ $\rightsquigarrow$ c'è una piccola ambiguità sui naturali.

Esercizi (somma)

1) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$ ($A \cup B = B \cup A$ poiché $\vee$ è commutativa dalle tav. di verità)

2) $\kappa + (\lambda + \mu) = (\kappa + \lambda) + \mu$

3) Dato $0 = |\emptyset|$ $\Rightarrow$ $\kappa + 0 = \kappa$

4) $\alpha + \kappa = \beta + \kappa$ $\not\Rightarrow$ $\alpha = \beta$ $\quad \alpha = \{1\}$ $\kappa = \aleph_0$ $\beta = \aleph_0$

$\alpha + 1 = \beta + 1$ $\Rightarrow$ $\alpha = \beta$

Esercizi (prodotto)

1) $\kappa\lambda = \lambda\kappa$

2) $\kappa(\lambda\mu) = (\kappa\lambda)\mu$ → N.B. $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$ ma sono in bigezione tramite $\langle\langle a,b\rangle, c\rangle \longleftrightarrow \langle a,\langle b,c\rangle\rangle$

3) $\kappa(\lambda+\mu) = \kappa\lambda + \kappa\mu$ → poiché $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

4) $\kappa\cdot 0 = 0 \qquad \kappa\cdot 1 = \kappa$

5) $\kappa\cdot 2 = \kappa+\kappa$ ($2 = 1+1$ ⇝ segue dalla distributività)

Esercizi (esponenziazione):

1) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\mu}$

2) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda\cdot\kappa^\mu$

3) $(\kappa\cdot\lambda)^\mu = \kappa^\mu\cdot\lambda^\mu$

Dim:

2) Siano $\alpha = |A|$ $\beta = |B|$ $\gamma = |C|$ B, C disgiunti mostriamo che

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$$

$$\alpha^{\beta+\gamma} = |\{f: B\cup C\to A\}| = |\mathrm{Fun}(B\cup C, A)|$$

$$\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma = |\mathrm{Fun}(B,A)\times\mathrm{Fun}(C,A)|$$

- $\mathrm{Fun}(B,A)\times\mathrm{Fun}(C,A) \longrightarrow \mathrm{Fun}(B\cup C, A)$
  $\langle(f,g)\rangle \longmapsto f\cup g$

la cui inversa è

- $\mathrm{Fun}(B\cup C), A) \longrightarrow \mathrm{Fun}(B,A)\times\mathrm{Fun}(C,A)$
  $h \longmapsto \langle h_{|B}, h_{|C}\rangle$

3) $(\alpha\cdot\beta)^\gamma \overset{?}{=} \alpha^\gamma\cdot\beta^\gamma$. Siano A, B, C t.c. $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$, $|C| = \gamma$

$$\mathrm{Fun}(C, A\times B) \longrightarrow \mathrm{Fun}(C,A)\times\mathrm{Fun}(C,B)$$
$$f \longmapsto \langle \pi_A\circ f, \pi_B\circ f\rangle$$
$$(f,g) \longleftarrow\!\shortmid \langle f,g\rangle$$

Siano $\pi_A: A\times B\to A$, $(a,b)\longmapsto a$ $\qquad \pi_B: A\times B\to B$, $(a,b)\longmapsto b$ $\qquad (f,g): C\longrightarrow A\times B$, $c\longmapsto\langle f(c), g(c)\rangle$

Teorema di Cantor - Bernstein: $\boxed{|A|\le|B|,\ |B|\le|A| \longrightarrow |A| \equiv |B|}$

(La dimostrazione è ~~~~ non banale: la vedremo).

Corollario 1:

$$\left.\begin{array}{l}|A_1| \le |A_2| \le \dots < |A_n| \\ |A_i| < |A_j|\end{array}\right\} \Rightarrow |A_1| < |A_n|$$

Dim: $|A_1| \le |A_n|$

Se fosse $|A_1| = |A_n|$

$\Rightarrow |A_i| = |A_j|$ ASSURDO!

↑ corollario 2

Corollario 2: $\boxed{|A_1| \le \dots \le |A_n| \le |A_1| \Rightarrow |A_1| = |A_2| = \dots = |A_n|}$

Dim:
$$\left.\begin{array}{l}|A_1|\le|A_n| \\ |A_n|\le|A_1|\end{array}\right\} \Rightarrow |A_1| = |A_n|$$

Teorema di Zermelo: $\forall A, B$, $|A| \le |B|$ o $|B| \le |A|$

(dimostrazione non banale: vedremo)

Utilizziamo Cantor-Bernstein.

Teorema $c = 2^{\aleph_0}$ (lo dimostriamo la prox volta)

Corollario: $c \cdot c = c$

Dim: $c \cdot c = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

Dim $|A| = \aleph_0$, $|B| = \aleph_0$ $A \cap B = \emptyset$

$\exists f : \{pari\} \xrightarrow{1-1} A$

$\exists g : \{dispari\} \xrightarrow{1-1} B$

Sia $F : \mathbb{N} \to A \cup B$

$F(2n) = f(2n)$

$F(2n+1) = g(2n+1)$ ■

Oss: Trovare la corrispondenza è piuttosto difficile.

Esempio $\phi : (0,1)^2 \xrightarrow{1-1} (0,1)$ (per il teo. di Brower non esiste $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva)

$(x, y) \longmapsto z$ $x = 0, a_1 a_2 \ldots$

$y = 0, b_1 b_2 \ldots$ $\longmapsto z = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots$

è iniettiva poiché da z risalgo a x e y.

$(0,1) \longleftrightarrow \mathbb{R}$ sono in bigezione

$(0,1)^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$ sono in bigezione

$\Rightarrow$ componendo le applicazioni trovo una ~~bigezione~~ appl. iniett. tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$ ⊛

Una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ iniettiva è facile $\longrightarrow$ Per Cantor-Bernstein $\exists$ biunivoca da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Oss: Curva di Peano ricopre il piano

$[0,1] \to [0,1]^2$ continua e suriettiva (l'inversa non è continua)

⊛ Prop La somma tra cardinali è ben posta, cioè non dipende dalla scelta di A, B

Dim. $\kappa = |A| = |A'|$ $\gamma = |B| = |B'|$

con $\{A', B'\}$ disgiunti, $\{A, B\}$ disgiunti

Mostro che $|A \cup B| = |A' \cup B'|$

$|A| = |A'| \Rightarrow \exists f : A \to A'$ bigezione

$|B| = |B'| \Rightarrow \exists g : B \to B'$ bigezione

Sia $\phi : A \cup B \longrightarrow A' \cup B'$

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi$ è bigezione poiché si ottiene incollando due bigezioni su insiemi disgiunti.

