Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi:

Di Nasso. 20-04

1) $\mathcal{F}_1 = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(n) \neq n \ \forall n \}$
2) $\mathcal{F}_2 = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ è bigezione$\}$
3) $\mathcal{F}_3 = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ è illimitata$\}$
4) $\mathcal{F}_4 = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ è limitata$\}$
5) $\mathcal{F}_5 = \{ f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f$ è def. costante$\}$
6) $\mathcal{F}_6 = [\mathbb{R}]^{\leq \aleph_0} = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| \leq \aleph_0 \}$
7) $\mathcal{F}_7 = [\mathbb{R}]^{\aleph_0} = \{ A \subseteq \mathbb{R} \mid |A| = \aleph_0 \}$
8) $\mathcal{F}_8 = \{ \sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sigma$ è convergente$\}$

Oss: $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_5 \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \underset{|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = c}{|\mathcal{F}_i|} \leq c \quad \forall\, i = 1, \dots, 5$

1) Troviamo una funzione iniettiva da un insieme di card. c in tale insieme:

$$\varphi: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{F}_1$$
$$A \longmapsto f_A \qquad f_A(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \notin A \\ n+2 & \text{se } n \in A \end{cases} \Rightarrow f_A = id + \chi_A + 1$$

- $f_A \in \mathcal{F}_1$ ovvio
- $A \neq B \Rightarrow \exists n$ t.c. $n \in A$ ma $n \notin B \Rightarrow f_A(n) = n+1$ e $f_B(n) = n+2 \Rightarrow f_A \neq f_B$

$\Rightarrow |\mathcal{F}_1| \leq c \underset{\text{Oss. Cantor-Bernstein}}{\Rightarrow} |\mathcal{F}_1| = c$ ∎

2) Facciamo una cosa analoga a 1

$$\varphi: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{F}_2 \qquad A = \{a_1 < \dots < a_n < \dots\}$$
$$A \longmapsto f_A$$

Oss. $[\mathbb{N}]^{\aleph_0} = \{ A \subseteq \mathbb{N} \mid A$ è infinito$\}$ ha cardinalità c

$\Rightarrow$ Posso costruire $\varphi: [\mathbb{N}]^{\aleph_0} \longrightarrow \mathcal{F}_2 \qquad A = \{a_1 < \dots a_n < \dots\}$

$$A \longmapsto \sigma_A \qquad \sigma_A(k) = \begin{cases} a_{2n} & \text{se } k = a_{2n-1} \\ a_{2n-1} & \text{se } k = a_{2n} \\ k & \text{se } k \notin A \end{cases}$$

- σ_A è bigezione poiché lo è fuori di A e lo è in A

$a_1 \rightleftarrows a_2 \qquad a_3 \rightleftarrows a_4$

- $A \neq B \Rightarrow \exists k$ t.c. $k \in A$ ma $k \notin B$

$\Rightarrow \sigma_A(k) \neq k$ ma $\sigma_B(k) = k \Rightarrow \sigma_A \neq \sigma_B$ ∎

3) $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_3 \Rightarrow |\mathcal{F}_3| = c \quad (c = |\mathcal{F}_2| \leq |\mathcal{F}_3| \leq c)$

4) $\varphi: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{F}_4$
$$A \longmapsto \chi_A \qquad \chi_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in A \\ 0 & \text{se } n \notin A \end{cases}$$

$\Rightarrow |\mathcal{F}_4| = c$

5) Mostriamo che $|\mathcal{F}_5| = \aleph_0$: ~~devo~~ costruisco una funzione iniettiva dentro un insieme di cardinalità numerabile.

$\aleph_0 \leq |\mathcal{F}_5|$ tramite $\varphi: \mathbb{N} \to \mathcal{F}_5$
$$n \longmapsto f_n \qquad f_n(k) = n \ \forall k$$

$\Psi : \mathcal{F}_5 \longrightarrow Seq(\mathbb{N})$

$f \longmapsto \langle f(1), \dots, f(K) \rangle$

$f \in \mathcal{F}_5 \Rightarrow$ Considero il minimo K t.c. $f(n) = f(K)$ $\forall n \geq K$.

Ψ è iniettiva (1-1).

$\Rightarrow \aleph_0 \leq |\mathcal{F}_5| \leq |Seq(\mathbb{N})| = \aleph_0 \quad \Rightarrow |\mathcal{F}_5| = \aleph_0$

7, 6) $\mathcal{F}_7 \subseteq \mathcal{F}_6$

$c \leq |\mathcal{F}_7| \quad \rightarrow \quad \Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_7$ $\quad \rightarrow \Psi$ è iniettiva

$r \longmapsto \{r+1, r+2, \dots\}$

Dimostro che $|\mathcal{F}_6| \leq c$. Troviamo una funzione suriettiva da un insieme di card c in $\mathcal{F}_6$

$\varphi : A \rightarrow \mathcal{F}_6 \qquad |A| = c$

Scelgo $A = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{F}_6$ $\qquad \Rightarrow \varphi$ è suriettiva.

$\sigma \longmapsto \mathrm{Im}\,\sigma = \{\sigma(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow \quad c \leq |\mathcal{F}_7| \leq |\mathcal{F}_6| \leq c \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{F}_7| = |\mathcal{F}_6| = c.$

8) $|\mathcal{F}_8| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = c.$

$c \leq |\mathcal{F}_8| \rightarrow$ Le successioni cost. sono convergenti.

Esercizio 3 15/9 2010

$\mathcal{A} = \{$aperti di $\mathbb{R}^n\}$ Calcoliamo $|\mathcal{A}|$.

Teo: Le palle di centro razionale $q \in \mathbb{Q}^n$ e raggio razionale sono una base di aperti di $\mathbb{R}^n$.

Sia $\boxed{\begin{array}{l} \Psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+) \\ A \longmapsto \{(q,p) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+ \mid B(q,p) \subseteq A\} \end{array}}$

Devo mostrare che

$$A \neq B \Rightarrow \Psi(A) \neq \Psi(B)$$

Sia $a \in A \setminus B$. Sia $q \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}$ t.c. $a \in B(q,r) \subseteq A$.

$\Rightarrow B(q,r) \nsubseteq B$ poichè $a \notin B$. $\Rightarrow (q,r) \in \Psi(A)$ ma $(q,r) \notin \Psi(B) \Rightarrow \Psi(A) \neq \Psi(B)$

$\Rightarrow \Psi$ è iniettiva $\Rightarrow |\mathcal{A}| \leq |\mathcal{P}(\underbrace{\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+}_{\text{numerabile}})| = c$

$c \leq |\mathcal{A}|$ ovvio: considero: $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}$ iniettiva

$x \longmapsto B(0,x)$

$\Rightarrow \boxed{|\mathcal{A}| = c}$

$\Rightarrow$ Passando al complementare, $\boxed{|\mathcal{C}| = c}$ con $\mathcal{C} = \{$chiusi$\}$

Esercizio $\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f$ non è decrescente$\} = \mathcal{F} \Rightarrow |\mathcal{F}| = c$

① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è non decrescente $\Rightarrow D(f) = \{x \mid f$ non è continua in $x\}$ è al più numerabile

x per ogni p.to di discontinuità, posso prendere un razionale q_i

$\longrightarrow$ Una famiglia $\mathcal{G}$ di intervalli aperti a due a due disgiunti è al più numerabile (prendo un razionale in ciascun intervallo ed ottengo una funzione da $\mathcal{G}$ in $\mathbb{Q}$ iniettiva

$\Longrightarrow |\mathcal{G}| \leq |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

Esercizio $\boxed{\text{Se } A \text{ è numerabile} \Rightarrow \mathbb{R}\setminus A \text{ è separabile}}$ (ha un sottoinsieme denso numerabile)

Se vale questa proprietà $|\mathcal{F}| \leq c$

Per ogni $A \in [\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}$, $\mathcal{C}_A = \{f:\mathbb{R}\setminus A \to \mathbb{R} \mid f$ continua$\}$ ha card. c.

Si dimostra come l'altra volta utilizzando l'esercizio

$$\boxed{\begin{aligned} \psi: \mathcal{F} &\longrightarrow \bigcup_{A\in[\mathbb{R}]^{\aleph_0}} \mathcal{C}_A \times \mathbb{R}^A \\ f &\longmapsto (f_{|\mathbb{R}\setminus A}\,;\, f_{|A}) \quad \text{con } A = D(f) \end{aligned}}$$

Bisogna di

$|\mathcal{C}_A| = c \qquad |\mathbb{R}^A| = c. \Rightarrow |\mathcal{C}_A \times \mathbb{R}^A| = c \Rightarrow c\cdot c = c \Rightarrow \left|\bigcup \mathcal{C}_A \times \mathbb{R}^A\right| = c.$

ne prendo c $\quad \left|[\mathbb{R}]^{\leq\aleph_0}\right| = c$

è evidente che ψ è iniettiva

D. Nasso
02-05

Principio dei cassetti

Se abbiamo m oggetti da distribuire in n posti e $m > n \Rightarrow$ esiste un posto dove vanno almeno due oggetti.

Riformuliamolo in termini di funzioni.

$$\psi : \underbrace{\{0, \dots, m-1\}}_{\text{oggetti}} \longrightarrow \underbrace{\{0, \dots, n-1\}}_{\text{posti}}$$

(distribuire gli oggetti equivale a scrivere una funzione ψ)

Il principio è equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \psi : \{0, \dots, m-1\} \longrightarrow \{0, \dots, n-1\} \\ n < m \end{array}\right\} \Rightarrow \psi \text{ non è iniettiva.}$$

cioè:

$$m > n \Rightarrow \nexists\ f : m \to n \text{ iniettiva}$$

Notazione: $m = \{0, \dots, m-1\}$
$n = \{0, \dots, n-1\}$

Dim: Procediamo per assurdo (contronominale: $P \Rightarrow Q \iff \neg Q \Rightarrow \neg P$)

Sia $f : m \to n$ iniettiva. Mostriamo che allora $m \leq n$.

Procediamo per induzione su n.

$n = 0$:
Non ci sono funzioni da $m \to \phi$ eccetto la funzione ϕ
$\Rightarrow$ Per $m = 0$ è banalmente vero.

$n = 1$. $\psi : m \to 1$
Se fosse $m \geq 1 \Rightarrow$ In m ho 2 elementi, i quali devono avere la stessa immagine poiché $1 = \{\phi\}$ è un singoletto.

$n = k+1$: Sia $\psi : m \to k+1 = k \cup \{k\} = \{0, \dots, k-1, k\}$ è iniettiva $(1-1)$

Caso 1: $k \notin \operatorname{Im} \psi \Rightarrow \psi : m \longrightarrow k$ iniettiva
Per hp. induttiva, $m \leq k \Rightarrow m < k+1$ ✓

Caso 2: $k \in \operatorname{Im} \psi$. Sia $\psi(i) = k$ $\quad (\exists!\ i \in m \text{ t.c. } \psi(i) = k)$

Sia $\varphi = \psi_{|\{0, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}} \Rightarrow \varphi : \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, m\} \to \{0, \dots, k-1\}$

$\Rightarrow \varphi$ è iniettiva. Sia $\Gamma : \{0, \dots, m-2\} \longrightarrow \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, m-1\}$
$0 \longmapsto 0$

$$\Gamma(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < i \\ x+1 & \text{se } x \geq i \end{cases}$$

$\Rightarrow \Gamma \circ \varphi : \{0, \dots, m-2\} \longrightarrow \{0, \dots, k-1\}$ iniettiva

$\Rightarrow m - 1 \leq k \Rightarrow m \leq k+1 = n$ ✓

∎

> $f : A \to B$ significa
> 1) f è funzione
> 2) $\operatorname{dom}(f) = A$
> 3) $\operatorname{im}(f) \subseteq B$

Esercizio: Dimostrare che un sottoinsieme di un insieme finito è finito.

— . — . — . — . — . — — . —

ORDINALI

Proprietà dei buoni ordini. Sia A un buon ordine.

1) $\varphi: A \to A$ che preserva l'ordine, allora $\varphi(a) \geq a \quad \forall a \in A$.

2) $\forall a \in A$, $\quad A \not\simeq A_a = \{a' \in A \mid a' \leq a\}$ (un insieme ben ordinato non è isomorfo ad un suo segmento iniziale)
In generale non vale: dimostrare che $\mathbb{R} \simeq (-\infty, 0)$

3) $a \neq a' \Rightarrow A_a \not\simeq A_{a'}$

4) $\varphi: A \to A$ isomorfismo $\Rightarrow \varphi = id_A$

5) $\varphi: A \to B$ isomorfismo. Se esiste, è unico.

6) TRICOTOMIA: $\forall A, B$ buoni ordini, abbiamo la tricotomia:
- $A \simeq B$
- $\exists a \in A,\ A_a \simeq B$
- $\exists b \in B,\ B_b \simeq A$

: α ordinale è un insieme transitivo ($x \in y \in \alpha \Rightarrow x \in \alpha$) e beneordinato da $\in$.

OSS: $a \in \alpha \Rightarrow \alpha_a = \{x \mid x \in a\} = a \quad \to$ i segmenti iniziali coincidono con a.

OSS: la transitività serve per concludere $a = \alpha_a$. ($\supseteq$: serve transitività!)
$A = \{0, 2, 4, 6\} \Rightarrow A_4 = \{0, 2\} \subsetneq 4$ ma $A_4 \neq 4$

Proprietà degli ordinali:

) $\alpha \simeq \beta \Rightarrow \alpha = \beta$

) A è ben ordinato $\Rightarrow \exists\, \alpha$ ordinale t.c. $A \simeq \alpha$ $\Big\} \Rightarrow$ **Teorema di rappresentazione**: ogni insieme ben ordinato è isomorfo ad un unico ordinale.

) $\alpha \notin \alpha$ ($\leftarrow$ l'assioma di fondazione vieta che esistano insiemi per cui $V \in V$ $\rightsquigarrow$ insiemi ben fondati!)
OSS: α ordinale $\Rightarrow \alpha \notin \alpha$ e non richiede l'assioma di fondazione.

$\underset{\alpha \text{ ordinale}}{\beta \in \alpha} \Rightarrow \beta$ è ordinale.

α ordinale $\Rightarrow S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ è ordinale ed è il successore immediato di α cioè:

1) $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$

2) $\nexists\, \beta$ t.c. $\alpha \in \beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$.

Dim: $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow \beta = \alpha$ o $\beta \in \alpha$
- $\beta = \alpha \Rightarrow \alpha \in \alpha$ ASSURDO!
- $\beta \in \alpha \Rightarrow \alpha \in \beta \in \alpha \Rightarrow \alpha \in \alpha$ ASSURDO!

X è insieme di ordinali. Allora:

X è ordinale $\iff X$ è transitivo.

(dimostrare per esercizio) $\leftarrow$ Segue immediatamente dal fatto che ON è bene ordinato da $\in$

Paradosso di Burali-Forti: Non esiste l'insieme di tutti gli ordinali.

Altrimenti $ON = \{\alpha \mid \alpha \text{ è ordinale}\}$ fosse un insieme sarebbe un ordinale per cui $ON \in ON$
ASSURDO!

