Buoni Ordini

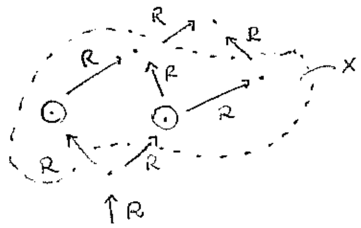
Berarducci

04-01

Def: Sia R una relazione binaria su A. ($R \subseteq A \times A$). R è ben fondato su A se ogni sottoinsieme $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$ ha un elemento R-minimale $a \in X$
cioè $a \in X$ e $\forall b\ (bRa \Rightarrow b \notin X)$

Esempio: grafico.

$A =$



$\odot$ = el R-minimale.

OSS: Se R è un ordine totale $\Rightarrow$ un elemento R-minimale è minimo.

Es: $(\mathbb{N}, <)$ è ben fondato.
$(\mathbb{R}_{\geq 0}, <)$ non è ben fondato. Lui ha un minimo ma per esempio $(0, \infty)$ no.

Nota: $(\mathbb{N}, \leq)$ non è ben fondato. Se diciamo $(\mathbb{N}, \leq)$ è ben fondato, con abuso di notazione intendiamo che $(\mathbb{N}, <)$ è ben fondato.

Teorema: $\boxed{R \text{ è ben fondato su } A \iff \neg\exists\ (a_n \mid n \in \mathbb{N}) \text{ t.c. } \forall n\ (a_{n+1} R\, a_n)}$

Esempio: $\left(\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right)$ nei reali.

Dimostrazione:
($\Rightarrow$): Supponiamo che esista $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ con $a_{n+1} R\, a_n\ \forall n$. $\Rightarrow X = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ non ha R-minimale.
($\Leftarrow$): (si usa A.C.) Sia $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$. Per assurdo sia X senza R-minimali.
Definisco una successione $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ prendendo a_0 qualunque e ricorsivamente $a_{n+1} \in X$ t.c. $a_{n+1} R\, a_n$. Uso A.C. per definire $a_{n+1} = \text{scelta}(\{x \mid x R a_n\})$ $\blacksquare$

Esempio: $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subsetneq)$ non è ben fondato. Infatti:
$$\mathbb{N} \supsetneq 2\mathbb{N} \supsetneq 4\mathbb{N} \supsetneq 8\mathbb{N} \supsetneq \dots$$

Esempio: $(\mathbb{N}, R)$ con $xRy \iff (x \mid y \ \wedge\ x \neq y)$ è ben fondato, poiché non posso dividere per sempre.

Esercizio: Sia (A, R) ben fondata. Sia $a \in A$. Posso concludere che $\exists\ N \in \mathbb{N}$ t.c.
se $a = a_0$ e $a_k R\, a_{k-1} R\, a_{k-2} R \dots R\, a_1 R\, a_0 \Rightarrow k \leq N$?

Svolgimento: No! poiché $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, <)$ è ben fondato ma $\neg\exists\ N$ come sopra.

[In generale le successioni non sono di lunghezza limitata da sopra.]

Def: Un buon ordine su A è un ordine totale su A ben fondato.
Diremo che $(A, <)$ è ben fondato.

Esempi: $(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, <)$ sono ben ordinati.
$(A, <)$ con A finito e $<$ ordine stretto è buon ordine.

Oss: Contare un insieme significa ben ordinarlo.

Parentesi: tipi di ordine

Se $(A,<)$ è ordine totale (ma anche parziale), posso associare a $(A,<)$ un oggetto $ot(A,<)$ ("order type") in modo che

$$\underline{(A,<) \simeq (B,\prec)} \text{ (isomorfismo di ordini) } \iff \boxed{ot(A,<) = ot(B,\prec)}$$

Def: $(A,<) \simeq (B,\prec) \iff \exists f: A \to B$ biunivoca t.c. $\underline{x<y \Rightarrow f(x) \prec f(y)}$

Esempio: $(\mathbb{N},<) \simeq (2\mathbb{N},<)$.

$(\mathbb{N},<) \not\simeq (\mathbb{N}\cup\{\infty\},<)$: infatti sono in biezione ma tale funzione non può preservare l'ordine.

Sia $f: \mathbb{N}\cup\{\infty\} \to \mathbb{N}$ biezione. $n = f(\infty)$.

$$n < n+1 \Rightarrow \infty = f^{-1}(n) < \underbrace{f^{-1}(n+1)}_{\in \mathbb{N}} \neq \infty \quad \text{\underline{impossibile}!}$$

$$\Rightarrow ot(\mathbb{N},<) = ot(2\mathbb{N},<) \quad e \quad ot(\mathbb{N},<) \neq ot(\mathbb{N}\cup\{\infty\},<).$$

Def: Un <u>ordinale</u> è un <u>tipo d'ordine</u> di un insieme ben ordinato.

Oss: $|X| = |Y| \iff \exists f: X \to Y$ biettiva.

$ot(X,<_X) = ot(Y,<_Y) \iff \exists f: X \to Y$ isomorfismo di ordini.

Oss: Ha senso definire ot anche per gli ordini non buoni che però non sono un ordinale.

Esercizio (non banale): $\boxed{(\mathbb{Q},<) \simeq (\mathbb{Q}\cup\{\sqrt{2}\},<)}$ con gli ordini ereditati da $\mathbb{R}$.

Def: Sia $(A,<_A)$ un ordine (totale). $X \subseteq A$. X è detto <u>segmento iniziale</u> e scrivo $X \subseteq_i A$ se

$$\underline{\forall a,b \in A} \quad (a<b \wedge b \in X) \Rightarrow a \in X$$

Esempio: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \pi\} \subseteq_i \mathbb{R}$ mentre $\mathbb{Z} \not\subseteq_i \mathbb{R}$.

Oss: Non si tratta proprio di una semiretta sinistra.

$\{x \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \mid x^2 < 2\} \subseteq_i \mathbb{Q}_{\geq 0}$ ma non ha sup (e quindi non è una semiretta)

Def: $ot(A,<_A) \leq ot(B,<_B)$ se $\exists f: (A,<_A) \xrightarrow{\simeq} (A',<_{A'})$ con $A' \subseteq_i (B,<_B)$ e $<_{A'} = <_B|_{A'}$

isomorfismo di ordini

cioè $\exists f: A \hookrightarrow B$ iniettiva t.c. $\forall x,y \in A \quad x <_A y \iff f(x) <_B f(y)$ e $\operatorname{Im} f \subseteq_i B$.

Esercizio: Trovare $(A,<_A)$ e $(B,<_B)$ ordini totali t.c.

$$\underline{ot(A,<_A) \not\leq ot(B,<_B)} \quad e \quad ot(B,<_B) \not\leq ot(A,<_A)$$

Svolgimento. $\underline{(\mathbb{N},<)}$, $\underline{(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N},<)}$.

Sia $f: (\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N},<) \to (\mathbb{N},<)$ isom. di ordini con $\operatorname{Im} f$ segmento iniziale di $(\mathbb{N},<)$

$\operatorname{Im} f$ deve avere un massimo poiché f è isomorfismo di ordini:

$\forall x \in \mathbb{Z}\setminus(\mathbb{N}\cup\{0\})$ $x < 0 \Rightarrow f(x) < f(0)$ $\forall x \in \mathbb{Z}\setminus(\mathbb{N}\cup\{0\}) \Rightarrow$ poiché f è isomorfismo su Im e quindi è biettiva, $\operatorname{Im} f$ ha come massimo $f(0)$ il che è assurdo poiché $\operatorname{Im} f$ è segmento iniziale $\square$

Somma e Prodotto di tipi di ordine.

⊛1: In modo analogo, sia $g: (\mathbb{N}, <) \longrightarrow (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, <)$, isomorfismo di ordini. $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $f(n) = 0$
$\Rightarrow n+1 > n \Rightarrow f(n+1) > f(n) = 0$
$\Rightarrow f(n+1) \notin \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ ASSURDO!

Siano $\alpha = ot(A, <_A)$ $\quad \beta = ot(B, <_B)$.

Def: $\alpha + \beta =: ot\left(A \times \{0\} \cup B \times \{1\}, <\right)$ con

- $(a, 0) < (b, 1) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$.
- $(a_1, 0) < (a_2, 0) \iff a_1 <_A a_2$
- $(b_1, 1) < (b_2, 1) \iff b_1 <_B b_2$

Esercizio: Verificare che sia una buona definizione tramite composizione di isomorfismi.

Def: $\alpha \cdot \beta =: ot(A \times B, <)$ con $<$ REVLEX (ordine lessicografico)

$$(a,b) < (a', b') \iff (b <_B b') \vee (b = b' \wedge a <_A a')$$

Oss, ~~Esercizio~~ I cardinali finiti li posso pensare come ordinali:

$0 = ot(\emptyset) \qquad n = ot(\{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}, <_{\mathbb{N}})$

Def: $\omega \doteq ot(\mathbb{N}, <)$

Esercizio: Se $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ sono buoni ordini $\Rightarrow$ $(A, <_A) + (B, <_B)$ e $(A \times B, <_{RevLex})$ sono buoni ordini.

Dim:

Notazione: $(A, <_A) + (B, <_B) \doteq (A \times \{0\} \cup B \times \{1\}, <)$

$\oplus$: Sia $X \subseteq (A, <_A) + (B, <_B)$.

Sia $X \subseteq B \times \{1\}$. Sia $\tilde{b} = \min_{<_B} \{b \in B \mid (b, 1) \in X\} \Rightarrow (\tilde{b}, 1) = \min_{<_A + <_B} X$

Sia $X \cap (A \times \{0\}) \neq \emptyset$. Sia $\tilde{a} = \min_{<_A} \{a \in A \mid (a, 0) \in X\} \Rightarrow (\tilde{a}, 0) = \min_{<_A + <_B} X$.

$\odot$: $X \subset A \times B \qquad X \neq \emptyset$

$\tilde{b} = \min_{<_B} \{b \in B \mid \underbrace{b \in X}_{(a,b) \in}\} \qquad \tilde{a} = \min_{<_A} \{a \in A \mid (a, \tilde{b}) \in X\}$

$\Rightarrow (\tilde{a}, \tilde{b}) = \min_{<} X$

∎

Oss: Possiamo anche definire α^β ma è più complicato geometricamente.

Oss: Vedremo che gli ordinali sono meglio dei cardinali poiché su essi possiamo fare sottrazioni, divisioni con resto, scriverli in base $10, \omega$...