⊛ Prop $\left.\begin{matrix} |A| = |A'| \\ |B| = |B'| \end{matrix}\right\} \Longrightarrow |\{f : B \to A\}| = |\{f : B' \to A'\}|$

Dim: $\psi_1 : B \longrightarrow B'$ bigez. $\psi_2 : A \to A'$ bigezione

$\Rightarrow \phi : \{f : B \to A\} \longrightarrow \{f : B' \to A'\}$ è bigezione

$f \longmapsto \psi_2 \circ f \circ \psi_1^{-1}$ ■

Sia $\phi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow (0,1)$ bigettiva

$x \longmapsto \dfrac{\operatorname{arctg}(x) + \pi/2}{\pi}$

$\phi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0,1)^2$ bigettiva.

$(x,y) \longmapsto \left(\dfrac{\operatorname{arctg}(x) + \pi/2}{\pi} , \dfrac{\operatorname{arctg}(y) + \pi/2}{\pi} \right)$

Prop. $x \le y \iff \forall X \subseteq \mathbb{N}$ induttivo t.c. $x \in X$, allora $y \in X$.

$\Rightarrow \le$ è relazione d'ordine totale.

Dimostrazione.

1) $x \le x$ ovvio

2) $x \le y,\ y \le z \overset{?}{\Rightarrow} x \le z$

Sia X induttivo, t.c. $x \in X \underset{\text{per } x \le y}{\Rightarrow} y \in X \underset{y \le z}{\Rightarrow} z \in X$ ✓

3) $x \le y$ e $y \le x \Rightarrow x = y$.

Sia $X = \{z \in \mathbb{N} \mid \exists a \ge x \text{ t.c. } z = S(a)\} \cup \{x\} = \{x, S(x), \dots\}$

$Y = \{z \in \mathbb{N} \mid \exists a \ge y \text{ t.c. } z = S(a)\} \cup \{y\} = \{y, S(y), \dots\}$

$$\left.\begin{array}{l} x \le y \Rightarrow y \in X \Rightarrow Y \subseteq X \\ y \le x \Rightarrow x \in Y \Rightarrow X \subseteq Y \end{array}\right\} \Rightarrow Y = X$$

Lemma: $\forall k > 0,\ \forall x \in \mathbb{N},\ S^{(k)}(x) \ne x$

Dim: Sia $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall k,\ S^{(k)}(x) \ne x\}$

- $0 \in \Gamma$ poiché $\operatorname{Im}(S) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- $x \in \Gamma \overset{?}{\Rightarrow} S(x) \in \Gamma$.

Per assurdo sia $S(x) = S^k(S(x)) = S(S^k(x)) \underset{S \text{ è iniett.}}{\Rightarrow} x = S^k(x)$ ASSURDO.

$\Rightarrow \Gamma$ è induttivo e $0 \in \Gamma \Rightarrow \Gamma = \mathbb{N}$ ∎

Per assurdo sia $x \ne y$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists\ k > 0 \text{ t.c. } x = S^{(k)}(y) \\ \exists\ t > 0 \text{ t.c. } y = S^{(t)}(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x = S^{(k)}(S^{(t)}(x)) = S^{(k+t)}(x)$$ con $k+t>0$

ASSURDO! (per il lemma)

4) $\forall x, y,\ x \le y$ o $y \le x$.

Infatti, fissato x procedo per induzione su y.

- $y = 0 \Rightarrow 0 \le x$ ✓
- y. Sia $y \le x$. Se $x = y \rightarrow S(y) \ge x$. ✓

se $x \ne y$, dimostro che $S(y) \le x$.

Sia X induttivo t.c. $S(y) \in X$. Sia $A = X \cup \{y\}$. $\Rightarrow y \in A \underset{A \text{ ind.}}{\Rightarrow} x \in A \underset{x \ne y}{\Rightarrow} x \in X$ □

Prop: $\alpha^{(\beta\cdot\gamma)} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}$

BERARDUCCI

25-03

Dim: Devo costruire: $\mathrm{Fun}(B\times C \to A) \longrightarrow \mathrm{Fun}(C \to \mathrm{Fun}(B \to A))$

Sia $f: B\times C \to A$. Considero $f^1: C \longrightarrow \mathrm{Fun}(B \to A)$

$c \longmapsto f(\cdot, c)$

Assiomi di Peano:

Sia $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzione successore.

(P1) $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$ (S è iniettiva)

(P2) (a). $\forall y$ $(y \neq 0 \Rightarrow \exists x \quad S(x) = y)$
(b) $\forall x \in \mathbb{N}$, $S(x) \neq 0$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(S) = \mathbb{N} - \{0\}$

Fino a questo p.to gli assiomi descrivono anche insiemi del tipo $\mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$

(P3) (principio di induzione)

$\forall X \subseteq \mathbb{N}$, $(0 \in X \wedge \forall x (x \in X \Rightarrow S(x) \in X) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, m \in X)$

L'assioma (P3) ci autorizza a ritenere valide le dimostrazioni per induzione:

$$\frac{\begin{array}{ll} P(0) & \text{base} \\ \forall x\, (p(x) \Rightarrow p(S(x))) & \text{passo induttivo} \end{array}}{\forall x \quad p(x)}$$

$\longleftrightarrow$ è equivalente all'assioma di induzione con $X = \{x \in \mathbb{N} \mid p(x)\}$

Supponendo di avere $\mathbb{N}$ come modello degli assiomi, definiamo una relazione binaria $\leq$ su $\mathbb{N}$:

Def: $x \leq y \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall X \subseteq \mathbb{N}\, (\forall u\, (u \in X \Rightarrow S(u) \in X) \wedge x \in X \Rightarrow y \in X)$

$x \leq y$ se ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ chiuso per successione e contenente x, allora contiene anche y

Esercizio: Dimostrare che $\leq$ è una relazione totale su $\mathbb{N}$ cioè che (*)

1) $x \leq x$ (riflessiva)
2) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)
3) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetrica)
4) $x \leq y \vee y \leq x \quad \forall x, y$ (totale: per dimostrarla serve l'induzione).

Esercizio: $\forall x \in \mathbb{N}$, $0 \leq x$. (in effetti, è il principio di induzione).

Def: $x < y \overset{def}{\Leftrightarrow} x \leq y$ e $x \neq y$.

Esercizio: Dimostrare che $<$ è relazione d'ordine stretta totale su $\mathbb{N}$ cioè:

1) $\neg (x < x)$
2) $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$
3) $\neg (x < y \wedge y < x)$
4) $x < y \vee y < x \vee y = x$

Oss: Data una relazione d'ordine stretta $<$, posso definire:

$$x \leq y \iff x < y \ \vee \ x = y$$

Principio del minimo:

Ogni $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$ ha un minimo cioè

$$\forall X \subseteq \mathbb{N}, \ \left(X \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \left(x \in X \wedge \forall y \in X \ (x \leq y) \right) \right)$$

Dim:

Per assurdo Sia $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$ senza minimo.