Esercizio α ordinale. $A \subseteq \alpha$ sottoinsieme ($\Rightarrow$ A è bene ordinato).

[Oss. Un sottoinsieme di un insieme bene ordinato è beneordinato]

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $A \simeq \beta \lneq \alpha$. Dimostrare che.

$A \subseteq \alpha$, α ordinale $\Rightarrow$ $A \simeq \beta \leq \alpha$ (e può anche essere $=$: $\{pari\} \subseteq \omega$ ma $\{pari\} \simeq \omega$)

Non vale $A \subsetneq \alpha \Rightarrow A \simeq \beta < \alpha$.

Corollario. C bene ordinato, $C' \subseteq C$ $\Rightarrow ot(C') \leq ot(C)$

Notazione: $ot(C) = \gamma$ = l'unico ordinale a lui isomorfo.

Dimostrazione: Con gli ordinali posso procedere per induzione transfinita.

- $\alpha = 0$: $A \subseteq \alpha \Rightarrow A = \phi \Rightarrow ot(A) = 0 \leq \alpha$ ✓
- $\alpha = \gamma+1$: $A \subseteq \gamma+1 = \{0, \dots, \gamma\} = \gamma \cup \{\gamma\}$ = {ordinali $\leq \gamma$}

Caso 1. $\gamma \in A$. $A' = A \setminus \{\gamma\}$. $\Rightarrow A' \subseteq \gamma \underset{\text{hp induttiva}}{\Rightarrow} A' \cong \beta \leq \gamma \Rightarrow A \simeq \beta+1 \leq \gamma+1 \Rightarrow A \leq \gamma+1$

$A \simeq A' \oplus \{\gamma\} \simeq \beta+1$ ($A' \simeq \beta$)

prendiamo il secondo elemento a dx di A'

Caso 2. $\gamma \notin A \Rightarrow A \subseteq \gamma \Rightarrow \exists \beta \leq \gamma$ t.c. $A \simeq \beta \Rightarrow A \cong \beta \leq \gamma+1$ ✓

- α è limite. $\alpha = \lambda$ limite. $A \subseteq \lambda$.

(*) $\forall \gamma < \lambda$, sia $A_\gamma = \{a \in A \mid a < \gamma\}$. Per ipotesi induttiva:

$\forall \gamma$, $\exists \varphi_\gamma : A_\gamma \xrightarrow{\simeq} \beta_\gamma$ con isomorfismo con $\beta_\gamma \leq \lambda$.

Sia $\varphi = \bigcup_{\gamma<\lambda} \varphi_\gamma$ è isomorfismo?

φ è una funzione? è isomorfismo? (sì)

Oss: le funzioni si rincollano con gli ordinali perché gli isomorfismi sono unici

Oss: Con gli insiemi ben ordinati gli isomorfismi si possono rincollare perché sono unici.

$\gamma < \gamma'$ $\varphi_{\gamma}: A_\gamma \to B_\gamma$ $\varphi_{\gamma'}: A_{\gamma'} \to B_{\gamma'}$ $\Rightarrow$ $\varphi_{\gamma'}|_{A_\gamma} = \varphi_\gamma$.

Infatti:

Lemma: $\varphi: A \xrightarrow{\simeq} B$ isom. di b.o. $\Rightarrow$ $\forall a \in A$, $\varphi|_{A_a} : A_a \xrightarrow{\simeq} B_{\varphi(a)}$

Dall'unicità degli isomorfismi, posso concludere che $\varphi_{\gamma'}|_{A_\gamma} = \varphi_\gamma$

(*) Riniziamo. $\forall a \in A$, definisco $A_a = \{a' \in A \mid a' < a\}$

$\Rightarrow \forall a$ $\exists \varphi_a : A_a \xrightarrow{\simeq} \beta_a \leq \gamma$ per hp.

Consideriamo:

$\varphi = \bigcup_{a \in A} \varphi_a \Rightarrow \forall a < a'$, $\varphi_a|_{A_{a'}} : A_{a'} \longrightarrow$ $\Rightarrow \varphi_a|_{A_{a'}} = \varphi_{a'}$

Devo considerare due casi:

- $\tilde{a} = \max(A)$ esiste $\Rightarrow$ $A \subseteq \gamma$ per qualche $\gamma < \lambda$ $\Rightarrow$ Applico l'hp induttiva.
- Infatti $\tilde{a} \in \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma$ $\Rightarrow \exists \gamma < \lambda$ t.c. $\tilde{a} \in \gamma \Rightarrow A \subseteq \gamma$

Oss: $\tilde{a} \in \lambda \Rightarrow \tilde{a}+1 \in \lambda$

Svolgimento 2: Per assurdo $\exists A \subseteq \alpha$ t.c. $A \simeq \beta > \alpha$

Sia $\psi : \beta \overset{\sim}{\to} A \subseteq \alpha \subsetneq \beta \Rightarrow$ ψ preserva l'ordine. $\Rightarrow \psi(\gamma) \geq \gamma \quad \forall \gamma \in \beta$.

$\Rightarrow \psi(\alpha) \geq \alpha$ ma $\operatorname{Im} \psi \subseteq \alpha$ e quindi $\psi(\alpha) \in \alpha$

$\Rightarrow \begin{cases} \psi(\alpha) \geq \alpha \\ \psi(\alpha) \in \alpha \end{cases}$ $\longrightarrow$ ASSURDO! $\quad (\alpha > \psi(\alpha) \geq \alpha)$

Esercizio:

Sia A bene ordinato e infinito.

$$A \simeq \omega \iff \forall X \subseteq A \text{ infinito è senza massimo.}$$

$(\Rightarrow)$: ovvia, poichè ω gode di questa proprietà.

OPERAZIONI sugli ORDINALI.

Somma: $\alpha + \beta$.

$$\begin{cases} \alpha + 0 = \alpha \\ \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \\ \alpha + \lambda = \bigcup_{\gamma < \lambda} (\alpha + \gamma) \quad \lambda \text{ limite} \end{cases}$$

$\leftrightarrow$ teorema di ricorsione è la base teorica su cui si fondano queste definizioni.

$\downarrow$

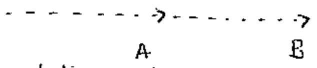
Anche le definizioni per ricorsioni sui naturali hanno bisogno di una giustificazione teorica.

Def: A, B bene ordinati $\Rightarrow A \oplus B$ è la somma

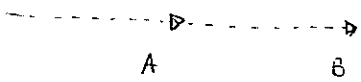
(si fa l'unione disgiunta di A e B)

$$A \oplus B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}) \quad \text{con l'ordine}$$

- $(a, 0) < (b, 1) \quad \forall a, b$
- $(a', 0) < (a, 0) \iff a' < a$
- $(b', 1) < (b, 1) \iff b' < b$



ordine di $A \oplus B$



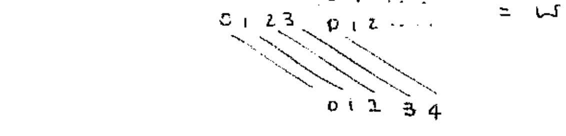
Teorema: $\boxed{\alpha + \beta \simeq \alpha \oplus \beta}$

Oss: α, β ordinali $\not\Rightarrow$ $\alpha \oplus \beta$ ordinali $\rightsquigarrow$ quindi nel teo. non ci può essere $=$.

(*) Dim.

Esempio: $4 + \omega \overset{def}{=} \bigcup_{n \in \omega} 4 + n = \bigcup_{m \in \omega} m = \omega$

$\uparrow$ proprietà di assorbimento



Esempio: $\omega^2 + 4\omega^3 + \omega^4 = \omega^4 \quad \rightarrow$ a sinistra può sparire!

$\omega^4 < \omega^4 + 1 \quad \rightarrow$ aggiungere a dx, cambia!

(*) Dim. Per induzione su β (induzione transfinita → anche la def. è sul I argomento)

- $\beta = 0$: $\alpha + \beta = \alpha \cong \alpha \oplus 0$

- $\beta + 1$: $\alpha + (\beta + 1) \overset{\text{def}}{=} (\alpha + \beta) + 1 \cong (\alpha + \beta) \oplus 1 \underset{\uparrow}{\cong} (\alpha \oplus \beta) \oplus 1 \overset{(*)}{\cong} \alpha \oplus (\beta \oplus 1)$

hp. induttiva: $\alpha + \beta \cong \alpha \oplus \beta$ +

lemma 1: $\boxed{\gamma + 1 = \gamma \oplus \{*\}}$ $\forall *$

lemma: $\boxed{\alpha \cong \beta \Rightarrow \alpha \oplus \gamma \cong \beta \oplus \gamma}$

(*) 2 Somma geometrica è chiaramente associativa.

- $\beta = \lambda$ limite $\Rightarrow \lambda = \bigcup_{\gamma < \lambda} \gamma \Rightarrow \forall \gamma,\ \alpha + \gamma \cong \alpha \oplus \gamma \Rightarrow \forall \gamma\ \exists \psi_\gamma : \alpha + \gamma \to \alpha \oplus \gamma$

$\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}$ $\psi = \bigcup_{\gamma < \lambda} \psi_\gamma$ è isomorfismo (si incollano bene per l'unicità dell'isomorfismo)

per come abbiamo visto prima

Infatti, $\gamma < \gamma' \Rightarrow \psi_{\gamma'}|_{\alpha + \gamma} = \psi_\gamma$

$$\Rightarrow \bigcup_{\gamma < \lambda} \psi_\gamma : \underbrace{\bigcup_{\gamma < \lambda} \alpha + \gamma}_{\substack{\parallel \\ \alpha + \lambda}} \xrightarrow{\ \cong\ } \bigcup_{\gamma < \lambda} \alpha \oplus \gamma \cong \alpha \oplus \bigcup_{\gamma < \lambda} \gamma = \alpha \oplus \lambda$$

Corollario: $\boxed{\oplus \text{ è associativa} \Rightarrow + \text{ è associativa}}$

Esercizio: Dimostrare per induzione che + è associativa.

Esercizio: Dimostrare la stessa proprietà per il prodotto.

Esercizio:

$\boxed{X \text{ insieme di ordinali transitivo } \Rightarrow X \text{ è ordinale}}$

Esercizi proposti a lezione (02-05)

Dim:

Lemma: $\mathbb{O}\mathbb{N}$ è bene ordinato da $\in$.

Dim: Sia $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{O}\mathbb{N}$ t.c. $\forall n.\ \alpha_{n+1} \in \alpha_n$.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ \alpha_2 \in \alpha_1 \in \alpha_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_0 \in \mathbb{O}\mathbb{N} \Rightarrow \alpha_0 \text{ è trans.}}}{\Rightarrow} \alpha_2 \in \alpha_0 \\ \cdot\ \alpha_{n+1} \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hp ind.}}}{\alpha_n} \in \alpha_0 \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha_0 \text{ è trans.}}}{\Rightarrow} \alpha_{n+1} \in \alpha_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n,\ \alpha_n \in \alpha_0.$$

$\Rightarrow$ $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ è una successione decrescente infinita in α_0

Ma $(\alpha_0, \in)$ è un buon ordine ASSURDO!

E' ovvio il fatto che $\in$ è ordine totale

$\Rightarrow$ $\mathbb{O}\mathbb{N}$ è bene ordinato da $\in$ □

Lemma: Un sottoinsieme di un buon ordine è un buon ordine.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow X \text{ è bene ordinato da } \in. \\ X \text{ è transitivo (per hp)} \end{array}\right\} \Rightarrow X \text{ è ordinale} \quad □$$

Esercizio: A bene ordinato e infinito.

$A \simeq \omega \iff \forall X \subseteq A$, X infinito$_*$ $\Rightarrow$ X è senza massimo.

Dim: $(\Rightarrow)$: Per assurdo $\exists a \in A$ t.c. a sia massimo di A.

Sia $f: A \xrightarrow{\simeq} \omega$ isom. Sia $n = f(a)$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Im} f \subseteq \{0, \dots n-1\}$ $\Rightarrow$ $|A| < +\infty$ ASSURDO!

$(\Leftarrow)$: $\exists \beta \in \mathbb{O}\mathbb{N}$ t.c. $A \simeq \beta$.

$|A| = +\infty \Rightarrow \beta \geq \omega$.

Per assurdo sia $\beta > \omega$

Lemma: $A \simeq \beta \geq \omega \Rightarrow \exists B \subset A$ t.c. $B \simeq \omega$

Dim: $f: \beta \xrightarrow{\simeq} A$ isomorfismo.

$\omega \in \beta \Rightarrow f_{|\omega}: \omega \longrightarrow A \Rightarrow f_{|\omega}$ è isomorfismo da ω sull'immagine B di $f_{|\omega}$ che è un sottoinsieme di A □

$\Rightarrow \exists B \subset A$ t.c. $B \simeq \omega$. $\Rightarrow B \neq A$ (perché $A \not\simeq \omega$) $\Rightarrow \exists a \in A \setminus B$.

Considero $B \cup \{a\}$ che ordino nel seguente modo:

1) $\forall b, b' \in B$, $b < b' \iff b <_B b'$

2) $\forall b \in B$, $b < a$

$\Rightarrow$ $B \cup \{a\} \simeq \omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ $\Rightarrow$.

$\Rightarrow$ $a = \max(B \cup \{a\})$ e $B \cup \{a\} \supset B \Rightarrow B \cup \{a\}$ è infinito.

$\alpha \odot \beta$ è così definito: Siano A, B
$A \simeq \alpha$, $B \simeq \beta$
$\Rightarrow \alpha \odot \beta \cong (A \times B, <_{lex})$

Esercizio: dimostrare che $\alpha \cdot \beta = \alpha \odot \beta$.

Dim: Procediamo per induzione transfinita su β.

$\beta = 0 \Rightarrow \beta = \phi \Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0 = \phi = A \times \phi = A \times B$ ✓

$\beta + 1$: $\Rightarrow \alpha \cdot (\beta+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{x definizione}}}{=} (\alpha \cdot \beta) + \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hp. ind.}}}{=} (\alpha \odot \beta) + \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quanto già dim.} \\ \alpha+\beta = \alpha \oplus \beta}}{=} (\alpha \odot \beta) \oplus \alpha \underset{\substack{\uparrow}}{\overset{\cong}{\circledast}} \alpha \odot (\beta \oplus 1) \underset{\substack{\uparrow \\ \beta \oplus 1 = \beta+1}}{=} \alpha \odot (\beta+1)$

$\circledast$ $\boxed{(\alpha \odot \beta) \oplus \alpha \simeq \alpha \odot (\beta+1)}$. Infatti:

$(\alpha \odot \beta) \oplus \alpha \simeq (A \times B \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$

$\alpha \odot (\beta+1) \simeq A \times (B \cup \{*\})$

Sia $\phi : (A \times B \times \{0\}) \cup (A \times \{1\}) \xrightarrow{\simeq} A \times (B \cup \{*\}) \Rightarrow \phi$ è isomorfismo.