Oss: $\boxed{\omega + 1 \neq \omega}$. Infatti $\omega + 1 = ot(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, <)$ e $\omega = ot(\mathbb{N}, <)$

Invece $\boxed{1 + \omega = \omega}$. Infatti:

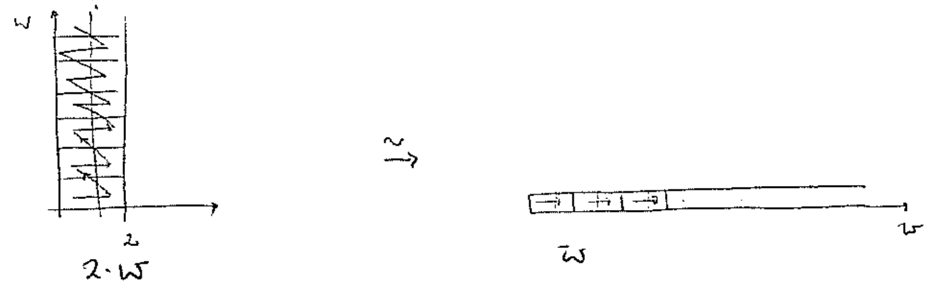
$1 + \omega = ot\left(\{a\} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}, <\right)$

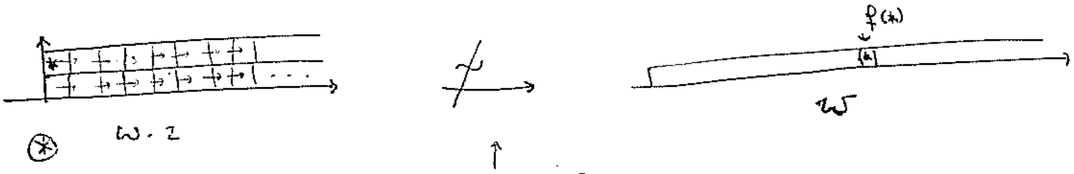
$(\{a\} \times \{0\}) \cup \mathbb{N} \times \{1\} \xrightarrow{\ \simeq\ } \mathbb{N}$

$(a, 0) \longrightarrow 0$

$(n, 1) \longrightarrow n+1$

$\boxed{\omega \cdot 2 = \omega + \omega}$ e $\boxed{2 \cdot \omega = \omega}$





prima di * ci sono un'infinito di elementi.

Esercizio: $\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma}$ ma in generale $\boxed{(\beta+\gamma)\cdot\alpha \neq \beta\cdot\alpha + \gamma\cdot\alpha}$

Infatti $\underbrace{2 \cdot \omega}_{\omega} = (1+1)\cdot\omega \neq \underbrace{1\cdot\omega + 1\cdot\omega}_{\omega+\omega}$

Nelle prossime lezioni vedremo i seguenti risultati

Teorema: $\boxed{\text{Se } \alpha, \beta \text{ sono ordinali} \Rightarrow \alpha \leq \beta \ \text{ o } \ \beta \leq \alpha}$

Def: α, β ordinali $\alpha = ot\,(A, <_A)$ $\beta = ot\,(B, <_B)$. Diciamo:

$\alpha < \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, f: A \hookrightarrow B$ iniettiva t.c. $x <_A y \Leftrightarrow f(x) <_B f(y)$ e $\operatorname{Im} f \subseteq_i B$ e $\operatorname{Im} f \neq B$

(cioè l'immagine di f deve essere un segmento iniziale proprio)

Teorema: $\boxed{\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \text{ e } \alpha \neq \beta}$

Teorema: $\boxed{\alpha \nless \alpha}$

Nota: vale solo per gli ordinali. Consideriamo per esempio $[0,1]$ e $[0,2]$ (con la rel. d'ordine di $\mathbb{R}$)

Tramite $x \mapsto \frac{x}{2}$ ~~[illegible]~~ i due sono isomorfi $\to$ $ot\,([0,1], <) = ot\,([0,2], <)$

Tuttavia tramite l'inclusione, ottengo anche $ot\,([0,1], <) < ot\,([0,2], <)$

Ponendo $\alpha = ot\,([0,1], <)$ $\beta = ot\,([0,2], <)$, ottengo che

$\alpha = \beta$ e $\alpha < \beta$

(*) Teorema: $\forall i,j \in I$, $(A_i, <_i) \subsetneq_i (A_j, <_j)$ o viceversa $\Rightarrow$ $\bigcup_i (A_i, <_i)$ è un buon ordine.

Dim2: Sia $X \subset A = \bigcup_i A_i$, $X \neq \emptyset$.

Per assurdo $\forall a \in X$, $\exists x \in X$ t.c. $x < a$.

$\Rightarrow$ Per A.C. $\exists f$ funzione dom$(f) = X$ t.c. $f(a) < a$ $\forall a \in X$.

$X \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in X. \Rightarrow \exists i$ t.c. $a \in A_i$.

Ma A_i è segmento iniziale e $f(a) < a$ $\Rightarrow f(a) \in A_i$

$\Rightarrow$ Per lo stesso motivo $f^n(a) \in A_i$ $\forall n$.

$\Rightarrow$ $(f^n(a) \mid n \in \mathbb{N})$ è una catena discendente in un buon ordine, ie che è assurdo

$\square$

Dim3. $X \neq \emptyset$, $X \subset \bigcup_i A_i = A$. $\Rightarrow \exists i$ t.c. $X \cap A_i \neq \emptyset$.

$(A_i, <_i)$ è buon ordine $\Rightarrow \exists$ $a = \min_{<_i} (A_i \cap X)$

Verifichiamo che $a = \min X$.

Sia $x \in X \Rightarrow \exists j$ t.c. $x \in A_j$.

Può succedere che

- $A_i \subsetneq_i A_j$
- $A_j \subsetneq_i A_i$

Se $A_j \subsetneq_i A_i \Rightarrow x \in A_i \Rightarrow a \leq_i x \Rightarrow a \leq x$.

Se $A_i \subsetneq_i A_j$, per assurdo sia $x < a \Rightarrow x <_i a \underset{\uparrow}{\Rightarrow} x \in A_i \Rightarrow a \leq x$ ASSURDO!

A_i è segmento iniziale

$\square$

(*) $\omega \cdot 2 \neq \omega$. Per assurdo $\exists f : (\mathbb{N} \times \{0,1\}, <_{lex}) \xrightarrow{\simeq} (\mathbb{N}, <)$

$f(0,1) = n$

$(0,0) < (1,0) < \dots < (n,0) < (0,1)$

$\Rightarrow f(0,0) < f(1,0) < \dots < f(n,0) < f(0,1)$

$\Rightarrow \# \underbrace{\{ f(s,t) \mid f(s,t) < f(0,1) \}}_{= \Gamma} \geq n+1$ poiché $f(0,0), \dots, f(n,0) \in \Gamma$

$\Rightarrow$ ASSURDO! $f(0,1) = n \Rightarrow$ ci sono solo n numeri più piccoli di $f(0,1)$ $\square$

Teorema: Se $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ sono buoni ordini.

$\Rightarrow$ $(A, <_A)$ è isomorfo ad un segmento iniziale di B (o viceversa).

(Sul segmento c'è l'ordine indotto da $<_B$)

BERARDUCCI 06-04

Dimostrazione:

Definiamo $R \subset A \times B$ in questo modo:

$$aRb \overset{def}{\iff} A_{\leq a} \simeq B_{\leq b}$$

con
$$A_{\leq a} = (\{x \in A \mid x \leq a\}, <_A)$$
$$B_{\leq b} = (\{x \in B \mid x \leq b\}, <_B)$$

Picappello 27-05

Dalla prox sett. al mercoledì c'è Di Nasso

Per procedere nella dimostrazione serve qualche preliminare.

Def: $f: (A, <_A) \longrightarrow (B, <_B)$ è crescente se
$$a_1 < a_2 \longrightarrow fa_1 < fa_2$$

Esercizio: f crescente ed è suriettiva $\Rightarrow$ f è isomorfismo. (l'iniettività segue dalla crescenza)

Lemma: $(W, <)$ è un buon ordine, $f: W \to W$ crescente. Allora
$$x \leq fx \quad \forall x.$$

Dim: Per assurdo, $\exists x$ t.c. $x > f(x)$

Sia $z = \min \underbrace{\{x \mid x > f(x)\}}_{\neq \emptyset}$ $\leftarrow$ esiste poiché $(W, <)$ è buon ordine.

$\Rightarrow z > f(z) \underset{f \text{ crescente}}{\Rightarrow} f(z) > f(f(z)) \Rightarrow f(z) \in \{x \mid x > f(x)\}$ ma $f(z) < z$ ASSURDO! $\blacksquare$

Oss: Serve che sia buon ordine.
$[0,2] \to [0,1]$
$x \longmapsto \frac{x}{2}$
è crescente ma non soddisfa la proprietà del lemma

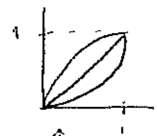
Corollario: $(W, <)$ è buon ordine $\Rightarrow$ il solo isomorfismo $f: W \to W$ è l'identità.

Dim: f è isomorfismo $\Rightarrow \forall x\ fx \geq x$ per il lemma.

f^{-1} è isomorfismo $\Rightarrow \forall x\ f^{-1}(x) \geq x$ per il lemma.

$\Rightarrow x = f^{-1}(f(x)) \geq f(x) \geq x \Rightarrow x = f(x) \forall x$ $\blacksquare$

Oss:
$[0,1] \to [0,1]$



tutti isom.

Corollario: Se due buoni ordini sono isomorfi, $\exists!$ isomorfismo tra loro.

Dim:
$$\left.\begin{array}{l} f: (A, <_A) \to (B, <_B) \\ g: (A, <_A) \to (B, <_B) \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g^{-1}: (B, <_B) \to (B, <_B) \Rightarrow f \circ g^{-1} = id$$
$$\Rightarrow g^{-1} = f^{-1} \Rightarrow g = f$$
$\blacksquare$

Lemma: $(W, <)$ buon ordine $\Rightarrow$ W non è isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio.

Dim: Sia $(S, <)$ segmento iniziale di W $\quad S \subsetneq W$

Sia $a = \min(W \setminus S) \Rightarrow S = \{x \in W \mid x < a\} = [\min, a)$

In generale non vale:
$[0,2] \to [0,1]$
$x \longmapsto \frac{x}{2}$

Oss: I segmenti iniziali di buoni ordini hanno estremi. (non vale in gen.)

Sia $f: (W, <) \xrightarrow{\sim} (S, <)$

$\forall x\ fx < a$. Ma $fx \geq x\ \forall x \Rightarrow fa \geq a$ ASSURDO! $\blacksquare$

Oss: La stessa dimostrazione prova che un buon ordine non può essere isomorfo ad un ... insieme con un ordine ...

...niamo alla dimostrazione.

Dato $a \in A$, ci sono 0 o 1 b t.c. aRb.

Se fosse aRb_1 aRb_2.

$$\left.\begin{array}{l} A_{\leq a} \simeq B_{\leq b_1} \\ \quad\wr\wr \\ B_{\leq b_2} \end{array}\right\} \Rightarrow B_{\leq b_1} \simeq B_{\leq b_2}$$

$b_1 < b_2$ o $b_2 < b_1$ (poiché siamo in un ordine totale)

Se $b_1 \neq b_2 \Rightarrow$ uno è segmento iniz. proprio dell'altro, ma un buon ordine non è isomorfo ad un suo segmento iniz.

$\Rightarrow b_1 = b_2$.

In modo analogo, dato $b \in B$, esiste al più un a.

Dimostriamo che almeno da una delle due parti ce ne sia uno.

Se il teorema fosse falso, esisterebbe a t.c. $\forall b$ $\neg aRb$ e esisterebbe un b t.c. $\forall a$ $\neg aRb$

Infatti se il teorema fosse falso, per assurdo

$\forall a \exists b$ t.c. $aRb \Rightarrow b = fa$ (poiché è unico) $\Rightarrow a \mapsto b$ sarebbe isomorfismo tra A e un segmento iniziale di B.

Basta dunque dimostrare che

$\forall a \exists b$ aRb oppure $\forall b \exists a$ aRb.

$a < a' \Rightarrow A_{\leq a} \subsetneq_i A_{\leq a'}$, $A_{\leq a} \simeq B_{\leq b}$, $A_{\leq a'} \simeq B_{\leq b'}$

$\Rightarrow B_{\leq b} \subsetneq_i B_{\leq b'}$

Oss: $a' <_A a$, $aRb \Rightarrow \exists b' \underset{B}{<} b$ t.c. $a'Rb'$

Infatti: $aRb \Rightarrow A_{\leq a} \simeq B_{\leq b} \to \exists f: A_{\leq a} \to B_{\leq b}$ isomorfismo.