Definiamo:

$$Q = \{ u \in \mathbb{N} \mid \forall x \in X \quad u < x \}$$

- $0 \in Q$. (Se fosse $0 \notin Q$, $\exists x \in X$ con $0 \geq x$; ma allora $x = 0 \Rightarrow 0 \in X \Rightarrow 0 = \min X$ poiché $0 = \min X$ e $X \subset \mathbb{N}$)

- $u \in Q \Rightarrow S(u) \in Q$

  (Dimostrare per esercizio che $u \in Q$, $S(u) \notin Q \Rightarrow S(u) = \min X$)

Per induzione $Q = \mathbb{N}$. Poiché $Q \cap X = \emptyset$, si ha $X = \emptyset$ ASSURDO! $\square$

Def: Un insieme X dotato di una relazione d'ordine è ben ordinato se ogni suo sottoinsieme non vuoto ha un minimo.

Esempio: $(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})$ con l'ordine:

$$(n, x) < (m, y) \iff x < y \ \vee \ (x = y \wedge n < m)$$

(ordine di due coppie di $\mathbb{N}$ affiancate) è ben ordinato.

Sia $X \subseteq (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\})$

$X \neq \emptyset$

$\Gamma_1 = \{ x \in \{0,1\} \mid \exists a \in \mathbb{N} \text{ t.c. } (a, x) \in X \}$

[illegible] $\Rightarrow$ Sia $\bar{t} = \min \Gamma_1$

Sia $\Gamma_2 = \{ n \in \mathbb{N} \mid (u, t) \in X \}$

$\bar{u} = \min \Gamma_2$

$\Longrightarrow (\bar{u}, t) = \min X$

Oss: (P2.a) è superflua, deriva dagli altri assiomi:

Sia $P := \{ x \mid x = 0 \ \vee \ \exists y \ (S(y) = x) \}$. Allora:

1) $0 \in P$

2) $x \in P \Rightarrow S(x) \in P$

$\Big\} \Rightarrow$ Per induzione, $P = \mathbb{N} \Rightarrow$ (P2.a)

Teorema di ricorsione su $\mathbb{N}$: Sia $H: A \to A$ funzione. Sia $a \in A$. $\Rightarrow$ esiste ed è unica:

$f: \mathbb{N} \to A$ t.c.

1) $f(0) = a$

2) $f(S(n)) = H(f(n))$

Rimandiamo la dimostrazione.

Variante1: $f(S(n)) = H(n, f(n))$

esempio: fattoriale, $(n+1)! = n!\,(n+1)$ con $H(n, y) = (n+1)\,y$

Variante2: $f(S(n)) = H\left(n, f|_{\{x \mid x \leq n\}}\right)$

<u>Principio</u> <u>del minimo</u>. $\boxed{\text{Sia } X \subseteq \mathbb{N},\ X \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ ha un minimo}}$

<u>Dim</u>. Per assurdo $\exists X \neq \emptyset$, X senza minimo.
Sia $\Gamma = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \leq x,\ y \notin X\}$

(1) $0 \in \Gamma$ perché $\forall x \in \mathbb{N}$, $0 \leq x$.

(2) Sia $x \in \Gamma$. Per assurdo $S(x) \notin \Gamma$. $\Rightarrow S(x) \in X$ $(\forall y \leq x,\ y \notin X)$

Allora $S(x) = \min X$. Infatti $\forall u \in X$, vale una fra

$$S(x) \leq u \quad \text{o} \quad u \leq S(x)$$

$u \in X \Rightarrow u \nleq S(x) \Rightarrow S(x) \leq u \Rightarrow X$ ha minimo <u>ASSURDO</u>! $\Rightarrow S(x) \in \Gamma$.

$\Rightarrow \Gamma = \mathbb{N}$. $\Rightarrow X = \emptyset$

$\blacksquare$

Dimostrazione (della variante 1):

Sia $H: \mathbb{N} \times A \to A$.

<u>Def</u>: g è <u>buona</u> per $n \in \mathbb{N}$ se

1) g è una funzione
2) $\operatorname{dom} g = \{x \in \mathbb{N} \mid x \le n\}$
3) $S(x) \in \operatorname{dom} g \Rightarrow g(S(x)) = H(x, g(x))$

Usiamo la proprietà: $\quad P(n) = $ "$\exists!\, g \ (g \text{ buona per } n)$"

dove $\quad \exists!\, x\ p(x) \iff \exists!\ (p(x) \wedge \forall y\ (p(y) \Rightarrow y = x))$

- $P(0)$ vale: $\quad g = \{(0, a)\}$

Inoltre se g è buona per n e h è buona per K, allora $\quad g(x) = h(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} h$

Sia infatti x il minimo per cui $\quad g(x) \neq h(x) \wedge x \in \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} h$

$\Rightarrow x \neq 0 \quad$ poiché $\quad g(0) = h(0) = a \quad \Rightarrow \quad x = S(n) \quad$ per qualche n

$\Rightarrow \quad g(x) = g(S(n)) = H(n, g(n)) \underset{\substack{\uparrow \\ n < x \Rightarrow g(n) = h(n)}}{=} H(n, h(n)) = h(S(n)) = h(x) \qquad$ ASSURDO!

- Sia g buona per n. Ottengo h buona per $S(n)$ ponendo
  - $h(x) := g(x) \quad \forall x \le n$
  - $h(S(n)) = H(n, g(n))$

$\Rightarrow$ Per induzione $\quad \forall n,\ \exists!\, g_n\ (g_n \text{ buona per } n)$: ho quindi una funzione

$$n \mapsto g_n \qquad \text{con } g_n = \text{l'unica } g \text{ buona per } n.$$

Sia $\quad f = \bigcup \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \Rightarrow \quad f$ è la funzione cercata $\qquad \square$

<u>Esercizio</u>: Se $h < k$ in $\mathbb{N}$, $\quad f: \{x \in \mathbb{N} \mid x \le K\} \to \{x \in \mathbb{N},\ x \le n\}$ è funzione

$\Rightarrow \quad f$ non è iniettiva.

<u>Definizioni ricorsive di $+$ e $\cdot$ in $\mathbb{N}$</u>:

$+$). $\begin{cases} x + 0 = x \\ x + S(y) = S(x + y) \end{cases} \qquad$ (<u>somma</u>)

Posso anche definire $\quad f_x(y) = x + y \quad$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} f_x(0) = x \\ f_x(S(y)) = S(f_x(y)) \end{cases}$$

$\cdot$). $\quad \begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot S(y) = x \cdot y + x \end{cases} \quad$ (prodotto) $\quad$ da cui $\quad \begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{n+1} = x^n \cdot x \end{cases} \quad$ (esponenziazione)

<u>Esercizio</u>: Dimostrare che somma, prodotto ed esponenziazione coincidono con quelle definite per i cardinali.