$(a, b, 0) \longmapsto (a, b)$

$(a, 1) \longmapsto (a, *)$

$\Rightarrow (\alpha \odot \beta) \oplus \alpha \simeq \alpha \odot (\beta+1)$

$\beta = \lambda$ limite. $\forall \gamma < \lambda$, $\alpha \cdot \gamma = \alpha \odot \gamma$ per hp. ind. $\Rightarrow \forall \gamma, \exists \psi_\gamma : \alpha \cdot \gamma \overset{\simeq}{\to} \alpha \odot \gamma$ isom.

Sia $\psi = \bigcup_{\gamma < \lambda} \psi_\gamma \Rightarrow \psi$ è isom.

$\psi : \bigcup_{\gamma < \lambda} \alpha \cdot \gamma \xrightarrow{\simeq} \bigcup_{\gamma < \lambda} \alpha \odot \gamma \Rightarrow \alpha \cdot \lambda \simeq \alpha \odot \lambda$ ∎

Sottrazione tra ordinali

Di Nasso 04-05

Prop. (*) $\boxed{\forall \alpha < \beta, \ \exists ! \ \xi \ \text{t.c.} \quad \alpha + \xi = \beta}$ (N.B. ξ va sommato a dx)

Attenzione: la prop non vale se si fa la somma a sin. Per esempio.

- $5 < \omega$. Infatti $5 + \omega = \omega$
- $? + 5 = \omega$ non ha soluzione poiché $? + 5$ è un successore e non può essere limite.

Prop: $\boxed{\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma} \to \omega(1+1) = \omega + \omega$

$(\beta + \gamma) \cdot \alpha \neq \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha \to (1+1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega \neq \omega + \omega$

← distributività a dx ma non a sinistra

N.B.: Molte proprietà valgono solo a dx.

(*) Dim.: Sia $\Gamma = \{ \gamma \mid \alpha + \gamma > \beta \}$ (Si prende il $>$ per ottenere che il minimo è successore)

- $\Gamma \neq \phi$ poiché $\gamma = \beta + 1 \in \Gamma$ poiché $\alpha + \beta + 1 \geq \beta + 1 > \beta$.

Oss: Γ è una classe propria ma non un insieme.

Sia $\Gamma = \{ \gamma < \beta + 2 \mid \alpha + \gamma > \beta \}$.

$\Rightarrow \Gamma \neq \phi$ poiché $\beta + 1 \in \Gamma$.

Sia $\gamma = \min \Gamma$. (esiste per le proprietà degli ordinali). | ← N.B. il trucco!

$\Rightarrow \gamma$ è successore. Infatti:

- $\gamma \neq 0$ poiché $\alpha < \beta$.
- $\gamma = \lambda$ limite per assurdo $\Rightarrow \beta < \underbrace{\alpha + \gamma}_{\text{ordinale limite}} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\bigcup_{\delta < \gamma} \alpha + \delta}_{\text{sup che non è max}} \Longrightarrow \exists \, \delta < \gamma \ \text{t.c.} \ \beta < \alpha + \delta$

ASSURDO! $\gamma = \min \Gamma$

> **Proprietà fondamentale**
> λ limite. Sia $\eta < \lambda$.
> $\Rightarrow \exists \theta < \lambda \ \text{t.c.} \ \eta < \theta$.

$\Rightarrow \gamma$ è successore. $\Rightarrow \exists \xi \ \text{t.c.} \ \gamma = \xi + 1$.

$\Rightarrow \alpha + \xi \leq \beta < \alpha + \xi + 1 \implies \alpha + \xi = \beta$

↑ Sta tra un ordinale e il suo successore $\Rightarrow$ coincide con uno dei due.

Unicità: l'unicità segue dalla seguente proprietà.

$\xi < \xi' \underset{(*)}{\Rightarrow} \alpha + \xi < \alpha + \xi' \Rightarrow \beta < \beta$ ASSURDO!

(*) $\boxed{\xi < \xi' \Rightarrow \alpha + \xi < \alpha + \xi'}$

Dim: $\xi < \xi' \Rightarrow \exists \, \eta > 0 \ \text{t.c.} \ \xi' = \xi + \eta$

$\Rightarrow (\alpha + \xi) \underset{\eta > 0}{<} (\alpha + \xi) + \eta =$

$= \alpha + (\xi + \eta) = \alpha + \xi'$ □

Divisione euclidea tra ordinali

Teorema. $\forall \alpha \ \forall \beta \neq 0, \ \exists ! \gamma \ \exists ! \ 0 \leq \rho < \beta$ t.c. $\boxed{\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho}$ (← N.B. le operazioni sono a dx!)

Dim. Sia $\Gamma = \{ \delta \mid \beta \cdot \delta > \alpha \}$ non è vuoto e è una classe propria → ma ha sempre senso prenderne il minimo (per il ragionamento visto prima) $\alpha + 1 \in \Gamma$ poiché $\beta \cdot (\alpha + 1) = \beta \cdot \alpha + \beta > \alpha$

$\delta = \min \Gamma \Rightarrow \delta$ è successore. Infatti:

- $\delta \neq 0$ (ovvio!)
- δ fosse limite per assurdo $\Rightarrow \beta \cdot \delta = \bigcup_{\eta < \delta} \beta \cdot \eta > \alpha \Rightarrow \exists \eta < \delta$ t.c. $\alpha < \beta \cdot \eta$ ASSURDO! (per la minimalità di δ)

$\Rightarrow \delta = \gamma + 1 \Rightarrow \quad \beta \cdot \gamma \leq \alpha < \beta(\gamma+1)$

$\beta \cdot \gamma \leq \alpha \Rightarrow \exists! \ \rho$ t.c. $\beta \cdot \gamma + \rho = \alpha$. $\longrightarrow$ ho trovato β e ρ

Oss: $\rho < \beta$. Se fosse $\rho \geq \beta \Rightarrow \alpha = \beta \cdot \gamma + \rho \geq \beta \cdot \gamma + \beta = \beta(\gamma+1)$ ma $\alpha < \beta(\gamma+1)$ ASSURDO!

Vediamo l'unicità.

Per assurdo, siano $\gamma < \gamma'$ t.c. $\alpha = \beta \cdot \gamma + \rho = \beta \cdot \gamma' + \rho' \geq \beta(\gamma+1) > \alpha$

$\boxed{\gamma < \gamma' \Rightarrow \gamma + 1 \leq \gamma'}$

$\Rightarrow \gamma = \gamma' \Rightarrow \beta\gamma + \rho = \beta\gamma' + \rho' \Rightarrow \rho = \rho'$

la somma a dx fa aumentare le cose (*)

(*) $\boxed{\xi < \xi' \rightarrow \alpha + \xi < \alpha + \xi'}$

Se per assurdo, $\rho \neq \rho'$
$\Rightarrow \beta \gamma + \rho \neq \beta \cdot \gamma + \rho'$

Esercizio: $\omega^2 + \omega \cdot 4 + 3 \ \lfloor \omega + 5 \quad = ?$

$(\omega+5) \cdot 2 = (\omega+5) + (\omega+5) \underset{\substack{\uparrow \\ + \text{ è ass.}}}{=} \omega + \underbrace{(5+\omega)}_{\omega} + 5 = \omega + \omega + 5 = \omega \cdot 2 + 5$

$(\omega+5) \cdot n = \underbrace{\omega + 5 + \ldots + \omega + 5}_{n \text{ volte}} = \omega + \underbrace{(5+\omega) + \ldots + (5+\omega)}_{n-1 \text{ volte}} + 5 = \omega \cdot n + 5.$

$(\omega+5) \cdot \omega = \bigcup_{n<\omega} (\omega+5) \cdot n = \boxed{\bigcup_{n<\omega} \omega \cdot n + 5 = \bigcup_{k<\omega} \omega \cdot k} = \omega \cdot \omega = \omega^2$

- $\omega \cdot k < \omega \cdot k + 5$
- $\omega \cdot n + 5 < \omega \cdot (n+1)$

Lemma: Siano A, B insiemi
$\forall a \in A, \exists b \in B$ t.c. $a < b$
$\forall b \in B, \exists a \in A$ t.c. $b < a$
$\Longrightarrow \sup A = \sup B$.

$(\omega+5)(\omega+1) = (\omega+5) \cdot \omega + \omega + 5 = \omega^2 + \omega + 5$

$(\omega+5)(\omega+4) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distrib.} \\ \text{a dx}}}{=} (\omega+5)\omega + (\omega+5) \cdot 4 = (\omega+5)\omega + \underbrace{\omega+5+\ldots+\omega+5}_{4 \text{ volte}} =$

$= \omega^2 + \omega + (5 + \omega) + (5+\omega) + (5+\omega) + 5 = \omega^2 + \omega \cdot 4 + 5 > \omega^2 + \omega \cdot 4 + 3$

quoziente: $\omega + 3$

resto: $\omega^2 + \omega \cdot 3 + 5 + \xi = (\omega+5)(\omega+3) + \xi = \omega^2 + \omega \cdot 4 + 3$

$\Rightarrow \xi = \omega + 3 < \omega + 5$

Teorema (forma normale di Cantor)

$\forall \alpha > 0 \quad \exists! \ \beta_1 > \dots > \beta_k$ (esponenti) $\quad \exists! \ n_1, \dots, n_k \in \omega \setminus \{0\}$ t.c. $\quad \boxed{\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\beta_k} \cdot n_k}$

Esempio: $\omega^2 + \omega \cdot 4 + 3$ è scritto in forma normale di Cantor

Oss: $\boxed{\exists \text{ ordinali } \gamma \text{ t.c. } \omega^\gamma = \gamma.}$

Esercizio: ε_0 è il minimo di questi ordinali, definito in questo modo:

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = \omega \\ a_{n+1} = \omega^{a_n} \end{cases}} \qquad \text{Sia } \underline{\varepsilon_0 = \bigcup_{n<\omega} a_n}$$

← questi ordinali sono numerabili.

1) $\{a_n\}$ è crescente ($\Rightarrow$ ε_0 è ordinale limite)

2) $\omega^{\varepsilon_0} = \bigcup_{\gamma < \varepsilon_0} \omega^\gamma = \bigcup_{n<\omega} \omega^{a_n} = \bigcup_{n<\omega} a_n = \varepsilon_0$

$\uparrow$ ε_0 è limite

$\{a_n\}$ hanno come sup ε_0 $\Rightarrow$ posso calcolare $\sup_{\gamma<\varepsilon_0} \omega^\gamma$ come $\sup_{n<\omega} \omega^{a_n}$

Prop: Sia $\{a_n\}$ crescente, a_n ordin $\Rightarrow \bigcup_{n<\omega} a_n$ è limite.

Prop: A, B insiemi. $\alpha = \sup A = \sup B$. $\Rightarrow \sup_{a\in A} \alpha^a = \sup_{b\in B} \alpha^b$

Dimostrazione

Passo 1: Sia $\tilde{\gamma} = \min\{\gamma \mid \omega^\gamma > \alpha\}$ (← verificare che ha senso)

$\tilde{\gamma} = \beta_1 + 1$ è successore $\Rightarrow \omega^{\beta_1} \leq \alpha < \omega^{\beta_1+1} \Rightarrow \exists n_1$ t.c. $\omega^{\beta_1} \cdot n_1 \leq \alpha < \omega^{\beta_1} (n_1 + 1)$

$\omega^{\beta_1+1} = \omega^{\beta_1} \cdot \omega$

$\alpha < \omega^{\beta_1} \cdot \omega \Rightarrow \exists k$ t.c. $\alpha < \omega^{\beta_1} \cdot k$.

Con la divisione $\quad \alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \rho \quad$ con $\quad \rho < \omega^{\beta_1}$ poiché $\alpha < \omega^{\beta_1+1}$

Passo 2: Applico l'ipotesi induttiva a ρ.

Lo rivediamo

$\blacksquare$

Di Nasso
9-05

Forma normale di Cantor

$\forall \alpha > 0 \quad \exists! \, \alpha_1 > \ldots > \alpha_k$ t.c. $\exists! \, n_1, \ldots, n_k \in \omega \setminus \{0\}$ t.c. $\boxed{\alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k}$

Dim: Per induzione su α:

· $\alpha = 1$ ✓.

· α: Sia $\gamma = \min \{\beta \mid \omega^\beta > \alpha\}$

$\Rightarrow \gamma$ è successore $\gamma = \alpha_1 + 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^{\alpha_1} \le \alpha < \omega^{\alpha_1 + 1}$

Divido α per ω^{α_1}: $\quad \alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot \beta + \rho \quad$ con $\quad \rho < \omega^{\alpha_1}$

Osserviamo che $\beta \in \omega \setminus \{0\}$. Infatti

· $\beta \neq 0$ poiché $\alpha \ge \omega^{\alpha_1}$

· $\beta \in \omega$ poiché $\alpha < \omega^{\alpha_1 + 1} \quad \Rightarrow \quad \beta = n_1 \in \omega \setminus \{0\}$.

Applico l'hp induttiva su $\rho < \omega^{\alpha_1} \le \alpha \Rightarrow \rho < \alpha$

$\Rightarrow \exists \, \alpha_2 > \ldots > \alpha_k \; \exists \, n_2, \ldots, n_k \in \omega \setminus \{0\}$ t.c. $\quad \rho = \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$.

È chiaro che $\quad \alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$.

Oss: $\alpha_1 > \alpha_2$ poiché $\rho < \omega^{\alpha_1}$

$\to$ l'esistenza è dimostrata. Verifichiamo l'unicità che segue da:

Proposizione: $\beta > \alpha_1 > \ldots > \alpha_k \Rightarrow \forall n_i \in \omega \setminus \{0\}$

$$\omega^\beta > \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k.$$

Dim: $\beta > \alpha_1 \Rightarrow \beta \ge \alpha_1 + 1 \Rightarrow \omega^\beta \ge \omega^{\alpha_1 + 1} = \omega^{\alpha_1} \cdot \omega > \omega^{\alpha_1} (n_1 + \ldots + n_k) = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_1} \cdot n_k \ge$

$$\ge \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \omega^{\alpha_2} \cdot n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$$

□

Se io avessi due forme diverse, $\exists$ il più piccolo esponente o coefficiente diverso $\leadsto$ dimostrazione x esercizio (fare!)

Dim:

lemma: $\alpha > \beta \Rightarrow \forall \gamma < \omega^\beta, \quad \omega^\alpha > \omega^\beta + \gamma$.

Dim: $\exists \gamma < \omega^\beta$ t.c. $\omega^\alpha \le \omega^\beta + \gamma < \omega^\beta + \omega^\beta = \omega^\beta \cdot 2 < \omega^\beta \cdot \omega = \omega^{\beta+1} \le \omega^\alpha$ ASSURDO!

$\beta < \alpha \Rightarrow \beta + 1 \le \alpha$

Sia $\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k}} = \omega^{\beta_1} \cdot m_1 + \ldots + \omega^{\beta_k} \cdot m_k \doteq \beta$.

