Esercizio. $X \subseteq \mathbb{R}$ infinito e chiuso $\Rightarrow$ $|X| = \aleph_0$ o $|X| = c$.

BERARDUCCI
23-05-11

Dim.

Def. $X \subseteq \mathbb{R}$. $y \in X$ è isolato se $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $B(y,\varepsilon) \cap X = \{y\}$

Esempio: · $\mathbb{Q}$ non ha p.ti isolati.

· $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ $\Rightarrow$ tutti i p.ti di X eccetto lo zero sono isolati.

Oss. Se definisco $X' = X \setminus \{\text{p.ti isolati di } X\}$ potrei avere ancora dei p.ti isolati.

Per esempio: $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ $\Rightarrow$ $X' = \{0\} \Rightarrow X'' = \emptyset$

0 è p.to isolato di X'

Def. $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice perfetto se è chiuso e non ha p.ti isolati $(X' = X)$.

Esempio: · $X = \mathbb{R}$ è perfetto

· $X = \mathbb{Q}$ non è perfetto in $\mathbb{R}$ poiché $\mathbb{Q}$ non è chiuso in $\mathbb{R}$.

· $X = [0,1]$ è perfetto.

· $X = \mathcal{C}$ insieme di Cantor è perfetto.

Teorema: $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$ X perfetto $\Rightarrow |X| = c$.

Dim: $X \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, p_0 \in X$. p_0 non è l'unico p.to di X perché se no p_0 sarebbe isolato.

Sia $p_1 \in X$, $p_1 \neq p_0$. X è T_2 $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0$ t.c.

$$\overline{B(p_0,\varepsilon_0)} \cap \overline{B(p_1,\varepsilon_0)} = \emptyset$$

Sia $X_0 = \overline{B(p_0,\varepsilon_0)} \cap X$, $X_1 = \overline{B(p_1,\varepsilon_0)} \cap X$. $\Rightarrow$ $X_0 \subseteq X$, $X_1 \subseteq X$ e $X_0 \cap X_1 = \emptyset$.

X_0, X_1 sono chiusi e p_0, p_1 non sono isolati in X_0 e X_1 (altrimenti sarebbero isolati in X).

$\Rightarrow$ $\exists\, p_{00}, p_{01}$ distinti in $X_0 \setminus \partial X_0$

$\exists\, p_{10}, p_{11}$ distinti in $X_1 \setminus \partial X_1$.

Scelgo $\epsilon_1 > 0$ con $\overline{B(p_{00},\epsilon_1)} \cap \overline{B(p_{01},\epsilon_1)} = \emptyset$ e

$$\overline{B(p_{00},\epsilon_1)} \subseteq B(p_0,\epsilon_0)$$
$$\overline{B(p_{01},\epsilon_1)} \subseteq B(p_0,\epsilon_0)$$

e in modo analogo per p_{10} e p_{11}.

Chiamo:

$$X_{00} = \overline{B(p_{00},\epsilon_1)} \cap X_0 \qquad X_{01} = \overline{B(p_{01},\epsilon_1)} \cap X_0$$

e in modo analogo X_{10}, X_{11}.

In generale, costruisco palle B_σ con σ successione binaria finita t.c.

$$\overline{B_{\sigma 0}} \subseteq B_\sigma \qquad \overline{B_{\sigma 1}} \subseteq B_\sigma \quad \forall \sigma.$$

e ad ogni passo il centro $\in X$.

Denotiamo con $[\omega \to 2]$ = {successioni binarie finite}.

Definisco

$$f : [\omega \to 2] \longrightarrow X$$
$$\vartheta \longmapsto \lim\ (\text{centro di } B_{\vartheta|_m})$$

Tale limite esiste poiché per esempio ad ogni passo posso scegliere $\varepsilon < 1/2^n$.