Per esempio: $\quad \begin{array}{l} |X| = |\{y \mid y < n\}| \\ |Y| = |\{y \mid y < K\}| \end{array} \quad \Rightarrow \quad |X \times Y| = |\{y \mid y < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definito per}}}{n.K}\}|$

Esercizio. Dati $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |(a,b)| = |[a,b]|$ BERARDUCCI 28-03

Svolgimento. per semplicità siano $a=-1$ e $b=1$

Ovviamente: $|(-1,1)| \leq |[-1,1]|$ tramite $id: x \mapsto x$ $\Rightarrow$

Inoltre: $\exists\, f: [-1,1] \hookrightarrow (-1,1)$ iniettiva $\Rightarrow |[-1,1]| \leq |(-1,1)|$

$x \longmapsto \frac{x}{2}$

Dobbiamo trovare $g: [-1,1] \to (-1,1)$ biunivoca

Sia

$$g(x) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2^{n+1}} & \text{se } x = \pm \frac{1}{2^n} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}. \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow g$ è la corrispondenza biunivoca cercata.

Teorema di Cantor Bernstein: $\boxed{|A| \leq |B| \ \wedge\ |B| \leq |A| \Longrightarrow |A| = |B|}$

Dim: Siano $f: A \hookrightarrow B$ $g: B \hookrightarrow A$ iniettive.

Sia $B' = \operatorname{Im} g \subset A$ $\Rightarrow$ $|B'| = |B|$ $\Rightarrow$ Basta dim. che $|A| = |B'|$

Sia $h = g \circ f: A \hookrightarrow B'$ $\Rightarrow$ h è iniettiva poiché composizione di iniettive.

Sia $x \in A \setminus B'$. Sia $\mathcal{O}(x) = \{h^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$

Posso definire $\mathcal{O}(x)$ utilizzando il teorema di ricorsione e definire:

$$\begin{cases} h^0(x) = x \\ h^{n+1}(x) = h(h^n(x)) \end{cases}$$

$\operatorname{Im} h \subset B'$ $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(x) \setminus \{x\} \subset B'$.

Per costruzione, $z \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow h(z) \in \mathcal{O}(x)$.

Per iniettività di h, $h(z) \in \mathcal{O}(x) \Rightarrow z \in \mathcal{O}(x)$

Infatti:

$h(z) = h^{n+1}(x)$ con $n > 0$. ($h(z) \neq x$ poiché $x \notin B'$ mentre $h(z) \in B'$)

$\Rightarrow h(z) = h(h^n(x)) = h^{n+1}(x)$ $n \geq 0$ $\underset{h \text{ è iniettiva}}{\Rightarrow}$ $z = h^n(x) \in \mathcal{O}(x)$

Per cui:

$$\forall z \ (z \in \mathcal{O}(x) \Leftrightarrow h(z) \in \mathcal{O}(x))$$

Sia $x' \in A \setminus B'$, $x' \neq x$. Mostriamo che $\mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(x') = \emptyset$.

$x' \notin \mathcal{O}(x)$ ($x' \neq x$ e $x' \neq h^n(x)$ $\forall n > 0$ poiché $x' \notin B'$ ma $h^n(x) \in B'$)

$\Rightarrow h(x') \notin \mathcal{O}(x)$ $\Rightarrow$ $h^n(x') \notin \mathcal{O}(x)$ $\forall n$ (per induzione)

A questo p.to definisco:

$t: A \longrightarrow B'$

$a \longmapsto \begin{cases} h(a) & \text{se } \exists x \in A \setminus B' \text{ t.c. } a \in \mathcal{O}(x) \end{cases}$

- t è ben definita poichè è definita su pezzi disgiunti.
- t è iniettiva poichè sia h che id sono iniettive.
- $\left.\begin{array}{l} \text{se } y \in \Theta(x)\ \forall x \Rightarrow y = t(y) \\ \text{se } \exists x \ \ y \in D(x) \Rightarrow y \in B' \Rightarrow y = h(y') = t(y') \end{array}\right\} \Rightarrow t$ è suriettiva

$\blacksquare$

<u>Corollario 1</u>: $|A_1| \leq |A_2| \leq \ldots \leq |A_n| \leq |A_1| \implies |A_1| = |A_2| = \ldots = |A_n|$

<u>Corollario 2</u>: $|A_1| \leq |A_2| \leq \ldots < \ldots \leq |A_n| \implies |A_1| < |A_n|$

<u>Dim</u>: $|A_1| \leq |A_n|$ evidentemente. Se fosse $|A_1| = |A_n|$, per il corollario 1 sarebbe una catena di uguaglianze, in particolare anche dove c'è $<$. <u>ASSURDO!</u>

<u>Teorema</u>: $\boxed{|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}}$

<u>Dimostrazione</u>:

<u>Oss</u>: $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$

Infatti:

$$\{f \mid f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\} \longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$$
$$\chi_A \longleftarrow A$$
$$f \longmapsto \operatorname{supp}(f)$$

con $\chi_A : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Dobbiamo usare due proprietà:

(1) <u>densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$</u>: $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \quad \exists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $a < q < b$. $\leftarrow$ <u>ASSIOMA di ARCHIMEDE</u>

Grazie a questa proprietà otteniamo una funzione $f: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ iniettiva data da:

$$f: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$$
$$a \longmapsto \{q \in \mathbb{N} \mid q < a\}$$

f è iniettiva: Se $a \neq b$, per esempio $a < b$, $\exists q$ t.c. $a < q < b$ per cui $q \in f(b)$ ma $q \notin f(a)$ cioè $f(a) \neq f(b)$.

$$\implies |\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$

<u>Oss</u>: $\boxed{|A| = |B| \implies |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|}$

<u>Dim</u>: $f: A \longleftrightarrow B$ biunivoca. Considero:

$$h: \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$$
$$X \longmapsto \{f(x) \mid x \in X\}$$

Dimostriamo l'altra disuguaglianza, utilizzando la seguente proprietà:

(2) <u>$(\mathbb{R}, <)$ è completo</u>, cioè ogni sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ e limitato superiormente cioè $\exists b \in \mathbb{R}$, $\overset{X \leq b}{\text{t.c.}}\ (\forall x \in X,\ x \leq b)$ gode della seguente proprietà:

<u>ASSIOMA di DEDEKIND</u> $\rightarrow$ $\exists b$ t.c. $X \leq b \wedge \forall b' \ (X \leq b' \implies b \leq b')$

Chiamiamo $\sup X$ tale b. $\leftarrow$ esistenza [illegible]

<u>Oss</u>: Chiaramente $\sup X$ è unico (se esiste!)