$\exists j = \min \{ i \mid \alpha_i \neq \beta_i \}$. $\Rightarrow \forall i < j, \; \alpha_i = \beta_i$. Mostriamo che $\forall i < j, \; m_i = n_i$.

$m_1 = n_1$: per assurdo $m_1 \neq n_1$, allora $\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 > \omega^{\beta_1} \cdot m_1$. Per il lemma:

$\omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \ldots \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k > \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 \overset{\text{lemma}}{>} \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \ldots + \omega^{\alpha_t} \cdot m_t \Rightarrow \alpha > \beta$ ASSURDO!

Sia $i \le j$. $m_i = n_i \; \forall i < s < j \overset{?}{\Rightarrow} m_s = n_s$: infatti per assurdo $m_s \neq n_s$, $m_s > m_s$. Come prima

$$\omega^{\alpha_s} \cdot n_s + \ldots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k > \omega^{\beta_s} \cdot m_s + \ldots + \omega^{\alpha_t} \cdot m_t \Rightarrow \alpha > \beta \text{ ASSURDO!}$$

$\Rightarrow m_i = n_i \quad \forall i = 1, \ldots, j$

⊛ Altro foglio

Esempio: (c'è su Hrbacek) <u>successione di Goldstein</u>

$m = 21$

$m_2 = 2^4 + 2^2 + 1 \longrightarrow (10101)_2$

$m_3 = 3^4 + 3^2 + 1 \quad -1 \quad = 3^4 + 3^2 = 90 \quad (10101)_3 - 1$

$m_4 = \underbrace{4^4 + 4^2 - 1}_{\text{non è in base 4}} = 4^4 + 4 \cdot 3 + 3 = 271 \longrightarrow (1033)_4$

$m_5 = 5^4 + 5 \cdot 3 + 3 - 1 = 642$

$m_6 = 1315$

$\vdots$

Teorema: $m_k \to 0$

Dim: $\psi: m_2 \to \omega^4 + \omega^2 + 1$

$m_3 \to \omega^4 + \omega^2$

$m_4 \to \omega^4 + \omega \cdot 3 + 3$

$m_5 \to \omega^4 + \omega \cdot 3 + 2$

$\Rightarrow$ (1) $m_k < \psi(m_k)$

(2) $\psi(m_k) > \psi(m_{k+1}) > \dots$

Per il buon ordinamento degli ordinali, $\exists k$ t.c. $\psi(m_k) = 0 \Rightarrow \{m_k\}$ è definiti vamente zero.

Prodotto di ordinali:

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha \cdot 0 = 0 \\ &\alpha \cdot (\beta+1) = \alpha \cdot \beta + \alpha \\ &\alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \gamma \cdot \lambda \end{aligned}}$$

Teorema: $\alpha \cdot \beta \cong \alpha \odot \beta$. (con $\alpha \odot \beta$ indichiamo il prodotto di insiemi con ordine lessicografico).

Dim: $\cdot$ $\beta = 0 \to$ ovvio (ho due insiemi vuoti).

$\cdot$ $\alpha \cdot (\beta+1) \doteq \alpha \cdot \beta + \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dim. fatta} \\ \text{altra volta}}}{\cong} \alpha \cdot \beta \oplus \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hp induttiva}}}{\cong} (\alpha \odot \beta) \oplus \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{facile!}}}{\cong} \alpha \odot (\beta \oplus 1) = \alpha \odot (\beta+1)$

$\cdot$ $\alpha \cdot \lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha \cdot \gamma \doteq$

$\forall \gamma < \lambda$, $\exists \psi_\gamma : \alpha \cdot \gamma \to \alpha \odot \gamma$

$\alpha \odot \gamma \subsetneq \alpha \odot \lambda \quad \forall \gamma < \lambda$

$\forall \gamma < \gamma' < \lambda \Rightarrow \psi_{\gamma'}|_{\alpha \cdot \gamma} = \psi_\gamma$ per l'unicità degli isomorfismi tra buoni ordini. Infatti

Proposizione: $\psi: A \xrightarrow{\cong} B$ isomorfismo. Sia $a \in A$
$\boxed{\Rightarrow \psi|_{A_a} : A_a \xrightarrow{\cong} B_{\psi(a)} \text{ è isomorfismo.}}$

Per la proposizione $\psi_{\gamma'}|_{\alpha \cdot \gamma}$ è isom. e il segmento iniziale individuato da $\alpha \cdot \gamma$ e $\alpha \cdot \gamma$

$\alpha \cdot \gamma \simeq$ è isomorfo al segmento iniziale di $\alpha \odot \gamma'$ determinato da $\psi(\alpha \cdot \gamma)$

$\Rightarrow \psi_{\gamma'}|_{\alpha \cdot \gamma} = \psi_\gamma$ ∎

$\Rightarrow$ Posso concludere che ψ_γ sono tutti le restrizione degli altri $\Rightarrow$ è ben definita ed è isomorfismo

$\psi = \bigcup \psi_\gamma$ ...

⊛ Fine dimostrazione dell'unicità della forma normale di Cantor

$\alpha_j \neq \beta_j$. Suppongo $\alpha_j > \beta_j$

$\underset{\text{prop.}}{\Rightarrow} \quad \omega^{\alpha_j} > \omega^{\beta_j} \cdot m_j + \dots + \omega^{\beta_t} \cdot m_t$

$\Rightarrow \quad \omega^{\alpha_j} \cdot n_j + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k > \omega^{\beta_j} \cdot m_j + \dots + \omega^{\beta_t} \cdot m_t \underset{\substack{\text{le prime parti} \\ \text{sono uguali}}}{\Rightarrow} \alpha > \beta$. ASSURDO!

$\Rightarrow$ Tutti gli esponenti sono uguali (e in egual numero).

Suppongo $\exists i$ t.c. $m_i \neq n_i$. Sia $j = \min\{i \mid m_i \neq n_i\}$

Sia $n_j > m_j$. Abbiamo

$$\omega^{\gamma_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\gamma_j} \cdot n_j + \dots + \omega^{\gamma_k} \cdot n_k = \omega^{\gamma_1} \cdot m_1 + \dots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k$$

Sia $n_j > m_j \Rightarrow \omega^{\gamma_j} \cdot n_j > \omega^{\gamma_j} \cdot m_j \overset{?}{\Rightarrow} \omega^{\gamma_j} \cdot n_j > \omega^{\gamma_j} \cdot m_j + \dots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k$.

Per assurdo, $\omega^{\gamma_j} \cdot m_j + \dots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k \geq \omega^{\gamma_j} \cdot n_j \underset{\substack{n_j = m_j + t \\ t > 0}}{=} \omega^{\gamma_j} (m_j + t) =$

$= \omega^{\gamma_j} \cdot m_j + \omega^{\gamma_j} \cdot t \underset{t>0}{>} \omega^{\gamma_j} \cdot m_j + \omega^{\gamma_j} > \omega^{\gamma_j} m_j + \omega^{\gamma_{j+1}} \cdot m_{j+1} + \dots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k$

Per la proposizione, $\omega^{\gamma_j} > \omega^{\gamma_{j+1}} m_{j+1} + \dots + \omega^{\gamma_k} \cdot m_k$

$\Rightarrow \alpha > \beta$ ASSURDO!

∎

ESPONENZIAZIONE di ORDINALI :

$$\begin{cases} \alpha^0 = 1 \\ \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha \\ \alpha^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma \end{cases}$$

Def: $Exp(\alpha,\beta) = \{ f : \beta \to \alpha \mid supp(f) \text{ è finito} \}$ dove $supp(f) = \{ \xi \mid f(\xi) \neq 0 \}$

Oss: $|Exp(\omega,\omega)| = \aleph_0$.

Oss: Non riesco a mettere un buon ordine su $\{f : \omega \to \omega\}$, perché se no lo potrei mettere anche su $\mathbb{R}$ (tramite la bigezione con $\{f : \omega \to \omega\}$) ma ciò non è possibile.

Con gli ordinali:

$|\omega| = \aleph_0$

$|\omega^2| = \aleph_0$ $\qquad |\omega^\omega| = \aleph_0$ poiché $\omega^\omega = \bigcup_{n<\omega} \omega^n$ (unione numerabile di numerabili).

$|\omega^n| = \aleph_0$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \qquad \text{(somma tra cardinali)}$$

$$\omega + \omega \neq \omega \qquad \text{(somma ordinale)}$$

Oss. Anche $|\varepsilon_0| = \aleph_0$

$\rightsquigarrow$ Sembra che con gli ordinali non si riesce a uscire dal numerabile.... (vedremo!) $\rightsquigarrow$ lì, non è vero.

Su $Exp(\alpha,\beta)$ si può mettere un ordine che si dice ORDINE della MASSIMA DIFFERENZA:

$$\boxed{f <_1 g \iff f(\xi) < g(\xi) \quad \text{dove} \quad \xi = \max \underbrace{\{ \eta \mid f(\eta) \neq g(\eta) \}}_{\text{questo insieme è finito poiché } f, g \text{ sono q.o. nulle.}}}$$

Si può anche considerare ORDINE della MINIMA DIFFERENZA:

$$f <_2 g \iff f(\eta) < g(\eta) \quad \text{dove} \quad \eta = \min \{ x \mid f(x) \neq g(x) \}$$

Oss. (verificare!):

(1) $(Exp(\alpha,\beta), <_1)$ è un insieme bene ordinato.

(2) $(Exp(\alpha,\beta), <_2)$ è un insieme ordinato ma non bene ordinato. (in generale)

Teorema: $\boxed{\alpha^\beta \simeq (Exp(\alpha,\beta), <_1)}$

Dim: · Base: $\cdot \beta = 0$ $\qquad Exp(\alpha, 0) = \{\emptyset\} \Rightarrow \alpha^\beta = 1 \simeq \{\emptyset\}$

· Successore: $\beta = \gamma + 1$ $\qquad \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \cdot \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teorema prec.}}}{\simeq} \alpha^\gamma \odot \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hp. ind.}}}{\simeq} Exp(\alpha,\gamma) \odot \alpha \overset{\circledast}{\simeq} Exp(\alpha, \gamma+1)$

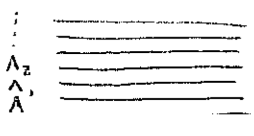
Basta considerare

$$\psi : Exp(\alpha,\gamma) \odot \alpha \longrightarrow Exp(\alpha, \gamma+1)$$
$$(f, \beta) \longmapsto \tilde{f} \text{ con } \begin{cases} \tilde{f}_{|\gamma} = f \\ \tilde{f}(\gamma) = \alpha \end{cases}$$

$f(\gamma) < g(\gamma) \Rightarrow f < g$

$\circledast$ $\quad Exp(\alpha, \gamma+1) \overset{\alpha}{=} \bigcup_{\xi<\alpha} \Lambda_\xi$ $\quad$ con $\Lambda_\xi = \{ f \in Exp(\alpha, \gamma+1) \mid f(\gamma) = \xi \}$

$\Rightarrow \Lambda_0 < \Lambda_1 < \dots$ $\qquad$ cioè se $\xi < \xi' < \alpha \Rightarrow \forall f \in \Lambda_\xi, \forall g \in \Lambda_{\xi'}, \ f < g$



Notiamo che ogni $\Lambda_\xi \simeq Exp(\alpha,\gamma)$

$\Rightarrow \quad Exp(\alpha, \gamma+1) \simeq Exp(\alpha, \gamma) \odot \alpha$ ✓.

- Caso limite: fare per esercizio ~~w~~ si usa sempre l'unicità degli isomorfismi tra ordinali e si fa l'unione

CARDINALI come ORDINALI INIZIALI

Oss: Per gli insiemi finiti, gli ordinali sono come i cardinali.

$\aleph_0 = \omega$ = il più piccolo ordinale ~~non~~ numerabile e non finito.

$\omega+1$ è numerabile ma $\omega+1 > \omega$.

Def: Un cardinale K è un ordinale iniziale cioè con la seguente proprietà:

$$\boxed{\forall \gamma < K \Rightarrow |\gamma| \neq |K|}$$

Esempio: $\omega+1$ non è cardinale poiché $\omega < \omega+1$ e $|\omega| = |\omega+1|$

$\Rightarrow$ Nessuno ω^2, ω^ω, ω^{ω^ω} sono cardinali poiché $|\omega^2| = |\omega^\omega| = |\omega^{\omega^\omega}| = \aleph_0$.

Dobbiamo dimostrare che esiste un cardinale ω_1 t.c. $|\omega_1| > \aleph_0$

$\omega_1 \rightarrow$ operazioni ordinali

$\aleph_1 \rightarrow$ operazioni cardinali.

Prop: Se K è un cardinale infinito $\Rightarrow$ K è limite.

Esistono ordinali limite che non sono cardinali.

Dim: A infinito $\Rightarrow |A| = |A \cup \{*\}| \Rightarrow K$ non può essere successore.

$\omega+\omega$ è limite ma non ordinale

□

Fatto1: Esistono ordinali non numerabili.

Dim: Bene ordino $\mathbb{R}$. Sia $\underset{\text{ordinale}}{\gamma} \simeq \mathbb{R}$. $\Rightarrow |\gamma| = |\mathbb{R}| = c$. $\Rightarrow \gamma$ è ordinale non num. serve A.c.

Fatto2: Esistono cardinali non numerabili.

Dim: $|\mathbb{R}| = \min \underbrace{\{\gamma \mid |\gamma| = \mathbb{R}\}}_{\neq \emptyset \text{ per fatto 2}} = c \Rightarrow c$ è iniziale $\Rightarrow c$ è cardinale.

Def: $$\boxed{\omega_1 \stackrel{.}{=} \min \underbrace{\{\gamma \mid |\gamma| > \aleph_0\}}_{\neq \emptyset \; c \in \{\delta \mid |\delta| > \aleph_0\}} = \aleph_1}$$ (esiste!)

Vediamo che esistono senza A.c.

~~Dato un ordinale α, esiste~~

Prop: Dato uno ordinale α, esiste il minimo cardinale $K > |\alpha|$ t.c. dove

$|\alpha| = \min\{\gamma \mid |\gamma| = |\alpha|\}$ l'unico ordinale iniziale equipotente a α.

esempio: Considero ω; Considero l'INSIEME di HARTOGS di ω

$H(\omega) = \{\alpha \mid |\alpha| \leq |\omega|\} = \{\alpha \mid \exists \psi: \alpha \rightarrow \omega \text{ iniettiva}\}$ Come faccio a dire che è un insieme?

Facciamo appello agli assiomi dati

Lemma: $H(\omega)$ è un insieme.

> Se A è un insieme $\Rightarrow \{a \in A \mid \varphi(a)\}$ è un insieme, dove φ è una formula

Dim.: Sia $\Gamma' = \{(A,<) \mid (A,<)$ buon ordine, $A \subseteq \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$

$\Rightarrow \Gamma = \{ (A,<) \in \mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega\times\omega) \mid (A,<)$ è buon ordine$\} \Rightarrow \Gamma$ esiste per l'assioma di separazione.

(esiste ω, esiste $\omega\times\omega$, esistono le parti di un insieme).