Poiché X è chiuso, tale limite $\in X$.

f è ~~suriettiva~~ iniettiva: se $\theta_1 \neq \theta_2$, esiste un indice diverso: da lì in poi la successione vive in palle disgiunte.

$\Rightarrow |X| \geq c$. D'altra parte $X \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow |X| \leq c \Rightarrow |X| = c$ ■

Teorema: $X \subseteq \mathbb{R}^m$ chiuso. $\Rightarrow X = P \sqcup N$ con P perfetto (eventualmente vuoto) e $|N| \leq \aleph_0$.

Corollario: $X \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso $\Rightarrow |X| =$ finito, $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$.

Dimostrazione (del teorema):

Nota storica: questa dimostrazione è dovuta a Cantor ed essa è quella che ha portato all'introduzione degli ordinali.

Sia $X_0 = X$ $\quad X_{n+1} = X_n'$ $\quad X' = X \setminus \{\text{p.ti isolati di } X\}$.

- Se $\exists n$ t.c. $X_{n+1} = X_n$ $\forall n$ $\Rightarrow$ X_n è perfetto.

  Poiché l'insieme dei p.ti isolati di un insieme è al più numerabile, dopo n-passi ho tolto n insiemi misurabili, quindi

$$X = \underbrace{X_n}_{\text{perfetto}} \cup \underbrace{\bigcup_{i<n} \{\text{p.ti isolati di } X_i\}}_{\text{numerabile}} \quad \text{e la tesi è dimostrata.}$$

- $X_{n+1} \subsetneq X_n$ $\forall n$. Sia $X_\omega = \bigcap_n X_n$

  Definiamo induttivamente $\forall \alpha \in ON$,

$$\begin{cases} X_0 = X \\ X_{\beta+1} = (X_\beta)' \\ X_\lambda = \bigcap_{\beta<\lambda} X_\beta \quad \text{se } \lambda \text{ è limite} \end{cases}$$

$\rightarrow$ è ben definito per il teorema di ricorsione sugli ordinali.

Oss: $\forall \alpha < \beta$, $X_\alpha \supseteq X_\beta$

Procedo per induzione su β.

- $\beta = 0$. ✓.
- $\beta = \gamma+1 \Rightarrow X_\beta = X_{\gamma+1} = (X_\gamma)' \subseteq X_\gamma$

$$\alpha<\beta \Rightarrow \alpha \leq \gamma \Rightarrow X_\gamma \subseteq X_\alpha \Rightarrow X_\beta \subseteq X_\gamma \subseteq X_\alpha.$$

- $\beta = \lambda$ limite $\Rightarrow X_\beta = \bigcap_{\xi<\beta} X_\xi \subseteq X_\alpha \quad \forall \alpha<\beta$

Oss: X_α è chiuso $\forall \alpha$. (Si dimostra formalmente per induzione su α utilizzando il risultato di topologia per cui: Y chiuso $\Rightarrow Y'$ chiuso)

$\Rightarrow \exists \gamma \in ON$ t.c. $X_\gamma = X_{\gamma+1}$. Infatti se per assurdo $\forall \alpha \in ON$, fosse $X_{\alpha+1} \subsetneq X_\alpha$, allora $\forall \alpha$

$\exists p_\alpha \in X_\alpha \setminus X_{\alpha+1} \Rightarrow p_\alpha \neq p_\beta \; \forall \alpha \neq \beta$

Ma allora la funzione classe

$$F: ON \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{è iniettiva.}$$
$$\alpha \longmapsto P_\alpha$$

$\Rightarrow Z \doteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \alpha \text{ t.c. } P_\alpha = x\}$ è insieme

$\forall x \in Z$, sia α_x l'unico ordinale t.c. $P_{\alpha_x} = x$.

$\Rightarrow$ $\{\alpha_x \mid x \in Z\}$ è un insieme per rimpiazzamento $\Rightarrow$ ON è un insieme ASSURDO!