Questa proprietà è presa come assioma di $\mathbb{R}$ e per i razionali non vale:

$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ è limitato ma non ha sup.

Voglio $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathbb{R}$ iniettiva.

$$A \longmapsto \sum_{a\in A} 2^{-a}$$

<u>Oss</u>: Dobbiamo definire la somma infinita: $\displaystyle\sum_{a\in A} 2^{-a} =: \sup_{N} \sum_{\substack{a\in A \\ a\leq N}} 2^{-a}$

f è ben definita poiché $\sum 2^{-a} \in \mathbb{Q}$ e sono limitati da 2

($A \longmapsto 1{,}01001\ldots$ con gli 1 in posizione n se $n\in A$)

~~Dobbiamo verificare che f sia iniettiva~~

Così definita, f non è iniettiva:

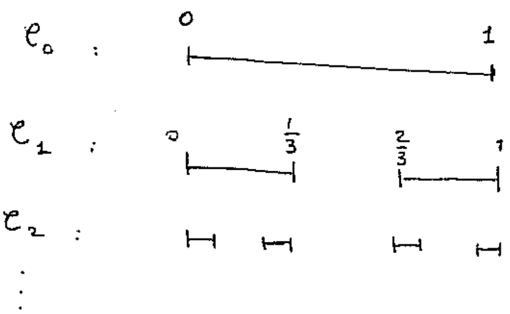
$$0{,}0\bar{1} = 0{,}1 \quad \text{cioè} \quad f(\{1\}) = f(\mathbb{N}\setminus\{0,1\}) \quad ?$$

Definiamo

$$\boxed{\begin{aligned} f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \sum_{a\in A} 3^{-a} \end{aligned}}$$

← appunti [illegible]

Da confrontare con l'insieme di Cantor:



$\mathcal{C} = \bigcap_n \mathcal{C}_n$ è l'insieme di Cantor

(corrisponde agli sviluppi in base 3 che non contengono la cifra 1)

$\mathcal{C} \neq \phi$ poiché $0\in\mathcal{C}$. In realtà $\mathcal{C}$ contiene un'infinità non numerabile di p.ti

Infatti se ho $I_{n+1} \subseteq I_n$ intervalli <u>chiusi</u> e <u>limitati</u> $\overset{\circledast}{\Rightarrow} \bigcap_n I_n \neq \phi$.

⇝ dato uno sviluppo a caso c'è il p.to corrispondente in $\mathcal{C}$ $\bigcap I_n$ poiché uno sviluppo corrisponde a una successione di intervalli chiusi inscatolati.

$\circledast$ $I_n = [a_n, b_n] \Rightarrow \sup_n \{a_n\} \in \bigcap_n I_n$

Inoltre per l'assioma di Archimede, per ogni sviluppo c'è al max 1. pto.

$\Rightarrow$ Posso definire $g: 2^{\aleph_0} \rightarrow \mathcal{C}$ iniettiva.

$$f: \mathbb{N}\to\{0,2\} \longmapsto x_f \in \bigcap_n I_n \quad \text{dove } I_{n+1} \subset I_n \text{ e } I_{n+1} = \begin{cases} \text{sgn a sx se } f(n) = \\ \text{sgn a dx se } f(n) = \end{cases}$$

$\rightarrow \quad 2^{\aleph_0} \leq |\mathcal{C}| \leq |\mathbb{R}|$ per inclusione.

<u>Corollario</u>: $\boxed{|\mathbb{R}\times\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|}$ (vedi volta prima)

Notazioni: $\{A_i \mid i \in I\}$ vs $(A_i \mid i \in I)$

$\mathcal{A} =: (A_i \mid i \in I)$: $i \longmapsto A_i$ è funzione.

$(A_i \mid i \in I)(j) = A_j$

$\{A_i \mid i \in I\}$ è l'immagine di $\mathcal{A}$.

L' A.C. si può esprimere in altre forme equivalenti.

Assioma della scelta (II forma).

(*) Data $(A_i \mid i \in I)$ $\quad A_i \neq \phi \ \forall i \in I \implies \exists f$ funzione $dom(f) = I$ t.c. $\forall i \in I$, $f(i) \in A_i$

Oss: Ogni famiglia di insiemi si può indiciare.
Se $\mathcal{F}$ è un insieme di insiemi, $\mathcal{F} = \{X \mid X \in \mathcal{F}\} = \{A_i \mid i \in I\}$ con $I = \mathcal{F}$ $\quad A_i = i$
$(\mathcal{A} = id)$

Def. (prodotto cartesiano infinito): Data $(A_i \mid i \in I)$, definisco

$$\prod_{i \in I} A_i := \text{insieme delle } i\text{-uple } (a_i \mid i \in I) \text{ con } a_i \in A_i \ \forall i.$$

cioè

$$\prod_{i \in I} A_i := \{a \mid a \text{ è funzione } dom(a) = I \ \forall i \in I \ a(i) \in A_i\}$$

L' A.C. è equivalente a: $\quad \forall i \in I,\ A_i \neq \phi \implies \prod_{i \in I} A_i \neq \phi$

Teorema $A, B \neq \phi \implies A \times B \neq \phi$
(Non serve l' A.C.)

Dimostrazione:

$A \neq \phi \implies \exists x\ (x \in A)$. Sia a un tale x.
$B \neq \phi \implies \exists x\ (x \in B)$ Sia b un tale x.
$\Big\} \implies (a, b) \in A \times B$. $\square$

Teorema: $\forall x \in A, \exists y \in B \ \ P(x, y) \overset{(A.C.)}{\implies} \exists f : A \to B \ \ \forall x \in A \ \ P(x, f(x))$

Dimostrazione: $B_x = \{y \in B \mid P(x, y)\} \neq \phi$ per hp.
Per A.C., $\exists f$ $dom(f) = A$ con $f(x) \in B_x \ \forall x$ $\square$

A.C. $\Rightarrow$ Data $(B_x \mid x \in A)$, $\exists f$ t.c. $dom(f) = A$, $f(x) \in B_x \ \forall x$

(*) Per come lo abbiamo enunciato, afferma che $\forall \mathcal{F}$, $\exists f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ t.c. $\forall X \in \mathcal{F}$ $f(X) \in X$
Se $\mathcal{F}$ è indiciata, cioè $\mathcal{F} = (A_i \mid i \in A_I)$

$\implies \mathcal{F} : i \mapsto A_i$. Ma allora $\phi : I \to \mathcal{F}$ è biettiva.
$\qquad\qquad i \longmapsto \langle i, A_i \rangle$

$\implies \underbrace{f \circ \phi}_{\psi} : I \to \bigcup \mathcal{F}$ e $\forall i \ \psi(i) \in A_i$ $\square$

Conseguenze dell'assioma della scelta:

BERARDUCCI
30-03

Teorema 1 $\boxed{\text{Se esiste } f: X \to Y \text{ suriettiva}, Y \neq \phi.}$ $\Rightarrow \exists\, g: Y \to X$ iniettiva $(\Rightarrow |Y| \leq |X|)$

Dim: Dato $y \in Y$, sia $A_y = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ (controimmagine di y)
Ho la famiglia indiciata $\{A_y \mid y \in Y\}$

Per l'assioma della scelta $\exists\, g$ funzione con $dom(g) = Y$ t.c.
$$\forall y \in Y \quad g(y) \in A_y$$
g è la funzione desiderata.
$f \circ g = id_Y \Rightarrow g$ è iniettiva

Oss: Vale anche il viceversa, per cui non ho bisogno di A.C.
Infatti: sia $g: Y \to X$ iniettiva. $\Rightarrow Im(g) \subset X$
$Y \neq \phi \Rightarrow \exists\, y\ (y \in Y)$. Sia $a \in Y$ (lo posso scegliere non per A.C. ma per le regole della logica)
Definisco:
$$f: X \to Y \quad \begin{cases} f(x) = a & \text{se } x \notin Im(g) \\ f(x) = g^{-1}(x) & \text{se } x \in Im(g) \end{cases}$$
f è ben definito poichè g è iniettiva

Possiamo dimostrare che il seguente teorema non si dimostra senza A.C. (corso avanzato!)

Esercizio: Se X, Y sono finiti $\Rightarrow$ non serve A.C. per dim. il teo.1 (per induzione)

Teorema 2: Data $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad |A_n| = \aleph_0 \ \forall n \Rightarrow \boxed{|\bigcup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0}$ unione numerabile di numerabili è numerabile.

Dim.: $\forall n, \exists\, g_n: A_n \to \mathbb{N}$ biunivoca

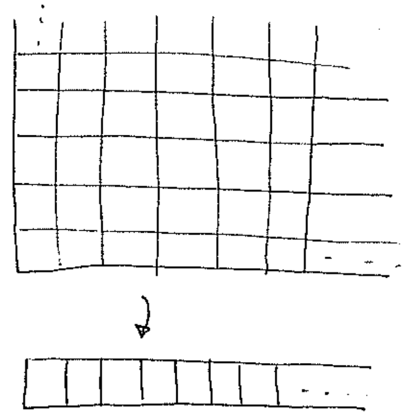
(*) Dato n, ho $G_n = \{g \mid g: A_n \to \mathbb{N} \text{ biunivoca}\} \neq \phi$.
Per A.C. $\exists$ una funzione di scelta S per $\{G_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ t.c. $g_n = S(n) \in G_n$
$\Rightarrow$ Esiste $(g_n \mid n \in \mathbb{N}) = S$

(l'assioma della scelta mi dice che posso chiamare g con g_n cioè come funzione di n)
Definiamo,

$$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_n A_n$$

$$f(n,k) = g_n^{-1}(k) \quad \Rightarrow f \text{ è suriettiva} \Rightarrow \left|\bigcup_n A_n\right| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$$
(*2)

$$\aleph_0 \leq \left|\bigcup_n A_n\right| \text{ è banale.}$$



Oss: Se posso descrivere esplicit. g_n non ho bisogno di A.C.

Prop: $\boxed{|\mathbb{Q}[x]| = \aleph_0}$

Dim: $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{d \in \mathbb{N}}$ (polinomi di $\mathbb{Q}[x]$ di grado d)

$$\{a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d \mid a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Q}\} \sim \underbrace{\mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{d+1 \text{ - volte}}$$

$|\mathbb{Q}^{d+1}| = \aleph_0 \Rightarrow \mathbb{Q}[x]$ è unione numerabile di insiemi ...

Def. $x_0 \in \mathbb{R}$ è algebrico se $\exists\, p(x) \in \mathbb{Q}[x] \setminus \{0\}$ t.c. $p(x_0)$.

$Sol(p) = \{ b \mid p(b) = 0 \}$

Oss: $\forall p \neq 0$, $|Sol(p)| < \aleph_0$ è finito.

$\Rightarrow$ Algebrici $\subset \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{Q}[x] \\ p \neq 0}} Sol(p)$ unione numerabile di insiemi finiti $\Rightarrow |Alg| \leq \aleph_0$

$\mathbb{N} \subset$ Algebrici $\Rightarrow$ $|\text{Algebrici}| = \aleph_0$ $\leadsto$ I numeri algebrici sono numerabili

Oss: Non abbiamo bisogno di A.C. poichè $\forall p$, $g_p : \mathbb{N} \to Sol(p)$ la possiamo definire esplicitamente, per esempio numerando le soluzioni in modo crescente.

Possiamo definire

$$f : \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{N} \longrightarrow Alg. \qquad \to f \text{ è suriettiva}$$

$$f(p, m) = g_p(m)$$

Oss: Posso ordinare i complessi in modo lessicografico.

Corollario: $\exists$ numeri non algebrici.

Dim: $|Alg| = \aleph_0 < c$

Corollario: $|\mathbb{R} - alg| = c$ Dim: ⊛

N.B.: $\aleph_0 < ? < c$, $\leadsto$ non si sa!

$\Rightarrow$ non posso utilizzare che se non sono c allora sono $\aleph_0$

(∗) $\forall n\ \exists g_n : A_n \to \mathbb{N}$

Dim:

$\forall n$, $G_n =: \{ g : A_n \to \mathbb{N} \mid g$ biunivoca$\}$

$\Rightarrow \exists S : \mathbb{N} \to \bigcup_n G_n$ t.c. $S(n) \in G_n$ $\forall n$

$\Rightarrow g_n^{\xi} := S(n)$ sono le funzioni cercate

(∗2) Sia $a \in A = \bigcup_n A_n$

$\Rightarrow \exists n$ t.c. $a \in A_n$

$\Rightarrow \exists k$ t.c. $g_n(k) = a$

$\Rightarrow a = f(n, k)$ □

Teorema: (richiede A.C.)

$\boxed{X \text{ infinito.} \Rightarrow \aleph_0 \leq |X|}$

Ogni insieme infinito contiene un insieme numerabile.

Dim: $\exists S : \mathcal{P}(X) \setminus \phi \to X$ t.c. $S(A) \in A$ (esiste per A.C.)

$f : \mathbb{N} \to X$

$$\begin{cases} f(0) = S(X) \in X \\ f(n+1) = S(\underbrace{X \setminus \{ f(i) \mid i \leq n \}}_{\neq \emptyset}) \in X \end{cases} \Rightarrow f \text{ è iniettiva}$$

poichè X è infinito.