$\forall (A,<) \in \Gamma$, $\exists!$ α ordinale t.c. $\alpha \simeq (A,<)$ (non serve A.C. → lo abbiamo dimostrato l'altra volta).

$\Rightarrow$ $\mathbb{F} : (A,<) \longrightarrow \alpha$ è una funzione classe, cioè esiste una formula funzionale

$$\varphi((A,<),\alpha)$$

⇝ Non è detto che sia un insieme ma si comporta come una funzione.

$\Rightarrow$ $H(\omega) = \mathbb{F}(\Gamma)$. Infatti:

$\supseteq$: $(A,<) \in \Gamma \Rightarrow$ l'unico ordinale a cui isomorfo è ordinale.

$\subseteq$: Se α è un ordinale numerabile, prendo una bigezione $\varphi : \mathbb{N} \to \alpha$ e pongo $n < m \iff \varphi(n) \in \varphi(m)$

$\Rightarrow$ $\Gamma \ni (\mathbb{N},<) \simeq \alpha$

$\Rightarrow$ $\mathbb{F}(\Gamma)$ è un insieme per l'assioma di rimpiazzamento. □

> Se il dominio di una formula funzionale è un insieme, allora anche l'immagine è un insieme.

- $H(\omega)$ è ordinale, poiché è un insieme di ordinali transitivo.
  Infatti: $\alpha \in \beta \in H(\omega)$
  $\Rightarrow \alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta \Rightarrow |\alpha| \leq |\omega| \Rightarrow \alpha \in H(\omega)$

- $H(\omega)$ è un cardinale.
  Per assurdo $\exists\, \gamma \in H(\omega)$ t.c. $|\gamma| = |H(\omega)|$
  Ma $\gamma \in H(\omega) \Rightarrow |\gamma| \leq |\omega| \Rightarrow |\gamma| = |H(\omega)| \leq |\omega| \Rightarrow H(\omega) \in H(\omega)$ ASSURDO! poiché $H(\omega)$ è ordinale.

$\Rightarrow$ $H(\omega) = \omega_1$, è il più piccolo ordinale non numerabile.

$\Rightarrow$ Gli ordinali numerabili sono $\aleph_1$

$$\boxed{\aleph_0 < \aleph_1 \leq c}$$

$\aleph_1 = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ se valesse l'hp del Continuo.

Poi costruiamo $\aleph_2, \aleph_3, \dots \aleph_\omega$

si può dimostrare che $c \neq \aleph_\omega$.

Sequenza degli Alephs.

DI NASSO
11-10-05

α ordinale. Diciamo insieme di Hartogs di α

$$H(\alpha) = \{\beta \text{ ordinali} \mid |\beta| \leq |\alpha|\}$$

Abbiamo dimostrato che $H(\alpha)$ è un insieme, ed è il più piccolo cardinale k t.c. $|k| > |\alpha|$.

$\omega_1 = H(\omega)$

Per induzione transfinita, definiamo gli Alephs:

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha) = \{\beta \text{ ordinali} \mid |\beta| \leq |\aleph_\alpha|\} \\ \aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \quad \text{se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$$

Teorema: Ogni insieme (bene ordinabile) infinito è equipotente ad un Aleph.

Unione crescente di cardinali è un cardinale

Dimostriamo che $\aleph_\lambda$ è cardinale se λ è limite.

$\aleph_\lambda$ è l'unione crescente di cardinali poiché $\aleph_\alpha \in \aleph_{\alpha+1}$ (si verifica per induzione → farlo x es.)

Se $\delta < \aleph_\lambda \Rightarrow \exists \gamma < \lambda$ t.c. $\delta \in < \aleph_\gamma \Rightarrow |\delta| < \aleph_\gamma \leq |\aleph_\lambda| \Rightarrow \aleph_\lambda$ è cardinale.
δ cardinale

Dimostrazione (del teorema).

Passo 1: Se A è bene ordinabile, sia $<$ un buon ordinamento su A. $\Rightarrow \exists!$ ordinale α t.c. $\alpha \simeq (A, <)$
In particolare $\exists$ ordinale α t.c. $|\alpha| = |A|$. (usando A.C.)
↑ ogni insieme è bene ordinabile

Passo 2: Prendo $k = \min \underbrace{\{\beta \mid |\beta| = |A|\}}_{\neq \emptyset}$ ← una classe di ordinali non vuota ha minimo.

Passo 3: $\Rightarrow k$ è cardinale, per minimalità.

Passo 4: Basta dimostrare che ogni cardinale infinito è un aleph.
Notiamo che $\forall k$ cardinale, $k \geq \omega$

$$\boxed{k \leq \aleph_k} \quad \text{(per induzione transfinita → mostrare per esercizio)}$$

OSS: esistono cardinali k t.c. $k = \aleph_k$.

Quindi possiamo prendere

$$\alpha = \min \underbrace{\{\beta \mid k < \aleph_\beta\}}_{\neq 0} \leftarrow \text{ \& } k+1 \in \{\beta \mid k < \aleph_\beta\} \text{ poiché } k \leq \aleph_k < \aleph_{k+1}$$

$\Rightarrow \alpha$ è successore. Altrimenti, se
$\alpha = \lambda$-limite $\Rightarrow \quad k < \aleph_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \aleph_\gamma \Rightarrow \exists \gamma$ t.c. $k < \aleph_\gamma$ contro la minimalità di α.

$\Rightarrow \exists \beta$ t.c. $\alpha = \beta+1$

$$\aleph_\beta \leq k < \aleph_{\beta+1} \overset{?}{\Rightarrow} k = \aleph_\beta$$

Per assurdo $\aleph_\beta < k < \aleph_{\beta+1} = H(\aleph_\beta) = \{\gamma \mid |\gamma| \leq |\aleph_\beta|\}$

$\Rightarrow k < \aleph_{\beta+1} \Rightarrow k \in \aleph_{\beta+1} \Rightarrow |k| \leq |\aleph_\beta| \underset{\substack{\uparrow \\ \aleph_\beta < k}}{\leq} |k| \Rightarrow k = \aleph_\beta$ ∎

Esercizio: $\forall \alpha, \exists k > \alpha$ t.c. $\aleph_k = k$.

Dim: $\begin{cases} k_0 = \aleph_0 \\ k_1 = \aleph_\omega = \aleph_{\aleph_0} \\ k_{n+1} = \aleph_{k_n} \end{cases}$

unione crescente di cardinali è un cardinale

Sia $k = \bigcup_n k_n$ è cardinale poiché unione crescente di ordinali.

Mostro che $\aleph_k = k$.

def se k è limite. Ma ciò è ovvio, poiché k è un cardinale infinito che è un ordinale limite.

$$k = \bigcup_n k_n = \bigcup_n k_{n+1} = \bigcup_n \aleph_{k_n} = \bigcup_{\gamma < k} \aleph_\gamma = \aleph_k$$

$k_{n+1} = \aleph_{k_n}$; $k = \sup k_n$

Quindi per α generico considero la stessa costruzione:

$$\begin{cases} k_0 = \cancel{\alpha}\ \aleph_\alpha \\ k_{n+1} = \aleph_{k_n} \end{cases} \Rightarrow k = \bigcup_n k_n \text{ è t.c. } k = \aleph_k \text{ e } k > \aleph_\alpha \geq \alpha. \quad \square$$

Attenzione! se $\alpha = \aleph_\alpha \Rightarrow k_1 = k_0$. $\rightarrow$ la successione è costante.

Quindi considero:

$$\boxed{\begin{cases} k_0 = \aleph_{\alpha+1} \\ k_{n+1} = \aleph_{k_n} \end{cases}} \quad \checkmark.$$

Teorema: ~~k cardinale infinito ...~~ $\boxed{A \text{ infinito} \Rightarrow |A \times A| = |A|}$

Oss: questo teorema è equivalente all'assioma di scelta.

Lo dimostreremo.

Corollario: Se k, ν sono cardinali infiniti. $\Rightarrow$ $k + \nu = k \cdot \nu = \max\{k, \nu\}$ ← Operazioni cardinali

Dimostrazione: $\xi = \max\{k, \nu\}$

$$\Rightarrow \xi \leq k + \nu \leq \xi + \xi = \xi \cdot 2 \leq k \cdot \nu \leq \xi \cdot \xi = \xi \rightarrow \text{valgono tutte le uguaglianze.}$$

ξ è infinito; Oss. k, ν infiniti

$$\begin{bmatrix} \text{Se } \xi = k \Rightarrow \xi \cdot 2 = k \cdot 2 \underset{2 \leq \nu}{\leq} k \cdot \nu \\ \text{Se } \xi = \nu \Rightarrow \xi \cdot 2 = \nu \cdot 2 = \nu \cdot k \end{bmatrix}$$

Def: (Somme infinite di cardinali) $\langle k_i \mid i \in I \rangle$ cardinali, $I \neq \emptyset$

$$\sum_{i \in I} k_i = \left| \bigcup_{i \in I} A_i \right| \quad \text{con } |A_i| = k_i \ \forall i, \ A_i \text{ disg.}$$

Esercizio: $\sum_{\alpha < \omega_1} \aleph_{\omega+\alpha} = ?$

Prop: $\boxed{\sum_{i \in I} k_i = \operatorname{Max}\left\{ \sup_{i \in I} k_i, |I| \right\}}$, $I \neq \emptyset$

Dim: $\forall i \in I, \quad k_i \leq \sum_{i \in I} k_i$

$\Rightarrow \sup_{i \in I} k_i \leq \sum_{i \in I} k_i$. Inoltre:

$$|I| = \sum_{i\in I} 1 \leq \sum_{i\in I} k_i$$

$$\Rightarrow \max\left\{\sup_{i\in I} k_i,\ |I|\right\} \leq \sum_{i\in I} k_i \underset{\substack{\uparrow \\ \tilde{k} = \sup_{i\in I} k_i}}{\leq} \sum_{i\in I} \tilde{k} = \tilde{k}\cdot|I| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teorema}}}{=} \max\{\tilde{k}, |I|\}$$

$\blacksquare$

Esercizio. $\sum_{n<\alpha}$ $\sum_{\omega<}$

$$\sum_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+\omega} = \max\left\{\sup_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+\omega},\ \underbrace{|\omega_1|}_{\aleph_1}\right\} \rightsquigarrow \text{devo calcolare } \sup_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+\omega}$$

$$\sup_{\alpha<\omega_1}(\omega+\alpha) \underset{\uparrow}{=} \sup_{\alpha<\omega_1} \alpha = \omega_1 \Rightarrow \sup_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+\omega} = \aleph_{\omega_1} \Rightarrow \sum_{\alpha<\omega_1} \aleph_{\alpha+\omega} = \aleph_{\omega_1}$$

- $\beta<\omega_1,\ \alpha<\omega_1 \Rightarrow \beta+\alpha<\omega_1$
  $\Rightarrow \omega+\alpha<\omega_1$

  Dim. $\alpha<\omega_1$, $\beta<\omega_1$ sono numer. $\Rightarrow |\alpha+\beta|$ è numerabile $\Rightarrow \beta+\alpha<\omega_1$

- $\alpha \geq \omega^2 \Rightarrow \omega+\alpha = \alpha$

  Dim: $\alpha = \omega^2\cdot\xi + \rho$.

$$\Rightarrow \omega+\alpha = \underbrace{\omega+(\omega^2\cdot\xi)}_{\omega^2\cdot\xi} + \rho = \omega^2\cdot\xi+\rho$$

$$= \omega(\underbrace{1+\omega\cdot\xi}_{\omega\cdot\xi}) + \rho = \omega^2\xi+\rho.$$

Risultato generale:

$\boxed{\alpha<\omega^\gamma \Rightarrow \alpha+\omega^\gamma = \omega^\gamma}$ (dimostrare per es.)

Esercizio: A ordinato.

$A \simeq \omega \iff \forall X$ infinito, X non ha massimo.

Esercizio.

Trovare un insieme di numeri reali isomorfo a ω^2. (come ordine)

E con ω^ω?

ORDINALI INIZIALI

ω iniziale.

$\omega+\omega$ non iniziale.

BERDARDUCCI

13-05

Possiamo identificare i cardinali di Von Neumann e ordinali iniziali.

Teorema: $\boxed{\forall X \text{ insieme, } \exists!\ \alpha \text{ ordinale iniziale con cui } X \text{ può essere messo in bigezione. Chiamiamo } |X| = \alpha}$

Dimostrazione.

Per il teorema di Zermelo, X si può beneordinare con $\alpha <$

$\Rightarrow \exists!\ \alpha$ ordinale t.c. $(X, <) \cong (\alpha, \in)$ Si dice $\alpha =$ tipo $(X, <)$ tipo d'ordine.

$\Rightarrow X$ è in bigezione con α.

Considero il minimo ordinale β in bigezione con X. $\Rightarrow \beta$ è iniziale $\square$

($\exists$ poiché la classe $\{\beta \mid |\beta| = |X|\} \neq \emptyset$)

$\Rightarrow$ Possiamo identificare gli ordinali iniziali con i cardinali.

OSS: ω^ω è numerabile (esponenziazione di ordinali)

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Identificando i cardinali con gli ordinali iniziali, otteniamo che $\aleph_0 = \omega$

Ma $\underbrace{\aleph_0^{\aleph_0}}_{\text{esponen. cardinali}} \neq \underbrace{\omega^\omega}_{\text{esponenziazione di ordinali}}$

$\aleph_0^{\aleph_0}$ pensato come ordinale, chissà quanto è!

Oss. $\forall \alpha \in ON$, $\exists K$ cardinale t.c. $\alpha < K$.

Basta scegliere $K = \operatorname{Card}(\mathcal{P}\alpha)$. Oppure

$H(\alpha) = \{\beta \mid |\beta| \leq |\alpha|\} = \min\{\beta \mid |\beta| > |\alpha|\}$.

- $H(\alpha) > |\alpha|$ poiché $H(\alpha) \leq |\alpha| \Rightarrow H(\alpha) \in H(\alpha)$ ASS.
- Pur essendo $\exists \beta$ t.c. $\alpha < \beta < H(\alpha)$ con $|\beta| > |\alpha|$ up de ordine.

Abbiamo dimostrato che $H(\alpha)$ è cardinale e $\alpha < H(\alpha)$

OSS: $\boxed{H(\alpha) \leq |\mathcal{P}(\alpha)|}$

Osserviamo che $\mathcal{P}(\alpha)$ è una definizione più semplice di $H(\alpha)$ ma richiede l'assioma della scelta, perché per dim. il teo. 1 devo bene ordinare $\mathcal{P}(\alpha)$ e per farlo mi serve A.C.

$H(\alpha) \overset{?}{=} \min\{\beta \mid |\beta| > |\alpha|\}$.

~~Mostro che $H(\alpha) = \min\{\beta \mid |\beta| > |\alpha|\}$~~

Sia α ordinale. Sia $\alpha^+ = \min\{\gamma \mid |\gamma| > |\alpha|\}$.

$\Rightarrow \boxed{\alpha < \alpha^+ \leq \mathcal{P}(\alpha)}$ $\qquad \alpha^+ = H(\alpha)$.