Avrei anche che $|\{\alpha_x \mid x \in Z\}| \leq c$.

$\Rightarrow \exists \gamma$ t.c. $X_\gamma = X_{\gamma+1}$. $\Rightarrow X_\gamma$ è perfetto. e

$$X = P \cup \underbrace{\bigcup_{\xi < \gamma} \{\text{p.ti isolati di } X_\xi\}}_{=: N}$$

Concludiamo dimostrando che N è numerabile.

Dato $y \in N$, definisco

$$\xi_y = \min\{\xi \mid y \in \{\text{p.ti isolati di } N_\xi\}\}$$

Sia $B(y)$ palla di centro y e raggio razionale t.c. $B(y) \cap X_{\xi_y} = \{y\}$

Sia $\phi: y \longmapsto B(y)$ $\qquad \phi: N \longrightarrow \{\text{palle di centro e raggio razionale}\}$.

Osserviamo che $\{\text{palle di centro e raggio razionale}\}$ è numerabile (unione numerabile di numerabili)

ϕ è iniettiva: Siano $y_1 \neq y_2$. Consideriamo ξ_{y_1} e ξ_{y_2}.

- Se $\xi_{y_1} = \xi_{y_2} \Rightarrow \xi_y \doteq \xi_{y_1} = \xi_{y_2}$

  Se $B(y_1) = B(y_2) \Rightarrow \{y_1\} = B(y_1) \cap X_{\xi_y} = B(y_2) \cap X_{\xi_y} = \{y_2\} \Rightarrow y_1 = y_2$ no

- Se $B(y_1) = B(y_2) \doteq B$. Sia $\xi_{y_1} < \xi_{y_2} \Rightarrow X_{\xi_{y_2}} \subseteq X_{\xi_1}$

$$\{y_1\} = B \cap X_{\xi_{y_1}}$$
$$\{y_2\} = B \cap X_{\xi_{y_2}} \qquad \text{ma } \{y_1\} = B \cap X_{\xi_{y_1}} \supseteq B \cap X_{\xi_{y_2}} = \{y_2\}$$

$\Rightarrow \{y_1\} \supseteq \{y_2\} \Rightarrow \{y_1\} = \{y_2\} \Rightarrow y_1 = y_2$ no!

∎

Teorema: $\boxed{\text{Assioma di fondazione} \iff \forall x\ \exists\alpha\ \text{t.c. } x\in V_\alpha \quad \left(\text{cioè} \quad V = \bigcup_{\alpha\in ON} V_\alpha\right)}$

→ Le classi sono le parti di V che non stanno in qualche V_α.

1. X transitivo $\Rightarrow \mathcal{P}(X)$ è transitivo.

Dim: $a\in b\in\mathcal{P}(X) \Rightarrow a\in b\subseteq X \Rightarrow a\in X \Rightarrow a\subset X \Rightarrow a\in\mathcal{P}(X)$ □

X è transitivo $\iff \forall a\in X,\ a\subseteq X$.

2. X_i transitivo $\forall i\in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} X_i$ è transitivo.

Dim:
$a\in b\in \bigcup_{i\in I} X_i \Rightarrow \exists j$ t.c. $a\in b\in X_j \Rightarrow a\in X_j \Rightarrow a\in \bigcup_{i\in I} X_i$.
□

3. $\forall\alpha\in ON$, V_α è ordinale.

Dim: V_α sono costruiti tramite parti e unioni.

$\alpha=0$: ✓

$\alpha=\xi+1 \Rightarrow V_\alpha=\mathcal{P}(V_\xi)$ è transitivo.

$\alpha=\lambda$-limite $\Rightarrow V_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} V_\xi$ è transitivo. □

Lemma: X transitivo $\Rightarrow X\subset\mathcal{P}(X)$

Dim: $a\in X\in\mathcal{P}(X) \Rightarrow a\in\mathcal{P}(X) \Rightarrow X\subset\mathcal{P}(X)$ □

4. $\forall\xi\le\alpha \Rightarrow V_\xi\subseteq V_\alpha$

Dim: Per ind. su α. $\xi=\alpha$ ovvio $\Rightarrow$ Assumo che $\xi<\alpha$

$\cdot\ \alpha=0$ ✓.