$\Rightarrow$ la restrizione di f ad $A_{\leq a'}$, mi dà l'isomorfismo tra $A_{\leq a'}$ e la sua immagine (che è un segmento iniziale)

$\Rightarrow$ l'insieme degli elementi per cui $\exists$ b t.c. aRb è segmento iniziale.

$$\mathrm{dom}(R) = \{a \mid \exists b \ aRb\} \subsetneq_i A$$

$$\mathrm{Im}(R) = \{b \mid \exists a \ aRb\} \subsetneq_i B$$

$\Rightarrow R: \mathrm{dom}(R) \to \mathrm{Im}(R)$ è isomorfismo.

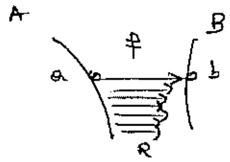
1) è iniettiva
2) è suriettiva
3) preserva gli ordini. (*)

(*) $a < a'$, aRb e $a'Rb' \Rightarrow b < b'$.

Per assurdo, $b \geq b' \Rightarrow$

$B_{\leq b'} \subsetneq_i B_{\leq b}$, $B_{\leq b'} \simeq A_{a'}$, $B_{\leq b} \simeq A_{\leq a}$, $A_{a'} \supsetneq_i A_{\leq a}$ $\Rightarrow$ $B_{\leq b}$ è isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio ASSURDO!

$\Rightarrow$ Mi basta dimostrare che $A = \mathrm{dom}(R)$ o $B = \mathrm{Im}(R)$



Sia $a = \min(A \setminus \mathrm{dom}(R))$ $\quad$ $b = \min(\underbrace{B \setminus \mathrm{Im}(R)}_{\neq \emptyset \text{ hp ASSURDO!}})$

($A \setminus \mathrm{dom}(R) \neq \emptyset$ hp ASSURDA)

Definiamo

$f: A_{\leq a} \to B_{\leq b}$

$$f(x) = \begin{cases} y & \text{con } xRy \text{ se } x < a \\ b & \text{se } x = a \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} R(x) & \text{se } x < a \\ b & \text{se } x = a \end{cases} \quad \text{estensione di } f$$

$\Rightarrow f$ è isomorfismo. $\Rightarrow$ aRb ASSURDO! (per def di R)

$\Rightarrow A \setminus \mathrm{dom}(R) = \emptyset$ o $B \setminus \mathrm{Im}(R) = \emptyset \Rightarrow A = \mathrm{dom}(R)$ o $B = \mathrm{Im}(R)$. ∎

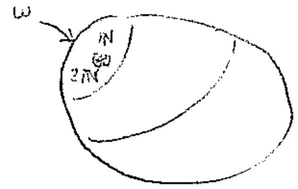
Unione di buoni ordini

BERARDUCCI

08-04

Def. ORDINALE = TIPI di ISOM. di BUONI ORDINI.

$\omega = ot(\mathbb{N}, <) = ot(2\mathbb{N}, <)$



← Abbiamo una partizione dei buoni ordini
Il passo successivo è prendere per ogni classe, un rappresent. che sia un insieme.

Es. $\{\{a\} \mid a \in V\}$ non è insieme.

$V \ni 0 = \phi$

$V \ni 1 = \{\phi\}$

$2 = \{0, 1\}$

$\vdots$

$\omega = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ ← la relazione d'ordine è data dall'appartenenza.

$\vdots$

Ci sono due modi per costruire ordinali:

1) $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ successivo.

2) sup

Dobbiamo capire come si definisce il sup.

Unione di buoni ordini:

Se $(A_i, <_i)$ sono ordini totali, $\forall i \in I$, quando ho senso farne l'unione

$$(A, <) = \bigcup_i (A_i, <_i) = \left(\bigcup_i A_i, \bigcup_i <_i\right)$$

OSS: $<_i \subset A_i \times A_i \rightarrow$ ha senso fare $\bigcup <_i$

OSS: Non sempre $\bigcup(A_i, <_i)$ è un ordine. Quando è ordine?

Devo richiedere che

Richiesta affinché l'unione di ordini totali sia ordine totale →

$\forall i, j \in I \quad A_i \subset A_j$ o $A_j \subset A_i$ e

$\forall i, j \in I \quad <_i = <_{j|A_i}$ o $<_j = <_{i|A_j}$

$\Longleftrightarrow$ $\forall i, j \quad (A_i, <_i) \subset (A_j, <_j)$ o viceversa. (compatibili)

Verificare che con questa richiesta torna tutto, cioè $\bigcup(A_i, <_i)$ è un ordine totale. Infatti:

1) $x < y < z \Rightarrow x < z \quad \forall x, y, z \in A$?

$x \in A = \bigcup_i A_i \Rightarrow \exists i$ t.c. $x \in A_i$. $\exists j$ t.c. $y \in A_j$, $\exists k$ t.c. $z \in A_k$

Siccome a due a due sono inclusi, esiste un indice che contiene gli altri, per esempio

$A_i \subset A_j \subset A_k$

Cioè $\exists \ell \in \{i, j, k\}$ t.c. $x, y, z \in A_\ell \Rightarrow$

$\exists i$ t.c. $(x, y) \in <_i$

$\exists j$ t.c. $(y, z) \in <_j$

$\Rightarrow \exists \ell$ t.c. $x, y, z \in A_\ell$ e $x <_\ell y <_\ell z \Rightarrow x <_\ell z \Rightarrow x < z$

($<_\ell$ è ordine tot.)

OSS: : Per ogni $\ell' > \ell$, vale sempre.

OSS: Non necessariamente è un buon ordine.

Infatti:

$$\underbrace{(\mathbb{Z}, <)}_{\substack{\text{non è un buon ordine} \\ \text{(ha catene discendenti infinite)}}} = \bigcup_n \underbrace{\left([-n, n] \cap \mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}}\right)}_{\text{buoni ordini}}$$

→ Affinché sia un buon ordine devo richiedere che ⊛:

Richiesta affinché unione di buoni ordini sia buon ordine.

⊛ Teorema: $\forall i, j \in I, \quad (A_i, <_i) \subseteq_i (A_j, <_j)$ o viceversa $\Rightarrow$ $\bigcup_i (A_i, <_i)$ è un buon ordine.

$(A_i, <_i)$ bene ordinati

im: Sia $(A,<) = \bigcup_i (A_i, <_i)$

sia $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ catena discendente infinita $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ $x_n > x_{n+1}$ $\forall n$.

$x_0 \in A_i \implies x_n \in A_i \; \forall i$

$x_1 < x_0 \in A_i$

$x_1 \in A_j$

Se $A_j \subset A_i \implies A_j \subsetneq A_i \implies x_1 \in A_i$

Se $A_i \subset A_j \implies A_i \subsetneq A_j \implies x_1 \in A_i$ poiché A_i è segmento iniziale

Per induzione $x_n \in A_i$ $\forall n$.

Devo verificare che $x_0 >_i x_1 >_i \dots$

$\exists j$ t.c. $x_0 >_j x_1 \implies x_0, x_1 \in A_j$ Ma $x_0, x_1 \in A_i$.

Poiché $<_i = <_j$ se $\underbrace{A_i \cap A_j}_{\text{il più piccolo tra } A_i \text{ e } A_j}$ per hp $\implies x_0 <_i x_1 \implies (x_n \mid n \in \mathbb{N})$ è una catena discendente in A_i, ma $(A_i, <_i)$ è ben ordinato

ASSURDO! □

Esercizio: Dimostrare il teorema con la def. di insiemi vuoti. ⊛

im2: $X \neq \emptyset$ $X \subset A = \bigcup_i A_i$

$\exists i$ t.c. $X \cap A_i \neq \emptyset$ $\quad r = \min (X \cap A_i)$ → verificare che è il minimo di X.

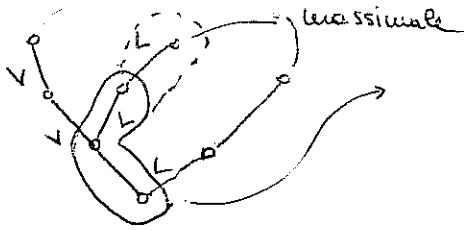
LEMMA di ZORN:

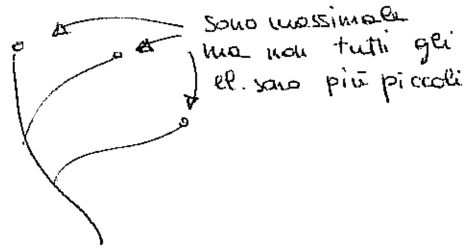
Sia $(A,<)$ un ordine parziale.

Def: Sia $X \subset A$ è una catena se $< \cap (X \times X)$ è totale (cioè $\forall x, y \in X$, $x \le y$ o $y \le x$)

Lemma: Sia $(A,<)$ un ordine parziale $\implies \exists X$ catena non prolungabile, cioè senza maggioranti stretti, $\nexists a \in A \setminus X$ t.c. $\forall x \in X$ $x < a$.

Esempio di catena ~~non~~ prolungabile





OSS: Se l'ordine è finito è piuttosto ovvio, dimostrare per esercizio (induzione!)

MASSIMALE: niente è più grande di loro.

Def: a è massimale se $\forall x \in A$, $x \not> a$.

$a \in A$ è massimo se $\forall x \in A$ $x \not\geq a$

OSS: Se ∃ il massimo, è unico. I massimali posso essere di più.

$X \subset A$. $a \in A$ maggiora X se $\forall x \in X$ $a \geq x$

$a \in A$ maggiora strettamente X se $\forall x \in X$ $a > x$.

OSS: Se X non ha massimo & i maggioranti di X sono stretti. poiché i maggioranti in X sono i massimi

(*) Teorema: $\{(A_i, <_i)\}_{i\in I}$ una famiglia di buoni ordini t.c. $\forall i,j \in I$ $(A_i, <_i) \subsetneq_i (A_j, <_j)$ o viceversa

$$\Longrightarrow \left(\bigcup_i A_i \, , \; \bigcup_i <_i \right) \text{ è un buon ordine}$$

Dim:

La verifica che sia un ordine totale è banale e noiosa.

Sia $X \subseteq \bigcup_i A_i$ $X \neq \phi \Rightarrow \exists a \in X \Rightarrow \exists_i$ t.c. $a \in A_i$

Lemma: $\forall i, A_i \subseteq_i \bigcup_i A_i$ (sotto le hp del teorema)

Dim: Sia $a \in A_i$, sia $x < a_i \Rightarrow \exists j$ t.c. $x \in A_j. \Rightarrow A_j \subsetneq_i A_i$

$\Rightarrow x \in A_i$ ∎

Sia $\Gamma = \{x \in X \mid x \leq a\} \subseteq A_i$ poiché A_i è segmento iniziale.

$\Rightarrow \exists \bar{x} = \min_{<_i} \Gamma \Rightarrow \bar{x} = \min_{<} X$ ∎

Dim (dell. lemma):

Sia F la famiglia delle catene di $(A,<)$ con un maggiorante stretto.

Usando (A,C), $\forall X \in F\ \exists\ a \in A$ t.c. a maggiora strettamente X.