Anche senza la funzione di Hartogs, posso dim. l'esistenza di α^+ poiché:

$$\Gamma = \{\gamma \text{ ordinali} \mid |\gamma| > |\alpha|\} \neq \emptyset \quad \text{poiché} \quad \mathcal{P}(\alpha) \in \Gamma$$

$\Rightarrow$ esiste il minimo $\square$

OSS: Sia $\alpha \in ON. \Rightarrow |\alpha| \leq \alpha$ ($|\alpha|$ = minimo ordinale in bigezione con α)

$\rightsquigarrow$ I cardinali sono stati identificati con una sottoclasse degli ordinali

$\Rightarrow$ Anche per i cardinali possiamo fare induzione.

N.B.: Posso applicare il principio di induzione e il principio del minimo ai cardinali transfinita

Funzione Aleph $\aleph : ON \longrightarrow$ cardinali infiniti, definita per ricorsione:

$$\boxed{\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+ = H(\aleph_\alpha) \\ \aleph_\lambda = \sup\limits_{\gamma<\lambda} \aleph_\gamma \quad \text{se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}}$$

Sul sup bisogna stare attenti: abbiamo verificato che l'unione fatta sui cardinali e sugli ordinali è uguale e $\aleph_\lambda$ è cardinale.

Oss: $\aleph$ è suriettiva.

Oss: Abbiamo definito le induzioni transfinite su insiemi ben ordinati (non su classi ben ordinate)
In questo caso si procede così: si definisce

$\aleph|_{ON\in\gamma}$ $\rightsquigarrow$ non dipende dalla scelta di γ ($\rightsquigarrow$ verificare x es.) $\downarrow$ trucco

Se voglio definire $\aleph(\omega\alpha)$, scelgo un $\beta>\alpha$ e ~~scelgo~~ definisco $\aleph|_{ON\in\beta}$ per ricorsione transfinita.

Teorema: $\boxed{X \text{ infinito} \Rightarrow |X\times X| = |X|}$

$\Updownarrow$

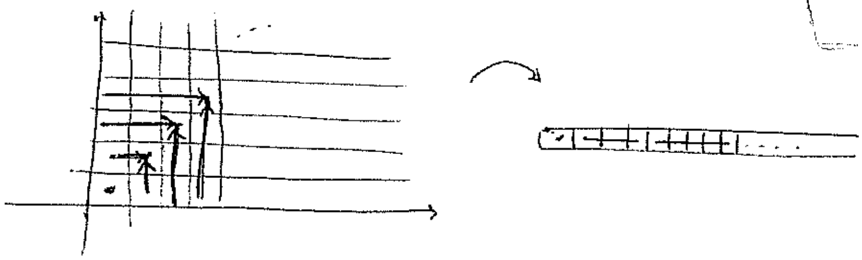
$\forall k$ cardinale infinito $k\cdot k = k$.

$\Updownarrow$

$\forall\theta,\ \aleph_\theta\cdot\aleph_\theta = \aleph_\theta$.

30 maggio → scritto + orali
17 maggio → orali + scritto (a seguire)
1° luglio → orali + scritto (a seguire)

Dim: Già sappiamo $\aleph_0\cdot\aleph_0 = \aleph_0$ $\quad c\cdot c = c$.
~~Si dimostra nello stesso modo~~. Per $\aleph_0$



← non si procede per diagonali ma per quadrati.

Ordino $k\cdot k$ con un ordine $\prec$ così fatto (ordine a cornici)

$(x,y) \prec (x',y') \iff$ ◦ $\max(x,y) < \max(x',y')$ ← due elementi hanno lo stesso max $\iff$ sono sulla stessa cornice

oppure

◦ $\max(x,y) = \max(x',y') \ \wedge\ x<x'$
oppure
◦ $\max(x,y) = \max(x',y') \ \wedge\ x=x' \ \wedge\ y<y'$

$\prec$ è un ordine su $k\cdot k$.

Dico che $(k\times k, \prec) \simeq (k,\in)$ (Oss: è più facile trovare isom. d'ordine che bigezioni poiché il minimo deve andare nel minimo).

Dobbiamo utilizzare che k è ordinale iniziale.

Dobbiamo dim. che $(k\times k,\prec)$ è un buon ordine.

Oss: $(k\times k, <_{lex})$ è buon ordine ma non è isom. a $(k,\in)$ (è più grande)

① $\prec$ è un buon ordine su $k \times k$.

∘ Prendo $\{(a_n, b_n)\}$ succ. che inf. → prima e poi si stabilizzano i massimi (poiché sono su k che è un buon ordine); poi si stabilizza la prima dis. e poi la terza.

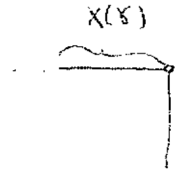
Oppure:

Sia $X \subset k \times k$ $X \neq \phi$. Sia ~~k~~ $k = \min\{\gamma \mid \exists (x,y) \in X$ t.c. $\max(x,y) = \gamma\}$

Sia $X(\gamma) = \{(x,y) \in X \mid \min(x,y) = \gamma\}$.

Sia $\bar{x} = \min\{x \mid \exists y$ t.c. $(x,y) \in X(\gamma)\}$

Sia $\bar{y} = \min\{y \mid (\bar{x}, y) \in X(\gamma)\}$.

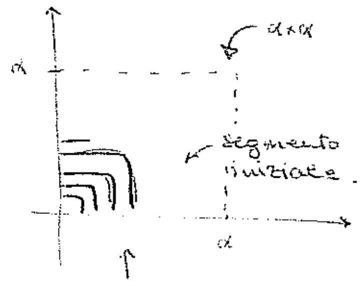


$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = \min\limits_{\prec} X$

⇒ Posso applicare il teorema di confrontabilità dei buoni ordini: uno è isomorfo a un segmento iniziale dell'altro.

<u>Lemma</u>: $J \underset{i}{\subsetneq} (k \times k, \prec)$ J proprio

$\Rightarrow \exists \alpha < k$ t.c. $J \subset \alpha \times \alpha$



<u>Dim</u>: J segm. iniz. proprio $\Rightarrow \exists (x,y)$ t.c. $(x,y) \notin J$

$\alpha = \max(x,y) + 1$ (ci vuole +1 poiché $\alpha \times \alpha = \{(u,v) \mid u < \alpha, v < \alpha\}$) $\rightarrow \alpha < k$ poiché k è ordinale limite $\Rightarrow \max(x,y) < k \Downarrow \max(x,y)+1 < k$

Sia $(u,v) \in J$. $(x,y) \notin J \Rightarrow (u,v) \prec (x,y)$ $\Rightarrow |\alpha| < k$ poiché k è iniziale

$\Rightarrow \max(u,v) \leq \max(x,y) < \max(x,y) + 1 = \alpha \Rightarrow (u,v) \in \alpha \times \alpha$

□

Vogliamo mostrare che $|k \times k| = |k|$.

I cardinali sono ordinali ⇒ posso fare induzione sui cardinali.

Posso supporre $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$ $\forall \alpha < k$, $\forall \alpha \geq \omega$, cioè:

Suppongo che k sia il minimo controesempio al nostro teorema.

$\Rightarrow \forall \alpha$ $\omega \leq \alpha < k$, $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$

Se $\alpha < k \Rightarrow |\alpha| \leq \alpha \underset{\uparrow\, k \text{ è iniziale}}{<} k = |k| \Rightarrow |\alpha \times \alpha| = |\alpha|$

$\Rightarrow |J| \leq |\alpha \times \alpha| = |\alpha| < k$. ⇒ i segmenti iniziali di un cardinale hanno card. strett. inf. al cardinale.

Suppongo che k sia isomorfo ad un segmento proprio di $k \times k$. ASSURDO!

Poiché i segm. propri di $k \times k$ hanno card. $< k$.

$\Rightarrow$ $(k \times k, \in)$ è isomorfo ad un segmento iniziale di k. $\Rightarrow |k \times k| \leq |k|$

Ovviamente $|k| \leq |k \times k|$ $\Rightarrow$ $|k \times k| = |k|$ ■

$\phi: k \to k \times k$ è iniettiva. Cantor Bernstein.

$\gamma \mapsto (\gamma, 0)$

<u>Oss</u>: $(k \times k, \overset{\prec}{\in}) \not\cong (k, <)$ poiché i segmenti iniziali di k ~~sono~~ hanno cardinalità $< k$ poiché k è ordinale iniziale

COFINALITÀ

$|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{f \mid f: \mathbb{N} \to 2\}| \doteq 2^{\aleph_0} \; \overset{\downarrow}{>} \; \aleph_0$

$2^{\aleph_0}$ quanto è maggiore di $\aleph_0$?

Sicuramente $\quad 2^{\aleph_0} \geq \underbrace{\aleph_1}_{(\aleph_0)^+} > \aleph_0$

<u>Teorema</u>: $\boxed{2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega}$

Tuttavia non riusciamo a dire se sia maggiore o minore.

Facciamo più avanti la dimostrazione.

<u>Def</u>: $(A, <_A) \xrightarrow{f} (B, <_B)$ è <u>cofinale</u> $\iff \forall b \in B, \; \exists a \in A$ t.c. $f(a) \geq b$.

cioè f è illimitata.

$\underline{cf(B, <_B)} = \min\{\alpha \in ON \mid \exists\; f: (\alpha, \in) \to (B, <_B) \text{ cofinale}\}$. <u>cofinalità di B</u>

<u>Esempio</u> $\quad cf(\mathbb{R}, <) = \omega \qquad id: \omega \to \mathbb{R}$ è cofinale.

$n \mapsto n$

$cf(|\mathbb{R}|, \in) = ???$. Dimostreremo che $cf(|\mathbb{R}|, \in) \neq \omega$, ma $cf(|\mathbb{R}|, \in) = 2^{\aleph_0}$

$cf(\aleph_\omega) = \omega \quad$ tramite $\quad f: \omega \longrightarrow \aleph_\omega$

$n \longmapsto \aleph_n$

$\Rightarrow 2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

<u>Def</u>:

α ordinale. $\Rightarrow cf(\alpha) = cf(\alpha, \in) = \min\{\beta \mid f: \beta \to \alpha \text{ cofinale}\}$.

<u>Esempio</u>: $\quad cf(\omega+\omega) = \omega \qquad f: \omega \longrightarrow \omega+\omega \qquad \Rightarrow cf(\omega+\omega) \leq n$

$n \longmapsto \omega+n$

$cf(\omega+\omega) \not< \omega \Rightarrow cf(\omega+\omega) = \omega$

<u>OSS</u>: $\underline{(X, <) \text{ ha un massimo} \iff cf(X, <) = 1 = \{0\}}$.

$(\Rightarrow)$ mando 0 nel massimo

$(\Leftarrow)$ $\quad f(0)$ è il massimo.

$\underline{(X, <) \text{ non ha massimo} \iff cf(X, <) \geq \omega}$

Se $cf(X, <)$ fosse finito, avremmo un massimo.

BERARDUCCI
16-05

Nella successione degli Aleph non sappiamo collocare $2^{\aleph_\alpha}$

Sappiamo solo che $2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$ e quindi $2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$

Definiamo la **SUCCESSIONE di BETH**:

$$\boxed{\begin{cases} \beth_0 = \aleph_0 \\ \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha} \\ \beth_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha \end{cases}} \Rightarrow \begin{array}{l} \aleph_0 = \beth_0 \\ \aleph_1 \leq \beth_1 = 2^{\aleph_0} \\ \aleph_2 \leq \beth_2 = 2^{2^{\aleph_0}} \\ \vdots \\ \aleph_\alpha \leq \beth_\alpha \end{array}$$

Tuttavia la successione di Beth lascia dei buchi, a differenza della successione degli Aleph.

Oss: $\exists \alpha$ t.c. $\aleph_\alpha = \alpha$ e $\exists \beta$ t.c. $\beth_\beta = \beta$

Esercizio: $\boxed{\forall \alpha, \ \alpha \leq \aleph_\alpha}$

Dim: Procediamo per induzione transfinita su α.

- $0 \leq \aleph_0$ ✓
- $\alpha + 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hp ind.}}}{\leq} \aleph_\alpha + 1 \leq \aleph_{\alpha+1}$ ✓
- λ è limite $\Rightarrow$ $\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hp ind.} \\ \alpha<\lambda \Rightarrow \alpha \leq \aleph_\alpha}}{\leq} \sup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \aleph_\lambda$

∎

In generale:

Teorema: f: ON → ON una funzione classe crescente e continua

(cioè $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$, $f\left(\sup_{i\in I} \alpha_i\right) = \sup_{i \in I} f(\alpha_i)$)

$\Rightarrow \exists \alpha$ t.c. $f(\alpha) = \alpha$ p.to fisso.

Oss: $f: \alpha \mapsto \aleph_\alpha$ è continua e crescente.
$f: \alpha \mapsto \beth_\alpha$ è continua e crescente. } $\Rightarrow$ hanno p.ti fissi.

Dimostrazione:

Considero la successione così definita.

$$\begin{cases} \alpha_0 = \gamma \\ \alpha_{n+1} = f(\alpha_n) \\ \alpha_\omega = \sup_{n<\omega} \alpha_n \end{cases}$$

⇝ i p.ti fissi sono arbitrariamente grandi.

Mostriamo che α_ω è p.to fisso per f.

$$f(\alpha_\omega) = f\left(\sup_{n<\omega} \alpha_n\right) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua}}}{=} \sup_{n<\omega} f(\alpha_n) = \sup_{n<\omega} \alpha_{n+1} \overset{\substack{\text{crescenza di } f \ \alpha_{n+1} \geq \alpha_n \\ \downarrow}}{=} \alpha_\omega$$

∎

Abbiamo visto la forma normale di Cantor:

$\forall \alpha > 0, \quad \exists \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_k \quad \exists n_1, \dots, n_k \in \omega \setminus \{0\}$ t.c. $\quad \alpha = \omega^{\alpha_1} \cdot n_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot n_k$

che possiamo considerare la rappresentazione in base ω degli ordinali.

Oss: $\boxed{\exists \alpha \text{ t.c. } \omega^\alpha = \alpha}$

Segue infatti dal teorema, essendo $f(\alpha) = \omega^\alpha$ continua e crescente. (Verificare)

Il p.to fisso si costruisce definendo la successione a partire da ω.

Si ottiene $\alpha_\omega =: \varepsilon_0 = \sup \{\omega, \omega^\omega, \dots\}$. Allora:

$$\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0 \quad e \quad |\varepsilon_0| = \aleph_0.$$

$\alpha \in \beta$

$\Rightarrow \exists \gamma$ t.c. $\beta = \alpha + \gamma$

$\Rightarrow \omega^\alpha \cdot 1 < \omega^\alpha \cdot \omega^\gamma = \omega^{\alpha+\gamma} = \omega^\beta$,

$\Rightarrow f$ è crescente

Per definizione, se λ è limite,

$\omega^\lambda = \sup_{\gamma < \lambda} \omega^\gamma \Rightarrow f$ è continua

Esercizio: Quali sono i tipi d'ordine dei sottoinsiemi bene ordinati di $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$?