$\Rightarrow \aleph_0 \leq |X|$ □

$m < n \Rightarrow f(m) \neq f(n)$

Poichè $f(n) \in X \setminus (f(m))$

~~⊛ Se fosse $|\mathbb{R} - alg| = |trascendenti| = c$~~

Corollario: $\boxed{\aleph_0 \leq k \Rightarrow k + \aleph_0 \leq k.}$

⊛ Se fosse $|\text{trascendenti}| = k \geq \aleph_0$

Teorema: $|X| \geq \aleph_0$ (cioè X è infinito) $\Rightarrow$ $|X| + \aleph_0 = |X|$

BERARDUCCI 01-04

Dim: $X = Y \dot{\cup} N$ $\quad \dot{\cup}$ = unione disgiunta.

Infatti $\exists N$ numerabile $N \subset X \Rightarrow Y =: X \setminus N$

$$\Rightarrow |X| + \aleph_0 = (|Y| + \aleph_0) + \aleph_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{associatività}}}{=} |Y| + \underbrace{(\aleph_0 + \aleph_0)}_{\aleph_0} = |Y| + \aleph_0 = X \quad \square$$

Oss.: X infinito $\Leftrightarrow$ $|X| \geq \aleph_0$ (se X è infinito, contiene un numerabile).

Oss. $|Alg| = \aleph_0$.

$Trasc = \mathbb{R} \setminus Alg \neq \phi$ poiché $|\mathbb{R}| > \aleph_0$

$|Trasc|$ è infinito poiché altrimenti $\mathbb{R}$ sarebbe numerabile ($|\mathbb{R}| = |Tras| + |Alg| = \text{finito} + \aleph_0 \overset{\text{dim.}}{=} \aleph_0$)

$\Rightarrow |Trasc| \geq \aleph_0$ (Inoltre $\exists$ un trascendente $\alpha \Rightarrow \alpha + n$ è trascendente $\forall n$ algebrico $\Rightarrow |Trasc.| \geq \aleph_0$)

$$\Rightarrow c = |\mathbb{R}| = |Trasc| + |Alg| = |Trasc| + \aleph_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema}}}{=} |Trasc| \Rightarrow \boxed{|Trasc| = c.} \quad \square$$

Vige la domanda: i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ hanno cardinalità c o $\aleph_0$? Non si sa!
Se sono chiusi o boreliani $\Rightarrow$ hanno cardinalità c o $\aleph_0$. (da dimostrare)

SOMME INFINITE di CARDINALI

$\{A_i \mid i \in I\}$ famiglia di insiemi disgiunti.

Dati k_i $i \in I$ cardinali, voglio definire la somma (infinita) $\sum_{i \in I} k_i$.

Considero $\{A_i \mid i \in I\}$ con $k_i = |A_i|$, A_i disgiunti e definisco:

$$\boxed{\sum_{i \in I} k_i = \left| \bigcup A_i \right|}$$

Esercizio 1: Dimostrare che la definizione è ben posta (non dipende da A_i)

Esercizio 2: Dimostrare che $\exists$ $\{A_i \mid i \in I\}$ con A_i disgiunti (facile!)

$\Rightarrow$ $A_i' = A_i \times \{i\} \Rightarrow \{A_i' \mid i \in I\}$ è una famiglia di insiemi disgiunti.

Esercizio: $(I, <_I)$ ordine totale. $i \leq_I j \Rightarrow A_i < A_j$ $\quad \forall A_i, A_j \in \{A_i \mid i \in I\}$

Considero

$$\left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \geq |A_j| \quad \forall j \in I$$

E' il minimo delle cardinalità? Cioè devo dimostrare che

$$\sup_{i \in I} k_i \overset{?}{=} \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right|$$

?

Se prendo qualcosa di cardinalità minore $\Rightarrow \exists k_i$ tale che lo supera?

Sia $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ con $|B| < \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \Rightarrow \exists j \; B \subset A_j$

Domanda 1 in generale, dati k_i cardinali, esiste $\sup_{i\in I} k_i$? (pensarci!)

Domanda 2. $\aleph_0 < c$. $\exists$ un minimo cardinale $> \aleph_0$? Esiste il successore di $\aleph_0$? si! si chiama $\aleph_1$

Vedremo che

$$\boxed{\aleph_0 < \aleph_1 \leq c = 2^{\aleph_0}}$$

Domanda 3: $\exists$ cardinali $\{k_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $k_0 > k_1 > \ldots\ldots$ (decrescenti!)? No! lo vedremo

Def: Dati k_i, $i\in I$ cardinali. Definisco $\prod_{i\in I} k_i$ così: Siano A_i t.c. $|A_i| = k_i$ $\forall i$; allora:

$$\boxed{\prod_{i\in I} k_i \overset{def}{=} \left| \bigtimes_{i\in I} A_i \right|}$$

dove avevamo definito il prodotto cartesiano infinito $\bigtimes_{i\in I} A_i$ come

$$\bigtimes_{i\in I} A_i = \{ (a_i \mid i \in I) \mid a_i \in A_i \} = \{ f \mid \operatorname{dom} f = I \text{ , } \forall i \in I \ f(i) \in A_i \}.$$

Oss: Abbiamo visto che il prodotto cartesiano è non vuoto ~~perché~~ con l'assioma della scelta.

Teorema di Köenig: Siano α_i, β_i cardinali t.c. $\alpha_i < \beta_i \ \forall i \in I$.

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{i\in I} \alpha_i < \prod_{i\in I} \beta_i}$$

← [Strumento più potente per dimostrare disuguaglianze strette

da cui segue il corollario

Corollario: $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$

Dim. 2 (lo abbiamo già dim.):

$$\aleph_0 = \sum_{i\in \mathbb{N}} 1 \underset{\text{König}}{<} \prod_{i\in \mathbb{N}} 2 \overset{?}{=} 2^{\aleph_0}$$

In generale vale che:

Proposizione:

$$\boxed{\prod_{i\in I} k = k^{|I|}}$$

Dim: Sia $|A| = k$. Devo trovare bigezione f

$$\bigtimes_{i\in I} A \underset{?}{\longleftrightarrow} \{ f \mid f : I \to A \}$$

Vale l'uguaglianza:

$$\bigtimes_{i\in I} A \overset{def}{=} \{ f \mid f: I \to A \quad f(i) \in A \} \overset{\checkmark}{=} \{ f \mid f : I \to A \}$$

□

Dimostrazione (del teo. di Köenig):

[Dimostrare per es. che vale $\leq$.]

Dimostriamo che ~~$\nexists f: \bigtimes_{i\in I} B_i \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$~~ Suriettiva. $\forall i$ $|B_i| = \beta_i > \alpha_i = |A_i|$

$$\nexists \ f : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigtimes_{i\in I} B_i$$

Se dimostro ciò, allora non esiste una biunivoca e quindi sono diversi.

Dimostrazione (del teo. di König)

Siano A_i $|A_i| = \alpha_i$ A_i disgiunti. ; B_i di cardin. $|B_i| = \beta_i$

Dimostriamo che vale $\leq$.