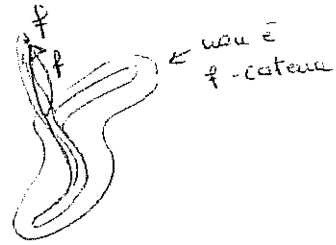
Per A.c. $\exists$ $(a_X \mid X \in F)$ dom $(f) = F$ $(a_X \mid X \in F): F \to A$ t.c.

$\forall X$ a_X è maggiorante stretto di X

Definiamo $f: \{\text{catene}\} \longrightarrow \{\text{catene}\}$

$f(X) = X \cup \{a_X\}$ se $X \in F$

$f(X) = X$ altrimenti.



L'idea è partire dal vuoto e applicare f finché non sto fermo.

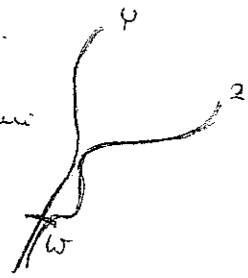
$\phi,\ f\phi,\ ff f\phi, \dots\ f^n(\phi) \dots\dots,\ \bigcup_n f^n\phi, \dots\dots$ ← le chiamiamo f-catene.

Def: Y è f-catena se è una catena di $(A,<)$ e "segue f" se $\forall X \underset{i}{\subsetneq} Y$ $f(X) \underset{i}{\subseteq} Y$

Lemma 1: Se Y e Z sono f-catene $\Rightarrow$ $Y \underset{i}{\subseteq} Z$ o $Z \underset{i}{\subseteq} Y$ (con l'ordine indotto da $(A,<)$)

Dim: Sia W = l'unione di tutti i segmenti iniziali comuni a Z e Y.

Allora W è segmento iniziale (usi fissare che unione di seg. iniz. è segmento iniziale) ed è il più grande degli insiemi iniziali comuni



Mostriamo che $W = Y$ o $W = Z$.

Sia $W \neq Y$ e $W \neq Z$. $\Rightarrow$ $W \underset{i, \neq}{\subseteq} Y, Z$.

$\overset{\text{def}}{\Rightarrow}$ $f(W) \subset Y, Z \Rightarrow f(W)$ è catena.

Ma $W \underset{\neq}{\subseteq} f(W)$ ASSURDO!

$W \neq Y \Rightarrow$ è segmento iniziale con maggioranti. $\square$

Sia M = unione di tutte le f-catene. (assioma dell'unione, insieme delle f-catene è insieme per l'assioma delle parti, è un sottoinsieme delle parti)

È chiaro che M è una catena per il lemma 1 (unione di ordini totali compatibili è ordine totale)

M è una f-catena. Sia $X \underset{i, \neq}{\subseteq} M$. $\overset{?}{\Rightarrow} f(X) \underset{i}{\subseteq} M$. Sia $a \in M \setminus X$

Sia $B \underset{i}{\subseteq} M$ una f-catena t.c. $a \in B$, (esiste poiché $a \in M$).

Verificare che $X \underset{i}{\subseteq} B$ (Vale $X \underset{i}{\subseteq} B$ o $B \underset{i}{\subseteq} X$ poiché sono f-catene e $a \notin X$)

Anzi:

$X \underset{i}{\subseteq} \{x \in M \mid x < a\} \underset{i}{\subseteq} B \Rightarrow X \underset{i, \neq}{\subseteq} B$

Poiché B è f-catena $X \underset{i, \neq}{\subseteq} f(X) \underset{i}{\subset} B \underset{?}{\subset} M$

Oss: $\forall B$ f-catena $B \underset{i}{\subseteq} M$

poiché M è unione di cose a due a due unione iniziale dell'altra.

$\Rightarrow$ M è f-catena ed è la più grande di tutti.

Oss: X è f-catena $\Rightarrow f(X)$ è f-catena.

OSS: X è f-catena $\Rightarrow$ $f(X)$ è f-catena.

M è f-catena $\Rightarrow$ $fM = M$ (poiché M è la più grande) e quindi M non è prolungabile $\blacksquare$

Segue il lemma di Zorn:

Corollario (Lemma di Zorn): Sia $(A,<)$ ordine parziale t.c. ogni catena ha maggiorante.
$\Rightarrow \exists a \in A$ massimale. $(\forall x \in A,\ x \not> a)$

Dim: Sia $M \subset A$ catena non prolungabile. $\underset{hp}{\Rightarrow}$ M ha un maggiorante a

a non è stretto, altrimenti M sarebbe prolungabile $\Rightarrow a \in M \Rightarrow a$ è massimo di M.

$\Rightarrow a$ è massimale in A.

Se $\exists\ x > a$, allora potremmo prolungare la catena.

OSS: $(\mathbb{N},<)$ non soddisfa le hp. del lemma di Zorn $\rightarrow$ infatti non ha massimale.

Teorema di Zermelo: Ogni insieme X può essere bene ordinato.

$AC \to$ Zorn $\overset{?}{\to}$ Zermelo $\overset{?}{\to} AC$

Teorema di Zermelo: Ogni insieme può essere bene ordinato.

Dim.: Sia $P = \{(A, <_A) \mid A \subset X,\ <_A$ è buon ordine su $A\}$

$P \neq \phi \to$ Basta considerare $A \subset X$ finito.

OSS: Possono esistere due coppie diverse con primo elemento uguale.

Mettiamo un ordine $\prec$ su P:

$$(A, <_A) \prec (B, <_B) \iff A \subset B \quad e \quad <_A = <_B|_A \quad e \quad A \subsetneq B \text{ rispetto all'ordine di } B.$$

$\Rightarrow (P, \prec)$ verifica le ipotesi del lemma di Zorn. Infatti:

1) $\prec$ è ordine parziale.

2) ogni catena in P ha un maggiorante: infatti una catena è un insieme di coppie $\{(A_i, <_i) \mid i \in I\} \to$ Posso scegliere come maggiorante l'unione: l'unione di questi segmenti è un buon ordine ed ogni $A_i \subsetneq \bigcup_i A_i \Rightarrow A_i \prec \bigcup_i A_i$

$\Longrightarrow \exists (C, <_C) \in P$ massimale $\Rightarrow C = X$

Se no, sia $a \in X \setminus C \Rightarrow$ posso considerare $C' = C \cup \{a\}$ con l'ordine $<'$ che coincide con $<_C$ su C e mette a in fondo, cioè ~~x~~ $x < a\ \forall x \in C \Rightarrow <'$ è un buon ordine, il che contraddice la massimalità di C ASSURDO! ∎

OSS: Si può dimostrare dirett. $AC \to$ Zermelo, applicando la dimost. del lemma di Zorn al Poset (insieme con ordine parz.) $P = \{(A, <_A) \mid A \subset X$ e $<_A$ è buon ordine$\}$

Oss: $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$ ha un massimo che è $\mathbb{N}$: ogni catena ha magg. $\to$ in questo caso non serve applicare Zorn.

Teorema: Zermelo $\Rightarrow$ A.C.

Dim.: (A.C.): date $\{A_i \mid i \in I\}$ $A_i \neq \phi\ \forall i \Rightarrow \exists f$ funzione dom$(f) = I$ t.c. $f(i) \in A_i\ \forall i$.

Con Zermelo, bene ordino $\bigcup_{i \in I} A_i$ con ordine $<$ e definisco

$$f(i) = \min_{<}(A_i)$$

$\to$ il minimo esiste poiché $A_i \subset \bigcup_n A_n$ è sottoinsieme non vuoto di un buon ordine e quindi è un buon ordine ∎

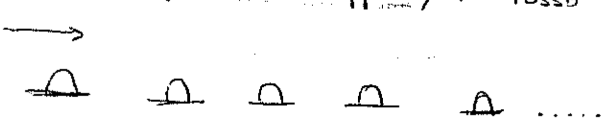
OSS: E è relazione di equivalenza su $X \Rightarrow AC$ può essere usata per scegliere un particolare rappresentante.

Esempio di Vitali: $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Con A.C. scelgo per ogni classe di eq. un rappresentante e costruisco V = insieme di Vitali.
V non è misurabile. Per assurdo V misurabile:

$$[0,1] = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q) \qquad \text{ASSURDO!} \qquad \mu(V+q) = \begin{cases} 0 \to \mu([0,1]) = 0 \\ 1 \to \mu([0,1]) = +\infty. \end{cases}$$

OSS: Senza A.C. non si riesce a ~~calco~~ costruire un insieme non misurabile.

Esercizio: (gioco dei cappelli): Posso guardare davanti. Devono dire il colore del loro cappello. Sanno le stanze.



0 1 2 3 4 .....

Si possono salvare tutti eccetto un numero finito.

cappelli o bianchi o neri.

$f: \mathbb{N} \to \{0,1\}$ è distribuzione dei cappelli.

$f \sim g \iff \exists N > 0$ t.c. $\forall n > N \quad g_n = f_n$ (cioè definitivamente sono uguali)

Verificare che $\sim$ è rel. di eq.

Considero $[f] = \{g \mid g \sim f\}$

Per A.C. $\exists$ funzione Scelta tale che

$$\text{Scelta}([f]) \in [f] \quad \forall f \qquad (\text{scelta}([f]) \text{ mi dà un rappresentante della classe})$$

Si mettono d'accordo: fissano una funzione scelta.

Gli vengono messi i cappelli: ciascuno conosce davanti, quindi conosce la classe di eq. $[f]$. della distribuzione. Ciascuno dà la risposta prevista dalla scelta $([f]) = g$.

Il signor n dice nero $\iff g(n) = 1$

bianco $\iff g(n) = 0$.

$\to$ Si salvano tutti tranne un numero finito, poiché da un certo p.to in poi $f = g$.

Esercizio (variante): tutti vedono tutti eccetto se stesso. Si salvano tutti tranne forse il primo (che muore con probabilità $\frac{1}{2}$) (stessa situazione di prima).

(parlano in successione)

Suggerimento:

Caso finito: (parlano in successione):

0 dice 1 se ci sono un numero dispari di 1 davanti a sé

0 se ci sono un numero pari di 1 davanti a sé.

Caso infinito: pensarci!

Suggerimento: A.C. serve per dare un senso a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \mod(2)$

$\{f: \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ è uno spazio vett. $\to$ ha un complemento

$\to$ ogni f si può scrivere in modo unico come $f_1 + f_2$ con f_1 a supporto compatto

con cui definisco $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \mod(2)$.

ORDINALI di VON NEUMANN

$0 = \phi$

$1 = \{0\}$

$2 = \{0,1\}$

$\vdots$

$n+1 = n \cup \{n\}$

$\vdots$

Come continuiamo?

$\omega = \{0,1,2,\ldots\} \to$ male! Dobbiamo dare una def. di ω senza ...

$\rightsquigarrow S(x) = x \cup \{x\} \Rightarrow S(\omega) = \omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0,1,2,\ldots,\omega\}$

$\rightsquigarrow$ Abbiamo bisogno di definizioni più precise.

Def: α è transitivo se $x \in y,\ y \in \alpha \to x \in \alpha.\ \forall x,y$

Esempio: $3 = \{0,1,2\}$ è transitivo: per esempio $0 \in 1 \in 2 \to 0 \in 2$.

$\alpha = \{0,2\}$ non è transitivo: $1 \in 2 \in \alpha$ ma $1 \notin \alpha$.

OSS: Un insieme transitivo è un insieme senza buchi.

Oss: In generale $\in$ non è transitiva $\to$ non è ordine.

Esercizio (

Ogni insieme è contenuto in un transitivo.

Def: α è ordinale se α è transitivo ed è bene ordinato da $\in$ (come ordine stretto)

Oss: $3=\{0,1,2\}$ $0\in 1\in 2$ $\to$ $\in$ è un buon ordine.