Per esempio: - $\omega + \omega$ è il tipo d'ordine di $\{1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (tramite ϕ: $1 - \frac{1}{n} \mapsto n$, $2 - \frac{1}{n} \mapsto \omega + n$)

- $\omega \cdot \omega$ è il tipo d'ordine di $\{k - \frac{1}{n} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$

- Se vogliamo fare ω^3 prendiamo l'insieme di $\omega \cdot \omega$ e lo schiacciamo in $[0,1]$; ne prendiamo un altro e lo schiaccio in $[1,2]$, ... Otteniamo

$$\omega^2 + \omega^2 + \dots = \sup_{n < \omega} \omega^2 \cdot n = \omega^3$$

da esplicitare per bene.

- Per fare ω^ω prendiamo ω^n e lo comprimiamo in $[n-1, n]$ $\forall n$ (comprimendo e traslando)

Oss: $\boxed{A \subseteq \mathbb{R} \text{ bene ordinato (con l'ordine indotto da } \mathbb{R}) \Rightarrow ot(A) < \omega_1.}$

Infatti essendo A bene ordinato (supponiamo, per semplicità senza minimo), allora ogni p.to $a \in A$ ha un successore $a' \in A$: si ha

$$[a, a') \cap A = \{a\} \quad e \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow [a_1, a_1') \cap [a_2, a_2') = \emptyset$$

$\Rightarrow$ Posso definire $\quad f: A \to \mathbb{Q} \quad f(a) =$ razionale in $[a, a')$

Oss: Posso definire f ~~po~~ senza usare A.C. posso per esempio enumerare $\mathbb{Q}$ e prendere il minimo per questa enumerazione in ciascun intervallo.

$\Rightarrow f$ è $\quad \Rightarrow \quad |A| \leq \aleph_0 \quad \Rightarrow ot(A) < \omega_1$

Teorema: Sia $(A, <_A)$ un ordine totale numerabile. $\Rightarrow \exists f: A \to \mathbb{R}$ isomorfismo d'ordine tra $(A, <_A)$ e $(\mathrm{Im} f, <_{\mathbb{R}})$

anzi $\exists f: A \to \mathbb{Q}$ isomorfismo d'ordine tra $(A, <_A)$ e $(\mathrm{Im} f, <_{\mathbb{R}})$

La dimostrazione non è banale e la rimandiamo.

Torniamo alle cofinalità:

$cf(\omega + \omega) = \omega$

$cf(\omega + 1) = 1 \quad$ (poiché $cf(\alpha) = 1 \Leftrightarrow \alpha$ ha massimo: il massimo di $\omega + 1$ è ω)

$cf(\aleph_\omega) = \omega \quad (f: \omega \to \aleph_\omega)$

$cf(\mathcal{J}_\omega) = \omega \qquad \left(\begin{array}{l} f: \omega \to \mathcal{J}_\omega \\ \quad n \mapsto \mathcal{J}_n \end{array} \right)$

Domanda: $\exists$ ordinali con cofinalità maggiore di ω?

Oss: $f: \alpha \to \beta$ cofinale. $\Rightarrow cf(\beta) \le \alpha$.

Esercizio. $f: \alpha \to \beta$ cofinale. $g: \beta \to \gamma$ cofinale. $\overset{?}{\Rightarrow}$ $g \circ f$ è cofinale?

Dim. In generale no:

$$f: \omega \to \omega \qquad g: \omega \to \omega$$
$$n \mapsto 2n \qquad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

f, g sono cofinali, ma $g \circ f \equiv 0$.

Esercizio: $\left. \begin{array}{l} f: \alpha \to \beta \text{ cofinale e (crescente)} \\ g: \beta \to \gamma \text{ cofinale e crescente} \end{array} \right\} \Rightarrow g \circ f$ è cofinale (e crescente). $\leftarrow$ Oss: Basta che sia g crescente.

Dim: $x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$
$a \le b \quad g(a) \le g(b)$

Sia $c \in \gamma$. $\underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ è cofinale}}}{\Rightarrow} \exists b \in \beta$ t.c. $g(b) \ge c$.

f è cofinale $\Rightarrow \exists a \in \alpha$ t.c. $f(a) \ge b \underset{\substack{\uparrow \\ g \text{ è crescente}}}{\Rightarrow} g(f(a)) \ge g(b) \ge c$.

$\Rightarrow g \circ f$ è cofinale $\square$

Esercizio. $f: \alpha \to \beta$ cofinale. $\Rightarrow \exists g: \alpha \to \beta$ crescente.

Dim: In generale no!

$f: \omega+1 \to \omega$ biunivoca ($\Rightarrow$ quindi cofinale) : esiste poiché $|\omega+1| = |\omega|$

Oss: Una funzione biunivoca è necessariamente cofinale.

$\exists g: \omega+1 \to \omega$ cofinale e crescente. Vediamo l'assurdo:

- Metodo 1: $g(\omega) = n \in \omega$.

  g è cofinale $\Rightarrow \exists m \in \omega+1$ t.c. $g(m) = n+1$
  $m \neq \omega \Rightarrow m < \omega \qquad$ ma $g(m) > g(\omega) \Rightarrow g$ non è crescente.

- Metodo 2: $\exists g: \omega+1 \to \omega$ cofinale e crescente. $\exists h: 1 \to \omega+1$ cofinale.

  $\Rightarrow g \circ h: 1 \to \omega$ è cofinale $\Rightarrow cf(\omega) = 1 \Rightarrow \omega$ ha massimo ASSURDO!

Teorema: $\boxed{\forall \beta, \ \exists f: cf(\beta) \to \beta \text{ cofinale e crescente.}}$

Dim:

OSS: $\beta = \alpha+1$ è successore allora il teorema è banale: infatti $cf(\beta)=1$ poiché α è il massimo di β.

lo cofinalità dei successori è sempre 1.

$\Rightarrow f: 1 \to \beta$ è cofinale e crescente.
$0 \longmapsto \alpha$

Sia β limite. Sia $g: cf(\beta) \to \beta$ cofinale. (esiste per def. di cofinalità).

Definiamo f per ricorsione: per il Teorema di ricorsione, è ben definita $f: cf(\beta) \to ON$

$$\forall \eta < cf(\beta), \quad f(\eta) = \max\left\{ g(\eta), \ \sup_{\xi<\eta} (f(\xi)+1) \right\}$$

$\Rightarrow f$ è cofinale. Infatti: Sia $\theta \in \beta \Rightarrow \exists \eta$ t.c. $g(\eta) \geq \theta \Rightarrow f(\eta) \geq g(\eta) \geq \theta$.

Inoltre $\operatorname{Im} f \subseteq \beta$, cioè:

$$\eta < cf(\beta) \Rightarrow f(\eta) < \beta.$$

Per assurdo $\exists$ $\eta < cf(\beta)$ t.c. $f(\eta) < \beta$. Sia η il minimo di tali ordinali.

$\Rightarrow \forall \xi < \eta, \ f(\xi) < \beta. \Rightarrow f(\xi)+1 < \beta$ (poiché β è limite).

$\Rightarrow \sup_{\xi<\eta} (f(\xi)+1) \leq \beta$. Devo mostrare che vale la diseguaglianza stretta:

Per assurdo $\sup_{\xi<\eta} (f(\xi)+1) = \beta. \Rightarrow \phi: \eta \to \beta$ sarebbe cofinale.
$\xi \longmapsto f(\xi)+1$

Infatti, $\forall \gamma \in \beta, \ \exists \xi < \eta$ t.c. $f(\xi)+1 > \gamma$ poiché $\beta = \sup_{\xi<\eta} (f(\xi)+1)$, cioè ϕ è cofinale.

$\Rightarrow cf(\beta) \leq \eta < cf(\beta)$ ASSURDO!

$\Rightarrow \sup_{\xi<\eta} (f(\xi)+1) < \beta \ \underset{g(\eta)<\beta}{\Rightarrow} \ f(\eta) < \beta.$

$\Rightarrow f: cf(\beta) \to \beta$ cofinale e crescente

OSS: $\boxed{\sup_{\xi\in\eta} \alpha_\xi = \gamma \Rightarrow cf(\gamma) \leq \eta}$ Infatti: $\Phi: \eta \to \gamma$ è cofinale per definizione di limite
$\xi \longmapsto \alpha_\xi$

$\Rightarrow cf(\gamma) \leq \eta$ □

Teorema: $\boxed{cf(\aleph_1) = \aleph_1, \quad cf(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}}$

Def: Un cardinale che coincide con la propria cofinalità si dice REGOLARE.

OSS: Dal teorema segue che i cardinali successori sono regolari.

Oss: I cardinali limite possono essere o no regolari.

Esempio:

~~Esercizio~~ $cf(\aleph_\omega) = \underset{\aleph_\omega}{\omega}$ (con $\omega \neq \aleph_\omega$) $\Rightarrow$ $\aleph_\omega$ non è regolare.

Se invece $\alpha = \aleph_\alpha \Rightarrow \alpha$ è regolare (poiché $cf(\aleph_\alpha) = \alpha = \aleph_\alpha$)

Oss: $\forall \alpha \in ON$, $cf(\alpha)$ è un cardinale regolare, cioè $\boxed{cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)}$

Dim. [$cf(\alpha)$ è un cardinale.
Per assurdo $\exists k < cf(\alpha)$, $\exists f: k \to cf(\alpha)$ biunivoca. In particolare f è cofinale.
$\Rightarrow cf(cf(\alpha)) \leq k$.]

Sia $g: cf(\alpha) \to \alpha$ cofinale e $h: cf(cf(\alpha)) \to cf(\alpha)$ cofinale.

Posso assumere g e h crescenti per il teorema.

$\Rightarrow g \circ h$ è cofinale e crescente

$$g \circ h : cof(cof(\alpha)) \longrightarrow \alpha$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow cf(\alpha) \leq cf(cf(\alpha)) \\ \text{Sia } id: cf(\alpha) \longrightarrow cf(\alpha) \Rightarrow \text{è cofinale.} \\ \Rightarrow cf(cf(\alpha)) \leq cf(\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$$

Oss: $\left.\begin{array}{l} id: \alpha \to \alpha \\ \text{cofinale} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{cf(\alpha) \leq \alpha \quad \forall \alpha}.$

Prop. $(A,<)$ insieme ben ordinato e numerabile $\Rightarrow$ A è isomorfo ad un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

DI NASSO 18-05

La proposizione è un corollario di un risultato più generale.

Teorema (di Cantor). $(A,<)$ ordine totale numerabile $\Rightarrow$ $\exists$ $(A,<)$ è immergibile in $\mathbb{R}$.

Dim. A numerabile $\Rightarrow$ lo enumero $A = \{a_1, \dots\} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Posso utilizzare l'induzione su $\mathbb{N}$ per dimostrare che $\exists$ $\varphi_n : \{a_0, \dots, a_n\} \to [-n,n] \cap \mathbb{Q}$ t.c. $\varphi_{n+1}|_{\{a_0,\dots,a_{n-1}\}} = \varphi_n$

$n=0$: $a_0 \longmapsto 0$

$a_1 \longmapsto -1$ se $a_1 < a_0$; 1 se $a_1 > a_0$.

$a_2 \longmapsto 2$ se $a_2 > a_0,\ a_2 > a_1$; -2 se $a_2 < a_0,\ a_2 < a_1$; $\dfrac{\varphi_1(a_0)+\varphi_1(a_1)}{2}$ se $a_0 < a_2 < a_1$ o $a_1 < a_2 < a_0$ cioè a_2 è compreso tra a_1 e a_0

$\varphi_2(a_2) \in [-2,2]$

$n>0$: passo induttivo.

$a_{n+1} \longmapsto$
- $n+1$ se $a_{n+1} > a_n, \dots, a_0$
- $-n-1$ se $a_{n+1} < a_n, \dots, a_0$
- $\dfrac{\varphi_n(a_i)+\varphi_n(a_j)}{2}$ se $\exists$ $i,j \le n$ t.c. $a_i < a_{n+1} < a_j$, in modo che tra a_i e a_{n+1} e tra a_{n+1} e a_j non ci sia nessun altro a_k con $k \le n$.

Oss: In questo modo mantengo l'ordine.

$\Rightarrow$ φ è definita su ogni n (per induzione).

P. costruire φ usiamo
1. illimitatezza di $\mathbb{Q}$.
2. densità di $\mathbb{Q}$.

$\rightsquigarrow$ questa dimostrazione va bene per qualsiasi insieme che sia illimitato e denso.

Teorema: Due ordini numerabili densi senza massimo e minimo sono isomorfi (a $\mathbb{Q}$).

Dim: $(A,<) \hookrightarrow (B,<)$, $(B,<) \hookrightarrow (A,<)$ $\Big\}\ \overset{?}{\Rightarrow}\ \exists\ (A,<) \xrightarrow{\cong} (B,<)$

da dimostrare $\rightsquigarrow$ Abbiamo bisogno di BACK-&-FORTH

Prendo un elemento di A e lo butto in B, poi ne prendo uno di B e lo butto in A ....
$\rightsquigarrow$ In questo modo la funzione che costruisco è iniettiva.

$A = \{a_n\}$
$B = \{b_n\}$

$a_0 \overset{\varphi}{\longleftrightarrow} b_j$ con b_j un qualsiasi elemento di B.

$b_0 \longmapsto$ se $b_0 < b_1$ a_i dove $a_i \not< a_0$; se $b_0 > b_1$

Ai lo posso scegliere a voglia.

senza utilizz. A.C., posso scegliere (se $b_0 < b_1$)

$i = \min\{k \mid a_k > a_0\}$

e pone $\varphi(b_1) = a_i$ ↑ esiste perché l'insieme è senza massimo

Per ipotesi induttiva, suppongo di aver definito

$a_0 \longleftrightarrow ?$ ... $a_n \longleftrightarrow ?$ $\qquad$ $b_0 \longleftrightarrow ?$ ... $b_n \longleftrightarrow ?$

Considero $n+1$.

Se a_{n+1} è già stato sistemato, cioè $a_{n+1} = \varphi(b_i)$ $i \leq n$, allora non faccio nulla.
Altrimenti definisco $\varphi(a_{n+1})$ come prima: per esempio descrivo il passo 4:

$a_0 \longrightarrow b_7$ $\qquad$ $b_0 \longrightarrow a_4$

$a_1 \longrightarrow b_{13}$ $\qquad$ $b_1 \longrightarrow a_{12}$

$a_2 \longrightarrow b_8$ $\qquad$ $b_2 \longrightarrow a_3$

$a_3 \longrightarrow b_{17}$ $\qquad$ $b_3 \longrightarrow a_7$

Definisco $\varphi(a_4)$. Guardo la posizione di a_4 rispetto a $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_{12}, a_3, a_7$ (1)
→ non faccio nulla.

Guardo b_4. Guardo la posizione di b_4 rispetto a $b_0, b_1, b_2, b_3, b_7, b_{13}, b_8, b_{17}$
Se b_4 è più grande di tutti lo mando in un a_i che sia più grande di tutti (1).