<u>Oss</u>: Posso scegliere $A_i \subset B_i$

Scelgo i B_i e poi prendo $A_i \subset B_i$ con $|A_i| < |B_i|$ Infatti:

$|\alpha_i| < |\beta_i| \Rightarrow \exists f: A_i \to B_i$ iniettiva $\Rightarrow$ Prendo $\mathrm{Im} f$.

Per prendere A_i disgiunti, posso scegliere B_i disgiunti. Voglio costruire

$$f: \bigcup_{i \in I} A_i \longrightarrow \bigtimes_{i \in I} B_i \quad \text{iniettiva.}$$
$$a \longmapsto f_a$$

L'unione è disgiunta $\Rightarrow \exists!\, i(a)$ t.c. $a \in A_{i(a)}$

Pongo

$$f_a(j) = \begin{cases} a & \text{se } j = i(a) \\ b_j & \text{se } j \neq i(a) \end{cases} \qquad \text{con } b_j \in B_j \setminus A_j$$

<u>Oss</u>: Per scegliere $\{b_j \mid j \in I\}$ devo utilizzare l'assioma della scelta.

$\Rightarrow f$ così definita è iniettiva ($\mathrm{Im} f$ è fatta di i-uple con un solo elemento che sta nell'unione degli A_i).

Dimostriamo che non può valere $=$.

$(<)$ Mostro che $\nexists\, f: \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigtimes_{i \in I} B_i$ suriettiva ($\Rightarrow \nexists$ biunivoca $\Rightarrow$ <u>non</u> vale $=$)

$\forall j \in I$, considero il diagramma:

= j-esimo diagramma

$$\begin{tikzcd} \bigcup_{i \in I} A_i \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "D_j"] & \bigtimes_{i \in I} B_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ A_j \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, dashed, "f_j"'] & B_j \end{tikzcd}$$

π_j = j-esima proiezione

$\pi_j(\sigma) = \sigma(j)$

$f_j = \pi_j \circ f \circ i$

$f_j(a) \overset{\text{def}}{=} f(a)(j)$

Cerco una i-upla di elem. che non sta in $\mathrm{Im} f$

$(b_i \mid i \in I) \notin \mathrm{Im} f$. Come scelgo b_j? Prendo b_j in modo che $b_j \notin \mathrm{Im} f_j$

Lo posso fare poiché $|A_j| < |B_j| \Rightarrow f_j$ non può essere suriettiva.

Devo dim. che $(b_i \mid i \in I) \notin \mathrm{Im} f$.

Per assurdo $(b_i \mid i \in I) \in \mathrm{Im} f \Rightarrow (b_i \mid i \in I) = f(a)$ con $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$

Sia j t.c. $a \in A_j \Rightarrow f_j(a) = b_j$ ASSURDO! ■

Controesempio all'esercizio: $B \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ (unione crescente) ; $|B| < |\bigcup_{i \in I} A_i|$ $\overset{?}{\Rightarrow} \exists! B$ t.c. ~~[illegible]~~ $B \subset A_i$ no!

$\rightarrow$ ~~€~~ $\mathbb{Z} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] = \mathbb{R}$.

Vedremo che la risposta è positiva assumendo che siano bene ordinato.

Insiemi e classi.

Data una proprietà P non sempre esiste un insieme X t.c. $X = \{x \mid p(x)\}$

Quando $\{x \mid p(x)\}$ non è un insieme lo chiamiamo classe.

Solo certe classi sono insieme, esattamente quelle che sono elementi di un'altra classe.

$\{x \mid p(x)\}$ è una classe con x ~~e~~ insiemi.
$\uparrow$ insieme.

$x \rightarrow$ oggetti di livello 0 (insiemi)

x varia tra gli oggetti di livello 0.

Possiamo fare $\{x \mid p(x)\}$ classi con x che varia a livello 0.

Se $\{x \mid p(x)\}$ ~~sono~~ non sta a livello 0, ottengo il livello 1. (classi)

Posso formare $\{\xi \mid P(\xi)\}$ con ξ che varia al livello 0,1

$\Rightarrow \{\xi \mid P(\xi)\}$ sta al livello 0,1,2 (iperclassi)

La cosa che non posso fare è assumere che al livello 0 ci sia già tutto: se no ottengo paradossi.

$R = \{x \mid x \notin x\}$. Se fosse R al livello 0, ottengo che

(*) $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$. $\rightarrow$ paradosso di Russel

Supponendo che R non è a livello 0, mi salvo.

In genere ci si ferma a insiemi, e classi e non si parla di iperclassi.

Non posso dire che una classe appartiene ad un altra classe, .

Teo. di Cantor: $\boxed{\forall X \text{ insieme (di livello 0)} \Rightarrow |X| < |\mathcal{P}(X)|}$

Paradosso di Cantor: $\nexists$ V insieme universale ($\forall a$ cioè $\forall a \in a \in V$) cioè V è ad un livello superiore a 0.

Dim: Per assurdo V esiste. $\forall A \subset V \Rightarrow A \in V \Longrightarrow \mathcal{P}(V) \subset V$

$\Rightarrow |\mathcal{P}(V)| \leq |V|$ ASSURDO!

(*) l'assioma delle potenze è formulato per gli insiemi e non per le classi $\rightarrow$ la classe delle parti di una classe è un'iperclasse (poiché c'è V) $\rightarrow$ gli assiomi sono stati formulati x insiemi $\rightarrow$ esco dai paradossi

$V = \{x \mid x = x\}$ è una classe, ma non può essere un insieme. ~~ma~~ il teorema di Cantor vale per gli insiemi e non per le classi. (*)

V: livello 1; x: livello 0

A insieme $\Longrightarrow$ A è classe $A = \{x \mid x \in A\}$

$\not\Longleftarrow$

Per l'assioma di comprensione data p, $\exists \{x \in A \mid p(x)\}$.

Abbiamo una classe contenuta in insieme.

$$\{x \mid Q(x)\} \subset \underset{\text{insieme}}{A} \implies \{x \mid Q(x)\} = \{x \in A \mid Q(x)\}$$

$\Rightarrow$ le sottoclassi di insiemi sono insiemi.

~~Dell' [illegible]~~, $\forall x \, \exists! \, y \; P(x, y) \Longrightarrow \{F(x) \mid x \in A\}$ è insieme

$y = F(x)$ $\uparrow$ rimpiazzamento (l'immagine di insiemi tramite funzioni classe sono insiemi)

$\leadsto$ l'assioma è ragionevole:

$\{F(x) \mid x \in A\}$ ha "cardinalità" inferiore di A.

$\rightarrow$ Se A è un insieme non è troppo grande e quindi anche ~~[illegible]~~ $\{F(x) \mid x \in A\}$