Oss: Non serve l'assioma di fondazione.

Assioma di fondazione: $\forall X$ insieme, $\in_{|X} = \{(a,b)\mid a\in X, b\in X, a\in b\}$ è ben fondata.

Oss. Se ammettiamo l'assioma di fondazione, basterebbe richiedere che $\in$ è ordine totale.
Non però non consideriamo l'assioma di fondazione e mettiamo buon ordine nella def

Esempio: ω è ordinale.

$x\in y\in\omega \Rightarrow y \in = \mathbb{N}$.

$\omega=\{0 \underset{\in}{,} 1 \underset{\in}{,} 2, \dots\dots \underset{\in}{,} \omega\}$ $\to$ Si vede che è un buon ordine.

Teorema: (serve il rimpiazzamento).

$\forall$ buon ordine $(A,<_A)$ $\exists!$ ordinale α t.c. $\boxed{(A,<_A)\simeq(\alpha,\in)}$ $\to$ Esempio

Esempio:

$\mathbb{N}+\mathbb{N} = (\mathbb{N}\times\{0\})\cup(\mathbb{N}\times\{1\}) \simeq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n(\omega) = \omega+\omega$

Oss: $\alpha=$ tipo $(A,<_A)$ $\to$ non prendiamo più una classe di equivalenza, ma un rappresentante

N.B.: Non uso A.C. per due motivi:

① A.C. vale su insiemi e non sull'universo

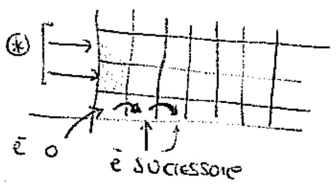
② Non serve poiché ho un modo per scegliere un rappresent.

Sia $(A,<)$ buon ordine.

Sia $0^A = \min A$. $(A,<)$ è buon ordine

$\forall a\in A$, a è zero o $\exists b$ t.c. $(b<a \wedge \nexists c$ t.c. $b<c<a)$ (a è successore di b, $a=S(b)$)
o a è limite, cioè a è sup dei precedenti. $(A,<)$ è un buon ordine

Esempio $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, <_{lex})$



⊛ sono sup dei minori

$\boxed{\text{Sup} = \text{minimo dei maggioranti } (\geq)}$

Dim: Sia $x\in A$. $x=0$ ✓. $x=S(y)$ ✓. Suppongo $x\neq 0$ e $x\neq S(y)$ (non è né zero né successore).
Dimostro che è sup dei precedenti.

Devo anzitutto dimostrare l'esistenza del sup.

Sia $B=\{y\mid y<x\}$. x è maggiorante di B stretto (scriviamo $B<x$)
Devo fare vedere che è il minimo dei maggioranti.

Sia $u<x \overset{?}{\Rightarrow} u$ non è maggiorante, cioè $B\leq u$ ⊛
Chiaro

Lemma: $(A,<)$ buon ordine $\Rightarrow$ ogni $x\in A$ o è $\max A$ o ha successore.

Dim: Sia $y=\min\{u\mid u>x\}$ (supponendo che x non sia massimo)

$\to y=S(x)$

→ Nei buoni ordini c'è successore, ma non sempre ~~p~~ predecessore.

$u < x \Rightarrow S(u) \leq x$. Nel nostro caso x non ha predecessori $\Rightarrow S(u) < x \Rightarrow S(u) \in B$

$\Rightarrow u$ non è maggiorante

→ Quindi gli ordinali sono costruiti tramite successore e sup.

— . — . — . — . —

~~$(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset) \leq (\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ → Ci siamo dati degli ordini e ne costruiamo uno nuovo ma sono diff.~~

~~Sia $\underset{*}{<}$ un buon ordine su $\mathbb{R}$. Posso costruire~~

~~$(\mathbb{R}, \underset{*}{<}) \longrightarrow (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$~~

~~$\min \mathbb{R} \longmapsto 0$.~~

Esercizio: $(A, <)$ un buon ordine senza elementi limite $\Rightarrow$ è isomorfo a $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$

(Usare Teorema di ricorsione)

$$(A, <) \longrightarrow (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$$
$$\min A \longrightarrow 0$$
$$S(x) \longrightarrow n+1.$$

Teorema: $\boxed{\text{Se } \alpha \text{ è ordinale}, x \in \alpha \Rightarrow x \text{ è ordinale.}}$

Dim: ① transitività

② ben ordinato da $\in$

Oss: A è transitivo $\Leftrightarrow \forall x \quad x \in A \rightarrow x \subset A$.

Infatti: $(\rightarrow)$: $x \in A \Rightarrow \forall y \in x, \in A \rightarrow y \in A$ (per transitività) $\rightarrow x \subset A$

$(\leftarrow)$ $y \in x \in A \rightarrow x \subset A \rightarrow y \in A$

→ Dim: Verifico ①. Sia $z \in y \in x \overset{?}{\rightarrow} z \in x$

So che $y \in x \in \alpha \underset{\alpha \text{ è trans.}}{\Longrightarrow} y \in \alpha \Rightarrow z \in y \in \alpha \Rightarrow z \in \alpha$

$\Rightarrow z, x, y \in \alpha$.

$(\alpha, \in)$ è ben ordinato. $\Rightarrow z \in y \in x$ nel buon ordine di $\alpha \Rightarrow z \in x$

legge transitiva del buon ordine: in α, $\in$ è ordine totale, quindi gode della proprietà transitiva.

Verifico ②

$x \in \alpha \underset{\alpha \text{ è transitivo}}{\rightarrow} x \subset \alpha$

Oss: Un sottoinsieme di un buon ordine è un buon ordine con l'ordine indotto.

→ $(x, \in)$ è un buon ordine con l'ordine indotto da α, cioè $\in$.

$\Rightarrow x$ è ordinale (ON)

$\boxed{\text{ON = classe degli ordinali} \rightarrow \text{non è insieme!}}$

Di Nasso
13-04

$Fin(\mathbb{N}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ è finito}\}$ Sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$

$Seq(\mathbb{N}) = \{ a : n \to \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{N} \;\&\; n \in \mathbb{N} \}$ sequenze finite di naturali.
$n = \{0, \dots, n-1\}$

Esercizio: $|Fin(\mathbb{N})| = |Seq(\mathbb{N})| = \aleph_0$

Svolgimento: $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$ e $|\mathbb{N}^k| = \aleph_0 \;\forall k$

Mostriamo che $|\mathbb{N}| \underset{①}{\leq} |Fin(\mathbb{N})| \underset{②}{\leq} |Seq(\mathbb{N})| \underset{③}{\leq} |\mathbb{N}|$ da cui segue la tesi per Cantor-Bernstein.

① $\varphi_1 : n \mapsto \{n\}$ è iniettiva.

② $\varphi_2 : \{a_1 < \dots < a_n\} \longmapsto (a_1, \dots, a_n)$ è iniettiva.

③ $\varphi_3 : (a_1, \dots, a_n) \longmapsto p_1^{a_1+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n+1}$ con $\{p_1, \dots\}$ sequenza dei numeri primi $\}$.

metto +1 per avere tutti esponenti > 0.

$\Rightarrow$ Per il teorema di unicità della fattorizzazione.

Esercizio:

$[\mathbb{N}]^{\aleph_0} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid |A| = \aleph_0\}$ sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$. $|[\mathbb{N}]^{\aleph_0}| = ?$

Metodo 1:

Lemma: $A \subset B$, $|A| < |B| = c \Rightarrow |B \setminus A| = c$

$[\mathbb{N}]^{\aleph_0} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus Fin(\mathbb{N}) \Rightarrow$ per il lemma, $\boxed{|[\mathbb{N}]^{\aleph_0}| = c}$

Metodo 2: Cerchiamo

$\varphi : B \longrightarrow [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$ iniettiva con $|B| = c$

Scegliamo $B = \mathcal{P}(\{\text{numeri pari}\})$

$$\varphi : \mathcal{P}(\{\text{numeri pari}\}) \longrightarrow [\mathbb{N}]^{\aleph_0}$$
$$C \longmapsto C \cup \{\text{dispari}\}$$

Lemma: $|A| = |B| \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$ $\quad (\rightarrow |\mathcal{P}(\{\text{numeri pari}\})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = c)$

$(\Leftarrow) \rightarrow$ non si può dimostrare! Come l'ipotesi del continuo:
Se ho un insieme infinito di reali, ha cardinalità c o $\aleph_0$

[è indipendente dagli assiomi della matematica]

Esempi:

$|(0,1)| = c$

$\Rightarrow |\mathbb{R}| = |(0,1)| \leq |[0,1]| \leq |(-1,1)| = |\mathbb{R}| \underset{\text{Cantor-Bernstein}}{\Rightarrow} |(0,1)| = |[0,1]| = c.$

Trovare esplicitamente:

$\varphi : [0,1) \longrightarrow (0,1)$ biunivoca.

Esiste per Cantor-Bernstein $\rightarrow$ come da dimostrazione, bisogna passare ad un procedimento infinito.

$\varphi(0) = \frac{1}{2} \qquad \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \qquad \varphi(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \qquad \varphi(x) = x$ se $x \notin A$.

$A = \{ \dots$

Esercizio: $\mathrm{Fin}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ ....
successioni.

Dimostrare che hanno tutte la cardinalità del continuo, cioè

$$\boxed{|\mathbb{R}| \underset{①}{\leq} |\mathrm{Fin}(\mathbb{R})| \underset{②}{\leq} |\mathrm{Seq}(\mathbb{R})| \underset{③}{\leq} |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = c}$$

① $r \mapsto \{r\}$

② $\{r_1 < \dots < r_n\} \mapsto (r_1, \dots, r_n)$

③ $(r_1, \dots, r_n) \mapsto \sigma$ con $\sigma(i) = \begin{cases} r_i & i \leq n \\ \circledast & i > n \end{cases}$

$$\psi : \mathrm{Seq}(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} \cup \{\circledast\})^{\mathbb{N}} \quad \text{con } \circledast \notin \mathbb{R}. \ \psi \text{ iniettiva}$$

lemma: $\boxed{\left.\begin{array}{l} |A| = |A'| \\ |B| = |B'| \end{array}\right\} \Rightarrow |B^A| = |B^{A'}|}$ (Dimostrare per esercizio)
(da cui segue la buona def. del prodotto di cardinali)

$\Rightarrow (\mathbb{R} \cup \{\circledast\})^{\mathbb{N}}$ è equipotente a $(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

) $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |((\{0,1\})^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}|$ Infatti: $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \underset{A \mapsto \chi_A}{=} |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$

$$\underset{\text{lemma.}}{\Rightarrow} |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}|$$

Esercizio: $\boxed{|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|}$

$$\psi \longmapsto \theta : B \times C \to A$$
$$(b,c) \to \psi_c(b)$$

$\Rightarrow$ $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$ e si chiude il cerchio.