PASSO INDUTTIVO: Suppongo di aver già definito, $\varphi(a_i), \varphi^{-1}(b_i)$ $\forall i = 0, \dots, n$.

Considero a_{n+1}: se $a_{n+1} \in \{\varphi^{-1}(b_0), \dots, \varphi^{-1}(b_n)\}$.

$$\Rightarrow a_{n+1} = \varphi^{-1}(b_i) \Rightarrow \varphi(a_{n+1}) = b_i$$

altrimenti, come nel teorema precedente, cerco l'intervallo determinato da $\Gamma = \{a_0, \dots, a_n, \varphi^{-1}(b_0), \dots, \varphi^{-1}(b_n)\}$ con a_{n+1} in tale intervallo.

$a_{n+1} \in (\delta, \beta)$ $\quad \delta, \beta \in \Gamma$
$\Rightarrow \exists\, b_h$ t.c. $\varphi(\delta) < b_h < \varphi(\beta)$ e definisco $\varphi(a_{n+1}) = b_h$

Analogamente con b_{n+1}

∎

Esercizio: Sono equivalenti

$\beta, \gamma < \alpha \Rightarrow \beta + \gamma < \alpha$

$\beta < \alpha \Rightarrow \beta + \alpha = \alpha$

Si: con ω funziona.

$\exists\, \delta$ t.c. $\alpha = \omega^\delta$

Esercizio:

$\alpha + \beta = \beta \Leftrightarrow \beta \geq \alpha \cdot \omega$

Dim: (2) $\Rightarrow$ (1): $\beta, \gamma < \alpha \Rightarrow \beta + \gamma < \beta + \alpha \overset{(2)}{=} \alpha$

(1) $\Rightarrow$ (3): Per assurdo, $\exists\, \xi$ t.c. $\omega^\xi < \alpha < \omega^{\xi+1}$ (scelto ragionevolmente! $\Gamma = \{\xi \mid \omega^\xi > \alpha\}$ $\Rightarrow$ il minimo di Γ è successore)

$$\Rightarrow \exists\, n \text{ t.c. } \omega^\xi \cdot n < \alpha \leq \omega^\xi (n+1)$$

$$\underset{\alpha}{\underset{\wedge}{\omega^\xi \cdot n}} + \underset{\alpha}{\underset{\wedge}{\omega^\xi}} = \omega^\xi (n+1) \geq \alpha \quad \text{ASSURDO!}$$

(3) $\Rightarrow$ (2): $\beta \lneq \omega^\delta \Rightarrow \exists\, \gamma < \delta$ t.c. $\omega^\gamma \leq \beta < \omega^{\gamma+1}$ (finire per esercizio).

BERARDUCCI

20-05

Oss. $cf(\beta)=1 \Rightarrow \beta$ è ordinale successore.

Oss. $\beta=\gamma+1 \iff \max\beta=\gamma$.

Teorema: $\forall\beta, \exists f: cf(\beta)\to\beta$ crescente e cofinale.

Def: β è regolare se $cf(\beta)=\beta$.

Esempio: ω è regolare, $\omega+\omega$ no ($cf(\omega+\omega)=\omega$).

Oss: $f:\alpha\to\beta \Rightarrow f$ cofinale.

~~Corollario~~ Oss: $f:\alpha\to\beta$ cof. $\Rightarrow cf(\beta)\le\alpha$.

Corollario: $\forall\beta\in ON$. $\exists f: |\beta|\to\beta$ biunivoca $\Rightarrow f$ è cofinale

$\Rightarrow cf(\beta)\le|\beta|$.

Esempio. $cf(\aleph_\omega)=\omega$ ma $\Rightarrow cf(\aleph_\omega)<|\aleph_\omega|$

$cf(\beta)\le|\beta|\le\beta$.

Oss: Se β è regolare $\Rightarrow cf(\beta)=|\beta|=\beta \Rightarrow \beta$ è cardinale.

Oss: α è limite $\Rightarrow cf(\aleph_\alpha)=cf(\alpha)$

Dim:

Sia $f: cf(\alpha)\to\alpha$ crescente.

Sia $g: cf(\alpha)\longrightarrow\aleph_\alpha \Rightarrow g(i)=\aleph_{f(i)}$ è cofinale.

Esempio. $cf(\aleph_{\omega+\omega})=cf(\omega+\omega)=\omega$

$n\mapsto\omega+n\mapsto\aleph_{\omega+n}$

Esercizio: Sotto quali condizioni α e β hanno la stessa cofinalità.

Teorema: $\forall\alpha$, $\aleph_{\alpha+1}$ è regolare cioè $cf(\aleph_{\alpha+1})=\aleph_{\alpha+1}$

Dim:

Oss: $cf(\beta)\le\beta\quad\forall\beta$.

Per assurdo, $\gamma \doteq cf(\aleph_{\alpha+1})<\aleph_{\alpha+1}$. Sia $f:\gamma\longrightarrow\aleph_{\alpha+1}$ f cofinale e crescente.

$\sup_{i<\gamma} f(i)=\aleph_{\alpha+1}$ per definizione di cofinalità: $\aleph_{\alpha+1}$ è limite.

$= \bigcup_{i<\gamma} f(i)$

$$\Rightarrow \Big|\bigcup_{i<\gamma} f(i)\Big| \le \sum_{i<\gamma}|f(i)| = \underbrace{|\gamma|}_{\wedge\ |\aleph_{\alpha+1}|}\cdot\sup_{i<\gamma}|f(i)| \le \aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha \text{ ASSURDO!}$$

$\aleph_{\ldots}$ $\qquad |\aleph_{\alpha+1}| \Rightarrow |\gamma|\le|\aleph_\alpha|$ $\qquad [\xi<\aleph_{\alpha+1}\Rightarrow|\xi|\le|\aleph_\alpha|]$

Teorema di König: $\alpha_i < \beta_i$ cardinali ~~infiniti~~ $\Rightarrow \sum_{i\in I} \alpha_i < \prod_{i\in I} \beta_i$

Esempio: $\underset{\substack{\| \\ |I|}}{\sum_{i\in I} 1} < \prod_{i\in I} 2 = 2^{|I|}$

Ha applicazioni nella cofinalità.

Def: ~~Teorema~~ Un cardinale k è ~~regolare~~ Σ-regolare se $\forall$ famiglia $(A_i \mid i\in I)$ $|A_i|<k, |I|<k$

$$\Rightarrow \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| < k$$

(non lo posso raggiungere da sotto). $\rightarrow$ per es. ω

Teorema: Un cardinale è Σ-regolare $\Leftrightarrow$ è regolare.

Oss: Un ordinale regolare è cardinale.

Dim ($\Leftarrow$): Per assurdo. Sia k non Σ-regolare $\Rightarrow \exists A_i$ t.c. $k = \bigcup_{i\in I} A_i$ con $|A_i|<k$; $|I|<k$

Posso assumere che k sia cardinale (a meno di rienumerare I)

Sia $f: I \longrightarrow k$
$i \longmapsto |A_i|$ $\qquad f(i) = \bigcup_{j\in i} A_j$

$k = |k| = \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq |I| \cdot \sup_{i\in I} |A_i| \Rightarrow \sup_{i\in I} |A_i| = k$ (altrimenti il prodotto sarebbe $<k$)

$\Rightarrow i \longmapsto |A_i|$ è cofinale.

$\Rightarrow cf(k) \leq |I| = I < k \Rightarrow k$ non è regolare.

Oss: I insieme. $f: I\to k$ $\quad k = \sup_{i\in I} f(i) \Rightarrow cof(k) \leq |I|$. ($\Rightarrow$ posso considerare I come cardinale)

Dimostrare per esercizio.

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & k \\ \cong \uparrow h & \nearrow & \\ |I| & \tilde{f} = f\circ h & \end{array}$$

$\Rightarrow$ considero $\tilde{f} = f\circ h$

($\Rightarrow$) Se k non è regolare $\Rightarrow cf(k) < k$. $\quad f: cf(k) \to k$ cofinale.

$\Rightarrow k = \bigcup_{i\in cf(k)} f(i)$

$f(i)\in k$ e k è iniziale $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} |f(i)|<k. \\ |cf(k)|<k \end{array}\right\} \Rightarrow k$ non è Σ-regolare poiché è unione di oggetti di cardinalità inferiore su un insieme di cardinalità inferiore

Teorema. $cf(2^k) > k$. $\forall k$ cardinale.

Oss: Sappiamo che $2^k > k$

Dim: Per assurdo, $cf(2^k) \leq k$. $\Rightarrow \exists f: cf(2^k) \longrightarrow 2^k$ cofinale

$\Rightarrow$ $\exists g: k \rightarrow 2^k$ cofinale. $\Rightarrow 2^k = \bigcup_{i \in k} g(i)$

$\left.\begin{array}{l}\exists \alpha \rightarrow \beta \text{ cofinale} \\ \gamma > \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \exists f: \gamma \rightarrow \beta$ cofinale (la estendo in modo arbitrario)

Vogliamo applicare König,

$$2^k = \left|\bigcup_{i \in k} g(i)\right| \leq \sum_{i \in k} \underbrace{|g(i)|}_{< 2^k} \underset{\text{König}}{<} \prod_{i \in k} 2^k = (2^k)^k = 2^{k \cdot k} = 2^k$$

ASSURDO!

$\square$

Oss. Non sappiamo se è regolare.

In particolare, scegliendo $k = \omega$, ottengo $cf(2^{\aleph_0}) > \omega$

Siccome $cf(\aleph_\omega) = \omega \Rightarrow \underset{|\mathbb{R}|}{2^{\aleph_0}} \neq \aleph_\omega \Rightarrow |\mathbb{R}| \neq \aleph_\omega$

ipotesi del continuo (di Cantor) (C.H.) : $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (?)

Oss: $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1 = \min\{\alpha \mid \alpha > \aleph_0\}$ e $2^{\aleph_0} > \aleph_0$

ipotesi generalizzata del continuo (G.C.H.) $2^k = k^+$

Gödel nel 1941 ha dimostrato che $ZFC \not\vdash \neg CH$

Cohen nel 1963 ha dimostrato che $ZFC \not\vdash CH$

$\Rightarrow$ Dagli assiomi non deriva CH, la teoria di Zermelo Fraenkel è troppo debole per derivare l'ipotesi del continuo.

Oss: $CH \Rightarrow \forall X \subseteq \mathbb{R}$ infinito $|X| = \aleph_0$ o $|X| = \mathbb{R}$

Da CH, deriva che non ci sono cardinalità intermedie tra $\aleph_0$ e $\aleph_1$: se ci fosse $X \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $|X| \neq \aleph_0$ e $|X| \neq \mathbb{R} \Rightarrow |X| = \aleph_1$.

Infatti se $|X| \leq |\mathbb{R}| \Rightarrow \exists f: X \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $|X| = |\mathrm{Im} f| \subset \mathbb{R}$.

Oss: Cantor ha dimostrato che se X è chiuso $\Rightarrow |X| = \aleph_0$ o $|X| = c$.
Vale anche con i boreliani $\rightarrow$ se c'è un esempio contro CH deve essere molto patologico.

Oss: $CH \Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ ma in generale noi sappiamo che $2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$

CARDINALE INACCESSIBILE

Def: κ cardinale è inaccessibile se
(1) $cf(\kappa)=\kappa$ (non si può raggiungere per unioni da sotto)
(2) $\forall \gamma<\kappa$, cardinale $\Rightarrow 2^{\gamma}<\kappa$.

Esempio: $\kappa=\omega$ è inaccessibile.

Oss: $ZFC \not\to \exists \kappa>\omega$ inaccessibile
$ZFC \not\to \neg\exists \kappa>\omega$ inaccessibile.

GERARCHIA di VON NEUMANN

Def: $\begin{cases} V_0=\phi \\ V_{\alpha+1}=\mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} V_\gamma \end{cases}$ ← Dobbiamo giustificare $\alpha\in ON \mapsto V_\alpha$ ~~nonché~~ è una funzione classe → si fissa un β arbitrario e si definisce per $\alpha<\beta$.

Sia $WF = \bigcup_{\alpha\in ON} V_\alpha$ well founded.

Esercizio: assioma di fondazione $\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ $V=WF$ $(\forall x, \exists\alpha$ t.c. $x\in V_\alpha)$ classi

Def: $\rho(x)=\min\{\alpha\in ON \mid x\subseteq V_\alpha \Leftrightarrow x\in V_{\alpha+1}\}$ rango di x.

Esempio: $\rho(\phi)=0$

	Cardinalità
$V_0=\phi$	0
$V_1=\mathcal{P}(V_0)=\{\phi\}$	1
$V_2=\{\phi,\{\phi\}\}$	2
$V_3=\mathcal{P}(V_2)=\{\{\phi,\{\phi\}\},\phi,\{\{\phi\}\},\{\phi\}\}$	4
$V_4=\mathcal{P}(V_3)$	2^4
$V_\omega=\bigcup_n V_n$.	

Mostrare che $0\subseteq V_0$, $0\in V_1$; $1\subseteq V_1$, $2\subseteq V_2$, $3\subseteq V_3$ ...., $n\in V_{n+1}$ (per ind. su n)

Esercizio: $V_0\subset V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_\omega$

Esercizio: $\omega\subseteq V_\omega \Rightarrow \omega\in V_{\omega+1} \Rightarrow \mathcal{P}(\omega)\in V_{\omega+2}$

Esercizio: $\alpha<\beta \Rightarrow V_\alpha\subset V_\beta$ e $V_\alpha\in V_\beta$ (sono transitivi!)

$\mathbb{Z} = \langle m, n \rangle_E \quad \leftarrow m - n$

$\mathbb{Q} = \langle m, n \rangle_{E'} \quad \leftarrow \frac{m}{n}$

$\mathbb{R} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ identificando $\quad x \longleftrightarrow \{ y \in \mathbb{Q} \mid y < x \}$.

$\Rightarrow \mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$

Oss: Tutta la matematica sta in $V_{\omega+\omega}$

Se si ridefinisce insieme come un elemento di $V_{\omega+\omega}$, allora tutti questi insiemi soddisfano ZFC eccetto l'assioma di rimpiazzamento.

Esercizio: V_α è transitivo

Esercizio. $X \in Y \Rightarrow \rho(X) < \rho(Y)$ ~~[illegible]~~ (ammesso che esista il rango)

Esercizio: $\rho(y) = \sup \{ \rho(x) + 1 \mid x \in y \}$ (per induzione)

OSS: assioma di fondazione $\Rightarrow$ ogni insieme ha rango.

(1) Dim:

$(\Leftarrow) \Rightarrow \forall x, \exists \alpha$ t.c. ~~$x \in \rho(\alpha)$~~ $\alpha = \rho(x)$.

$\Rightarrow \nexists \; x_1 \ni x_2 \ni \dots$ catene discendenti infinite.

se no $\quad \rho(x_1) > \rho(x_2) > \dots$

Ma $\quad X = \{x\}$ non può comparire nella gerarchia.

Esercizio: $|V_\alpha| = ?$