$\triangleright$ $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \Rightarrow \underline{|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|} = c^c = (2^{\aleph_0})^c = 2^{\aleph_0 \cdot c} = \underline{2^c}$

$\aleph_0 \cdot c = |\mathbb{N} \times \mathbb{R}| = c$

$\boxed{|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|} \to \underline{|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{R}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|}$

Oss: Vedremo che in generale, $\forall\, k$ cardinale

$$\boxed{k^k = 2^k}$$

Esercizio: Quante sono $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$

$c = |\text{continuo}| \leq |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \leq 2^c$

Ipotesi del continuo: $\aleph_0 \leq |A| \leq 2^{\aleph_0} \Rightarrow |A| = \aleph_0$ o $|A| = 2^{\aleph_0}$

Ipotesi generalizzata del continuo: $\forall K$ cardinale, $K \leq |A| \leq 2^K$

$\Rightarrow$ Dato un insieme, posso determinare che ha cardinalità C o 2^K.
poiché per l'ipotesi del continuo, non si può sapere se ci sono cardinali tra K e 2^K

Idea: $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}} \Rightarrow f = g$ (per la densità dei razionali)

Dim: $\sqrt{2} = \lim_{n \to +\infty} q_n \quad q_n \in \mathbb{Q}$

$$f(\sqrt{2}) = f\left(\lim_{n \to +\infty} q_n\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{continuità}}}{=} \lim_{n \to +\infty} f(q_n) \overset{hp}{=} \lim_{n \to +\infty} g(q_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Cont.}}}{=} g(\lim \quad = g(\sqrt{2})$$

$\rightarrow \quad \varphi: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \quad \varphi(f) = f_{|\mathbb{Q}}$ è iniettiva ⚠

$\Rightarrow \quad |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = c \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})| \leq c.$

L'altra disuguaglianza è banale.

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ x &\longrightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \qquad y \mapsto x \end{aligned} \qquad \Rightarrow \varphi \text{ è iniettiva} \Rightarrow c \leq |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})|$$

Possiamo concludere che: $c = |\mathcal{C}^0(\mathbb{R})|$

Berarducci

15-04

Def. α è ordinale se
1. $x \in y \in \alpha \to x \in \alpha$
2. $(\alpha, \in)$ è ben ordinato $\quad (\in = <)$

Esempio: $0 = \emptyset,\quad 1 = \{0\},\quad 2 = \{0,1\}\ \dots$

Oss: Abbiamo visto che $\alpha \in ON,\ x \in \alpha \Rightarrow x \in ON$.

Lemma: $\alpha, \beta \in ON$. Sono equivalenti.
1) $\alpha \in \beta$
2) $\alpha \subsetneq \beta$
3) $\alpha \subsetneq_i \beta$

[Oss: $\alpha \in ON \Rightarrow \alpha \notin \alpha$ (senza ass. di fond.)
Se infatti $\alpha \in \alpha$, allora $\alpha \in \alpha \in \alpha \Rightarrow \alpha < \alpha$ ASSURDO!]
per def. di minore stretto

Dim: $(1) \to (2)$: Se $\alpha \in \beta$, allora $\alpha \subseteq \beta$ poiché β è transitivo. Inoltre $\alpha \neq \beta$ poiché se no sarebbe $\alpha \in \alpha$.

$(2) \to (3)$: Sia $\alpha \subsetneq \beta$. Sia $x \in \beta$. $x < y \in \alpha \Rightarrow x \in y \in \alpha \Rightarrow x \in \alpha$ poiché α è transitivo.

$(3) \to (1)$: Sia $\alpha \subsetneq_i \beta$.

α è segmento iniziale $\Rightarrow \alpha = \{x \in \beta \mid x < \gamma\}$ con $\gamma = \min(\beta \setminus \alpha)$ ($\exists \gamma$ sempre se siamo in un buon ordine)

$\Rightarrow \alpha = \{x \in \beta \mid x < \gamma\} = \gamma$ Infatti:
- $x < \gamma \Rightarrow x \in \gamma$. ✓
- $x \in \gamma \in \beta \underset{\substack{\uparrow \\ \beta \text{ è transitivo}}}{\Rightarrow} x \in \beta$ e $x < \gamma$ ✓ $\Rightarrow x \in \{x \in \beta \mid x < \gamma\}$

$\Rightarrow \alpha = \gamma \in \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$ ■

Lemma: α, β ordinali $\Rightarrow \alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$

[Oss: Non stiamo dicendo a meno di isomorfismo come abbiamo dimostrato in generale per i buoni ordini.]

Dim. $\gamma = \alpha \cap \beta \Rightarrow \gamma \in ON$
- Un sottoinsieme di un ben ordinato è ordinato
- Intersezione di due transitivi è transitivo.

$\Rightarrow \gamma \in ON,\ \gamma \subseteq \alpha$ e $\gamma \subseteq \beta$. $\Rightarrow$ Mi basta mostrare che $\gamma = \alpha$ o $\gamma = \beta$.
$\qquad \Downarrow \alpha \subset \beta \qquad \Downarrow \beta \subset \alpha$

Per assurdo $\gamma \subsetneq \alpha$ e $\gamma \subsetneq \beta$. $\Rightarrow \gamma \subsetneq_i \alpha$ e $\gamma \subsetneq_i \beta \to \gamma \in \alpha$ e $\gamma \in \beta$
$\to \gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma \Rightarrow \gamma \in \gamma$ ASSURDO! ■

Lemma: $\alpha, \beta \in ON$. $(\alpha, \in) \simeq (\beta, \in) \Rightarrow \alpha = \beta$

Dim: Se $\alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \subsetneq \beta$ o $\beta \subsetneq \alpha$
$\Rightarrow \alpha \subsetneq_i \beta$ o $\beta \subsetneq_i \alpha$ ASSURDO! (Un buon ordine non può essere isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio)

(e da cui segue l'unicità di scelta di un ordinale per ogni classe di isomorfismo)

Def: $\alpha, \beta \in ON$. Scrivo $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$.
$\to$ Abbiamo ordinato la classe degli ordinali con $<$

$ON = \{\alpha \mid \alpha \text{ è ordinale}\}$ è una classe. $\Rightarrow$ per ora non possiamo asserire ne' escludere che ON sia insieme.

Teorema. ON è transitivo e bene ordinato da $\in$ ($\to$ gode di tutte le proprietà di essere un ordinale eccetto essere un insieme)

Dim. $x \in y \in ON \Rightarrow x \in ON$ (già visto)

Dobbiamo dimostrare che ogni insieme di ordinali ha un minimo. Mostriamo che ogni classe di ordinali ha un minimo.

Sia $p(x)$ una proprietà. Mostriamo che

$$\exists \alpha \text{ ordinale t.c. } p(\alpha) \Rightarrow \qquad \exists \tilde{\alpha} \in ON \left[p(\tilde{\alpha}) \wedge \forall \beta < \alpha \ \neg p(\beta) \right]$$

Sia $\alpha \in ON$ t.c. $p(\alpha)$. Supponiamo che α non sia il minimo ordinale per cui $p(\alpha)$ (se no ho finito): consideriamo

$$\left.\begin{array}{l} \{\beta < \alpha \mid p(\beta)\} \neq \phi \\ \{\beta < \alpha \mid p(\beta)\} \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ minimo } \bar{\beta} = \min\{\beta < \alpha \mid p(\beta)\}$$

($\beta \in \beta\alpha$; α è un buon ordine)

$\Rightarrow \bar{\beta}$ è il minimo cercato nella classe ON

[Se esistesse $\tilde{\beta} < \bar{\beta}$ t.c. $p(\tilde{\beta})$
$\Rightarrow \tilde{\beta} < \bar{\beta} < \alpha \Rightarrow \tilde{\beta} < \alpha$
$\Rightarrow \tilde{\beta} \in \{\beta < \alpha \mid p(\beta)\}$] $\square$

Se ON fosse un insieme, cioè $\exists X$ insieme t.c. $\forall \alpha \ (\alpha \in ON \Leftrightarrow \alpha \in X)$, allora ON sarebbe uno ordinale $\Rightarrow ON \in ON$ ASSURDO!

$\Rightarrow ON$ non è un insieme!

Esercizio 1) $\alpha \in ON \Rightarrow \alpha + 1 =: \alpha \cup \{\alpha\} \in ON$ e $\alpha < \alpha + 1$ (successore: non c'è nulla in mezzo)

2) $X \subseteq ON$ X insieme $\Rightarrow \bigcup X$ è ordinale (e coincide con il sup)

{ Vedremo che tutti gli ordinali sono successori o sup.

Dimostrazione:

(1) • $\alpha \in ON \Rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in ON$.

Transitività: $x \in y \in \alpha \cup \{\alpha\}$.

$y \in \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow y \in \alpha$ o $y = \alpha$. Se $y \in \alpha \Rightarrow x \in y \in \alpha \overset{\alpha \text{ è transitivo}}{\Rightarrow} x \in \alpha \Rightarrow x \in \alpha \cup \{\alpha\}$

Se $y = \alpha \Rightarrow x \in y = \alpha \Rightarrow x \in \alpha \Rightarrow x \in \alpha \cup \{\alpha\}$

Ben ordinato (da $\in$): ovvio! Se aggiungo un p.to ad un insieme bene ordinato rimane bene ordinato.

• $\alpha < \alpha \cup \{\alpha\}$. Ovvio poiché $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$.

• Mostriamo $\alpha \cup \{\alpha\}$ è successore, cioè $\nexists \beta$ t.c. $\alpha < \beta < \alpha \cup \{\alpha\}$

$$\Rightarrow \alpha \subsetneq \beta \subsetneq \alpha \cup \{\alpha\}$$

ma sono due insiemi che differiscono per un punto ASSURDO!

Dimostrazione 2:
$\exists \beta$ t.c. $\alpha \in \beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$
$\Leftrightarrow \beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Allora
• $\beta \in \alpha \Rightarrow \alpha \in \beta \in \alpha \Rightarrow \alpha \in \alpha$ ASSURDO!
• $\beta = \alpha \Rightarrow \alpha \in \beta = \alpha \Rightarrow \alpha \in \alpha$ ASSURDO!

Oss: Unione di un classe di ordinali in generale non è ordinale.
(prendo l'unione di tutti gli ordinali!)

(2) Sia $X \subset ON$ X insieme $\Rightarrow \bigcup X \in ON$.

Transitività: $u \in v \in \bigcup X$.

$\Rightarrow \exists\, w \in X$ t.c. $u \in v \in w \in X \subset ON \Rightarrow w \in ON \Rightarrow v \in ON \Rightarrow u \in ON$

$u \in v \in w \in ON \underset{\substack{\uparrow \\ w \text{ è transitivo}}}{\Rightarrow} u \in w \in X \Rightarrow u \in \bigcup X$

ben ordinato da $\in$: Unione di una famiglia di ben ordine a due a due uno segmento iniziale dell'altro è ben ordinato dalla unione della relazione d'ordine, che nel nostro caso è sempre l'appartenenza.
E tutti gli elementi della famiglia sono segmenti iniziali dell'unione. (Verificare!)

Dimostrazione:
Sia $A \subseteq \bigcup X$, $A \neq \phi$.
$\exists\, a \in A$. Suppongo che a non sia il minimo di $\bigcup X$.
Considero
$\Gamma = \{x \in a \mid x \in \bigcup X\} \subseteq a$
$\Gamma \neq \phi \Rightarrow \exists\, \gamma = \min \Gamma$
$\Rightarrow \gamma = \min A$ $\square$

Vediamo che $\boxed{\bigcup X = \sup X}$

1) $\bigcup X$ è maggiorante. $\forall a \in X$, $a \leq \bigcup X$ ($a \in \bigcup X$ o $a = \bigcup X$)?

$a \in X \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow}}{\overset{ON}{\overset{\cup}{a}}} \subseteq \overset{ON}{\overset{\cup}{\bigcup X}} \Rightarrow a \in \bigcup X$ o $a = \bigcup X$

per le proprietà dell'unione (se a è un elemento della famiglia di cui faccio l'unione è contenuto nell'unione)

$\boxed{X \in \mathcal{F} \Rightarrow X \subseteq \bigcup \mathcal{F}}$

2) $\bigcup X$ è il minimo dei maggioranti:

Sia $\underset{ON}{\overset{}{b}}$ ($b \in ON$) che maggiora $X \Rightarrow b \geq u \ \forall u \in X \Rightarrow b \geq \bigcup X \Rightarrow \bigcup X \leq b$

$a \in \bigcup X \Rightarrow \exists\, u \in X$ t.c. $a \in u \in X$
$\underset{b \geq u}{\Rightarrow} a \in u \in b \underset{b \in ON}{\Rightarrow} a \in b \Rightarrow \bigcup X \subseteq b$
$\Rightarrow \bigcup X \leq b$

Esercizio: $\omega = \{0, 1, \dots\}$. Definire ω. (Senza ....)
[naturali = ordinali finiti.]
$\omega = \{x \mid p(x)\}$

- 1° soluzione: $p(x) \equiv \forall y \leq x$ (y non è limite) $\wedge\ x \in ON$.

Esercizio: ω è il minimo ordinale limite. (dimostrare)

- 2° soluzione (senza parlare di ordinali)

Def: Y insieme. Y è induttivo se
- $0 \in Y$
- $\forall u (u \in Y \rightarrow u \cup \{u\} \in Y)$ (u è un qualsiasi elemento dell'universo)

Definiamo $\omega = \bigcap^{*} \{Y \mid Y \text{ induttivo}\}$. Quindi

$x \in \omega \Leftrightarrow \forall Y$ (Y induttivo $\rightarrow x \in Y$)

* l'intersezione esiste se la famiglia è non vuota: ma un insieme induttivo esiste per l'assioma dell'infinito.

Esercizio: Dimostrare l'equivalenza delle due definizioni

Sia $(\omega, S, 0)$ la II° definizione $\Rightarrow \omega$ verifica l'assioma di induzione:

$Y \subset \omega$ $\underbrace{\text{contiene } 0 \text{ ed è chiuso per successore}}_{\Downarrow} \rightarrow Y = \omega$

Y è induttivo

ω è il più piccolo degli induttivi.

- 3° soluzione: dare una definizione di "x è un numero naturale" che funziona anche senza l'assioma dell'infinito.

Vogliamo definire $P(x) =$ x è un numero naturale.
La soluzione 2 non ci va bene perché non ci sono insiemi induttivi (se mettiamo l'assioma che non esistono insiemi infiniti) → però la prima soluzione ci va bene.

Oss: Assioma infinito $\Leftrightarrow$ esistono ordinali limite.

Idea. Parto da x e faccio predecessore, prima o poi arrivo a zero.

Voglio fare una definizione che vada bene anche senza l'assioma dell'infinito

Diciamo che Y è chiuso per predecessore $\Leftrightarrow$ $\forall a \in Y (\exists b \in Y$ t.c. $b \cup \{b\} = a \ \vee \ a = 0)$

$P(x) =$ "$\forall Y$ t.c. $x \in Y$ e chiuso per predecessore $\rightarrow 0 \in Y$"

→ Non menziona assioma infinito e ordinali

Esercizio. Dimostrare l'equivalenza delle 3 definizioni, cioè l'equivalenza delle proprietà che definiscono i naturali:
(assumendo tutti gli assiomi ZF)

1. $x \in ON \ \wedge \ \forall y \leq x$ y non è limite.
2. $\forall Y$ induttivo, $x \in Y$
3. $\forall Y$ chiuso per predecessore $(x \in Y \rightarrow 0 \in Y)$

OPERAZIONI TRA ORDINALI

Def:
$\alpha + 0 = \alpha$
$\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$ — induttivamente è già definito.
$\alpha + \lambda = \sup_{\beta < \lambda} (\alpha + \beta)$ se λ è limite.

← Dobbiamo giustificare le definizioni per induzioni sugli insiemi bene ordinati e le classi bene ordinate (per ora la abbiamo fatto solo su $\mathbb{N}$)

Not. $\beta + 1 = S(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$

Def: $\alpha \cdot 0 = 0$
$\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
$\alpha \cdot \lambda = \sup_{\beta < \lambda} (\alpha \cdot \beta)$

Def: $\alpha^0 = 1$
$\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$
$\alpha^\lambda = \sup_{\beta < \lambda} \alpha^\beta$

Facciamo qualche calcolo:

- $1 + \omega = \sup_{x < \omega} (1 + x) = \omega$
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} \neq \omega$
- $\omega + \omega = \sup_{n < \omega} (\omega + n)$

Esercizio: $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$

Dato $(A, <_A)$ buon ordine. $\exists!$ Sia $(\alpha, \in)$ t.c. $(\alpha, \in) \simeq (A, <_A)$. $\Rightarrow$ $ot(A, <_A) = (\alpha, \in)$

Vedremo che le definizioni di operazioni coincidono (mostrare x es.)

BERARDUCCI 18-04

Teorema 1. Per ogni buon ordine $(A, <)$ esiste uno ed un solo $\alpha \in ON$ t.c.

$$(A, <) \simeq (\alpha, \in)$$

Chiamiamo $\alpha = $ tipo $(A, <)$

Dimostrazione: Se esiste è unico, poiché $\forall \alpha, \alpha'$ ordinali t.c. $(\alpha, \in) \simeq (\alpha', \in) \Rightarrow \alpha = \alpha'$
Rimane da dimostrare l'esistenza.

Per dimostrare l'esistenza di α serve lo schema di rimpiazzamento

Oss: Lo chiamiamo schema poiché sono infiniti assiomi, uno per ogni proprietà

Definiamo la relazione R: $\forall a \in A, \forall \alpha \in ON$,

$$a R \alpha \overset{def}{\iff} \left(A_{<a} = \{x \in A \mid x < a\}, <\right) \simeq (\alpha, \in)$$

ordine ristretto

Osserviamo che

$$a R \alpha, \ a R \alpha' \Rightarrow \alpha = \alpha' \quad \text{(due ordinali isomorfi sono uguali)}$$

Sia $dom(R) = \{a \in A \mid \exists \alpha \in ON \text{ t.c. } a R \alpha\}$

$Im(R) = \{\alpha \in ON \mid \exists a \in A \text{ t.c. } a R \alpha\}$

$\Rightarrow R$ è una funzione-classe poiché $R = \{\langle a, \alpha\rangle \mid a R \alpha\}$ non sappiamo ancora se sia un insieme

$dom(R) \subset A \Rightarrow dom(R)$ è un insieme

$\Rightarrow R$ è una funzione $\overset{*}{\Rightarrow} Im(R)$ è un insieme (a priori non lo posso dire)

assioma di rimpiazzamento (una funz. classe il cui dominio è un insieme è un insieme)

(*) lemma (dimostrato) R funzione $\Rightarrow Im R$ è un insieme

Dim $\langle a, \alpha\rangle = \{\{a\}, \{a, \alpha\}\} \in R$

$\Rightarrow \alpha \in \{a, \alpha\} \in \langle a, \alpha\rangle \in R \Rightarrow \{a, \alpha\} \in \bigcup R$ e $\alpha \in \bigcup\bigcup R$

$\Rightarrow Im R = \{\alpha \mid \alpha \in \bigcup\bigcup R\}$ ∎

Quindi R è una funzione $R: dom R \longrightarrow Im R$

Dico che $dom R = A$, $Im R$ è ordinale e R è un isomorfismo

Prima di dimostrare facciamo un esempio.

Esempio: $A = \{a, b, c\}$ con $a < b < c$, $(A, <)$ è un buon ordine $\Rightarrow (A, <) \simeq (3, \in)$

$a \mapsto 0$
$b \mapsto 1$
$c \mapsto 2$

$A_{<a} \simeq (0, \in)$, $A_{<a} = \emptyset$, $0 = \emptyset$ $\qquad A_{<b} \simeq (1, \in)$, $A_{<b} = \{a\}$ $\Rightarrow b R 1$

$a \mapsto 0$

Terminiamo la dimostrazione

p 1: Osserviamo che se $a_1 < a_2$ e $a_2 R \alpha_2 \rightarrow \exists! \alpha_1 \in \alpha_2$ t.c. $a_1 R \alpha_1$. Infatti

$a_2 R \alpha_2 \Rightarrow \exists f: (A_{<a_2}, <) \rightarrow (\alpha_2, \in)$ isomorfismo

Restringendo f a $A_{<a_1}$, ottengo un isomorfismo su un segmento iniziale poiché

lemma: $f: (A, <_A) \rightarrow (B, <_B)$ isomorfismo di buoni ordini

Sia $A' \subseteq A \Rightarrow f(A') \subseteq B$ (segmenti iniziali)

tramite un isomorfismo di buoni ordini segmenti

Ma i segmenti iniziali di ordinali sono ordinali (*) $\Rightarrow \mathrm{Im}(A_{<a_1})$ è ordinale

p.2 Similmente: $\alpha_1 < \alpha_2$, $\quad a_2 R \alpha_2 \Rightarrow \exists!\, a_1 < a_2$ t.c. $a_1 R \alpha_1$

L'unicità, di entrambe deriva che un buon ordine non può essere isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio.

(*) • sono bene ordinati da $\in$ poiché sottoinsiemi di buoni ordini
• α è segm. iniziale: $a \in b \in \alpha \Rightarrow a \in \alpha$ poiché α è segmento iniziale rispetto a $\in$ $\Rightarrow \alpha$ è transitivo

Quindi:

- $a_1 < a_2 \Rightarrow R(a_1) \in R(a_2) \Rightarrow R$ è crescente.
- $\mathrm{dom}(R) \subseteq A$

Dico che $\mathrm{dom}(R) = A$, cioè $\forall a \in A,\ \exists \alpha \in ON$ t.c. $a R \alpha$.
Procediamo per induzione: per assurdo non sia vero, e sia

$$a = \min \{ x \mid \underbrace{x \in A \setminus \mathrm{dom}(R)}_{\neq \emptyset \text{ per hp ASSURDA}} \}$$

esiste poiché sono in buon ordine

$\Rightarrow A_{<a} \subset \mathrm{dom}(R)$

Oss. $\mathrm{Im}(R)$ è ordinale poiché è un insieme transitivo di ordinali (*)

Lemma. Un insieme transitivo di ordinali è ordinale (l'appartenenza bene ordina tutti gli ordinali)

Mostro che $\mathrm{dom}(R) = A$. Per assurdo sia a il minimo di A che non sta in $\mathrm{dom}(R)$.
Posso restringere R al segmento iniziale $A_{<a}$ $\rightarrow$ l'immagine della restrizione è un segmento iniziale, cioè un ordinale β.

$$R|_{A_{<a}} : A_{<a} \longrightarrow \beta \text{ è isomorfismo} \Rightarrow a R \beta$$

(per le prop. 1 e 2) (*)

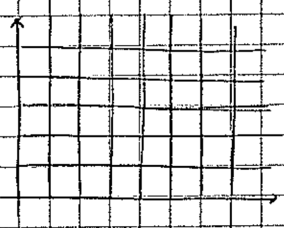
$\Rightarrow a \in \mathrm{dom}(R)$ ASSURDO!

$\Rightarrow \mathrm{dom}(R) = A$

$$\Rightarrow R : \mathrm{dom}(R) = A \xrightarrow{\cong} \underset{\alpha}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}(R)}} \in ON$$

■

Esempio. $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathrm{lex}) \cong (\alpha, \in)$ quale ordinale?



$$\begin{array}{ccccccccc} (0,0) & < & (1,0) & < & (2,0) & \dots & < & (0,1) & < (1,1) \\ \downarrow R & & \downarrow R & & \downarrow R & & & \downarrow & \downarrow \\ 0 & & 1 & & 2 & & & \omega & \omega+1 \end{array}$$

$A_{<(1,0)} = \{(0,0)\} \cong (1, \in)$ $\quad\Rightarrow \boxed{(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathrm{lex}) \cong \omega \cdot \omega}$

$A_{<(2,0)} = \{(0,0), (1,0)\} \cong (2, \in)$

Se per assurdo $(0,1) \notin \mathrm{dom}(R)$

Oss. Senza l'assioma di rimpiazzamento non si riesce a fare questa dimostrazione

Consideriamo

$V_0 = \emptyset$

$V_1 = \mathcal{P} V_0 = \{\emptyset\}$

$V_2 = \mathcal{P} V_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$V_3 = \mathcal{P} V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$

$\vdots$

$V_\omega = \bigcup_n V_n$ (insiemi ereditariamente finiti)

$V_{\omega+1} = \mathcal{P}(V_\omega)$

$V_{\omega+\omega} = \bigcup_n V_{\omega+n}$

Lemma: $\alpha_1 < \alpha_2$. $\exists a_2 \in A$ t.c. $a_2 R \alpha_2 \Rightarrow \exists!\ a_1 < a_2$ t.c. $a_1 R \alpha_1$

Dim: Sia $f : (\alpha_2, \in) \xrightarrow{\simeq} (A_{<a_2}, <)$

$\Rightarrow f|_{\alpha_1} : (\alpha_1, \in) \to (A_{<a_2}, <)$ è isomorfismo tra α_1 e un segmento iniziale di $A_{<a_2}$

Lemma. $A \subsetneq_i X \Rightarrow \exists a \in X$ t.c. $A = \{x \in X \mid x < a\}$

Dim: Basta prendere $a = \min_{<} (X \setminus A)$

$\square$

$\Rightarrow \exists a_1$ t.c. $(\alpha_1, \in) \simeq (A_{<a_1}, <)$

$\square$

(*) $\mathrm{Im}(R)$ è transitivo perché vale la prop 2.

Dalla proposizione (1) segue che R è iniettiva.
Mostro che R preserva l'ordine:

$a_1 < a_2$. $a_1 R \alpha_1$, $a_2 R \alpha_2 \overset{?}{\Rightarrow} \alpha_1 < \alpha_2$

$A_{<a_1} \simeq \alpha_1$ $\qquad A_{<a_2} \simeq \alpha_2$ $\qquad$ Per assurdo $\alpha_2 \leq \alpha_1$

~~$A_{<a_1} \subsetneq_i A_{<a_2} \Rightarrow g \circ f^{-1} : \alpha_1 \to \alpha_2$~~ Si ha che $A_{<a_1} \subsetneq_i A_{<a_2}$

$\Rightarrow \alpha_2 \subsetneq_i \alpha_1 \simeq A_{<a_1}$, $\quad \alpha_2 \simeq A_{<a_2} \supsetneq_i A_{<a_1}$ $\Rightarrow$ $A_{<a_1}$ è un segmento iniziale proprio di $A_{<a_1}$ (cioè $A_{<a_1}$ è isomorfo ad un suo segmento iniziale proprio) ASSURDO!

Esercizio: $\omega \subset V_\omega \Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \in V_{\omega+\omega}$

Dim: Siano $n, m \in \omega$. $\Rightarrow n, m \in V_\omega$

$\Rightarrow \{n\}, \{n,m\} \in \mathcal{P}(V_\omega) = V_{\omega+1}$

$\Rightarrow \{\{n\}, \{n,m\}\} \in \mathcal{P}(V_{\omega+1}) = V_{\omega+2}$

$\Rightarrow \forall n, m \in \omega \quad , \langle n,m\rangle \in V_{\omega+2}.$

$\Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{\langle n,m\rangle \mid n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}\} \subseteq V_{\omega+2} \Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \in \mathcal{P}(V_{\omega+2}) = V_{\omega+3}$

$\Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \in V_{\omega+\omega} = \bigcup_{n<\omega} V_{\omega+n}$ ∎

Lemma: $\tilde{h} = \bigcup\{h_b \mid bRa\}$ è buona.

Dim: Innanzitutto, $\tilde{h}$ è ben definita poiché è unione di funzioni buone, le quali coincidono sull'intersezione dei domini.

- $dom(\tilde{h}) = \bigcup\{dom(h_b) \mid bRa\} \subseteq A$ poiché $dom(h_b) \subseteq A \ \forall b$.

- xRy. $y \in dom(\tilde{h}) \Rightarrow \exists b$ t.c. $y \in dom(h_b)$. $\Rightarrow xRy \wedge y \in dom(h_b)$

  $\Rightarrow x \in dom(h_b) \Rightarrow x \in dom(\tilde{h})$.

  Sia $x \in dom(\tilde{h}) \Rightarrow \exists b$ t.c. $x \in dom(h_b)$.

  $\Rightarrow \tilde{h}(x) = h_b(x) = H(x, h_b|_{\{y \mid yRx\}}) = H(x, \tilde{h}|_{\{y\mid yRx\}})$ ∎

Tutti gli oggetti studiati dalla matematica sono in $V_{\omega+\omega}$, dove sono verificati tutti gli assiomi eccetto l'assioma di rimpiazz. Per esempio vale l'assioma delle parti.

Def. X insieme $\iff X \in V_{\omega+\omega}$

Sia X insieme $\to \exists\, n$ t.c. $X \in V_{\omega+n} \Rightarrow \mathcal{P}X \in V_{\omega+n+1} \Rightarrow \mathcal{P}X$ è un insieme.

← ⊛ Esercizio (da esame): $\mathbb{N} = \omega \subset V_\omega \Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} \in V_{\omega+\omega}$

Abbiamo dim.

$$(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \ell_{ex}) \cong \omega\cdot\omega$$

$$\underset{V_{\omega+\omega}}{\cap} \qquad \underset{V_{\omega+\omega}}{\not\in}$$

⇒ non vale il teorema (1) poiché è saltato l'assioma di rimpiazz. ⊛

⊛ $\omega+n \in V_{\omega+\omega}\ \forall n\in\omega$ ma $\{\omega+n \mid n\in\omega\} \notin V_{\omega+\omega}$

Tutta la matematica si può fare in $V_{\omega+\omega}$ eccetto teo 1.

Teorema di Ricursione

Lo abbiamo già dimostrato sui naturali.

Sia R una relazione ben fondata su A (non esistono succ. decrescenti infinite) $\nexists (a_n \mid n\in\mathbb{N})\ a_{n+1} R a_n$

Sia H una funzione classe $H: A\times V \to V$ cioè

$$H = \{\langle a,b,c\rangle \mid P(a,b,c)\} \quad \text{ed} \quad \forall a\in A\ \forall b\ \exists! c \text{ t.c. } P(a,b,c)$$

Teorema (di ricursione): $\exists!\, f$ funzione t.c. $\mathrm{dom}(f) = A$ e

$$\forall a\in A \quad \boxed{f(a) = H\left(a, f|_{\{b \mid bRa\}}\right)}$$

OSS Se H è una funzione allora per dimostrare questo teorema non serve il rimpiazzamento.

Dimostrazione:

idee preliminari alla dimostrazione

Idea. Per assurdo sia a R-minimale tale che fa diverge $fa\uparrow$ (non definita)

$\Rightarrow \forall b\ (bRa \quad fb\downarrow$ (è definita))

Ma ciò è assurdo poiché posso definire

$$f(a) = H\left(a, f\restriction_{\{b \mid bRa\}}\right)$$

Notazione:
$fa\uparrow$ non definita
$fa\downarrow$ è definita

OSS: Il problema che c'era anche sui naturali, è: cosa vuol dire $fa\uparrow$?

Introduciamo un predicato che mi dice che f è definita su a:

Def Data una funzione g, dico che g è buona se

1. $\mathrm{dom}\, g \subset A$
2. $xRy \wedge y \in \mathrm{dom}(R) \Rightarrow x \in \mathrm{dom}(g)$
3. $\forall a \in \mathrm{dom}(g) \quad g(a) = H\left(a, g|_{\{b \mid bRa\}}\right)$

Esempio: la funzione vuota è buona.

Dim ...

Esempi: · $A = \mathbb{N}$, $R = <_{\mathbb{N}}$

· $A = \mathbb{N}$, $aRb \iff b = S(a)$ → non è un buon ordine, ma è ben fondato

↳ scegliendo questa, ottengo la ricorsione sui naturali.

Una funzione buona è:

Sia a_0 un R-minimale di (A,R)

$g(a_0) = H(a_0, g|_{\phi}) = H(a_0, \phi)$

$\Rightarrow g = \{\langle a_0, H(a_0, \phi)\rangle\}$ è buona.

→ Possiamo definire funzioni buone definite su tutti gli elementi R-minimali

Dai minimali posso risalire: una funzione buona è una funzione definita su un pezzo iniziale del mio dominio.

Pensiamo a (A,R) un buon ordine: quindi g è buona se è definita su un segmento iniz.

Dimostrazione: Dimostriamo che esiste una g buona con dominio A.

· Lemma: Siano g, h buone $\Rightarrow$ $\boxed{g = h \text{ su } dom(g) \cap dom(h)}$

Dim. Sia $a \in A$ R-minimale t.c. $g\,a \neq h\,a$.

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= H\left(a, g|_{\{b \mid bRa\}}\right) \\ &\quad\quad\quad\ \| \\ h(a) &= H\left(a, h|_{\{b \mid bRa\}}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow g(a) = h(a) \quad \text{assurdo!} \ \blacksquare$$

· $\boxed{\forall a \in A,\ \exists\, g \text{ buona con } dom(g) \ni a}$

Dim: Per assurdo, sia a R-minimale per cui $\nexists\, g$ buona t.c. $a \in dom(g)$.

$\Rightarrow \forall b\ (bRa \rightarrow \exists\, h$ buona con $b \in dom(h))$

Tra queste h ce ne è una sola con dominio più piccolo possibile (l'intersezione di tutte)

La chiamo h_b → $b \mapsto h_b$ ho questa funzione

Oss $dom\, h_b$ = chiusura transitiva di R.

Se R è un buon ordine, $dom(h_b) = \{x \mid x < b\}$

Per l'assioma di rimpiazzamento,

$\{h_b \mid bRa\}$ è un insieme ← non servirebbe se sapessimo che $\mathcal{G}$ un H è un insieme.

⊛ $fx = y \iff \exists\, g$ buona con $x \in dom\, g$, $y = g(x)$

$\Rightarrow \tilde{h} = \bigcup \{h_b \mid bRa\}$

⊛ Lemma: Unione di funzioni buone è buona (verificare!)

$\Rightarrow \tilde{h}$ è buona e $dom\, \tilde{h} \supset \{b \mid bRa\}$

ma $a \notin dom(\tilde{h})$ (per ipotesi assurdo)

Riesco a definirlo anche su a, estendendo $\tilde{h}$ ad una nuova funzione h^*

$h^*(x) = h(x)$ per $x < a$

$h^*(a) = H\Big(a, \underbrace{h^*|_{\{b \mid bRa\}}}_{\tilde{h}}\Big)$ ⇒ h^* è buona (verificare!) è estensione nel modo giusto di una funzione buona

$\Rightarrow a \in dom(h^*)$ ASSURDO! $a \in A$