$\cdot\ \alpha=\beta+1 \Rightarrow V_\alpha=\mathcal{P}(V_\beta) \Rightarrow V_\beta\in V_\alpha$

V_α è transitivo $\Rightarrow V_\beta\subset V_\alpha$

$\xi\le\beta \Rightarrow V_\xi\subseteq V_\beta \Rightarrow V_\xi\subseteq V_\alpha$.

$\cdot\ \alpha=\lambda$-limite. $V_\lambda=\bigcup_{<\lambda} V_\beta \Rightarrow$

$\xi<\lambda \Rightarrow \exists\beta<\lambda$ t.c. $\xi<\beta \Rightarrow V_\xi\subset V_\beta \Rightarrow V_\xi\subset V_\lambda$ □

Def: $WF = \bigcup_{\alpha\in ON} V_\alpha$ = {insiemi ben fondati} è una classe (well-founded)

X è <u>ben fondato</u> $\iff \exists\alpha\in ON$ t.c. $X\in V_\alpha$

Def: Se X è ben fondato, definisco $\boxed{\rho(x)=\min\underbrace{\{\alpha\in ON \mid x\in V_{\alpha+1}\}}_{\neq\emptyset} = \min\{\alpha\in ON \mid x\subset V_\alpha\}}$ <u>rango di X</u>.

Teorema: $\boxed{V_\alpha=\{x \mid \rho(x)<\alpha\}}$

Lemma: $x\in V_\alpha \Rightarrow \exists\beta<\alpha$ t.c. $x\in V_{\beta+1}$

Dim: Se $\alpha=\xi+1$, prendo $\beta=\xi$

Se $\alpha=\lambda$ limite $\Rightarrow \exists\gamma<\alpha$ t.c. $x\in V_\gamma \Rightarrow x\in V_{\gamma+1}$ (inoltre $\beta+1<\alpha$) □

Oss: $x \in V_{\rho(x)+1}$. Inoltre se $x \in V_{\gamma+1}$ allora $\rho(x) \leq \gamma$.

Teo: $\boxed{V_\alpha = \{x \mid \rho(x) < \alpha\}}$

Dimostrazione

$$x \in V_\alpha \overset{\text{lemma}}{\iff} \exists \beta < \alpha \quad x \in V_{\beta+1} \overset{?}{\iff} \rho(x) < \alpha$$

$x \in V_{\rho(x)+1} \subset V$

?:

$(\Leftarrow)$ $\rho(x) < \alpha \Rightarrow x \in V_{\rho(x)+1} \subset V_\alpha \Rightarrow x \in V_\alpha$

$(\Rightarrow)$ ovvia per definizione di rango: $\rho(x) \leq \beta < \alpha \Rightarrow \rho(x) < \alpha$ ∎

5. $x \in y \Rightarrow \rho(x) < \rho(y)$ (supponiamo x, y ben fondati)

Dim:

$$x \in y \in V_{\rho(y)+1} = \mathcal{P}(V_{\rho(y)}) \Rightarrow x \in y \subset V_{\rho(y)}$$

$$\Rightarrow x \in V_{\rho(y)} \Rightarrow \cancel{x \in V_{\rho(y)+1} \Rightarrow \rho(x) \leq \rho(y)}$$

$$\overset{\text{(lemma)}}{\Rightarrow} \exists \beta < \rho(y) \text{ t.c. } x \in V_\beta \Rightarrow x \in V_{\beta+1} \Rightarrow$$

$$\rho(x) \leq \beta < \rho(y)$$ ∎

Oss: $x = \{x\}$ non ben fondato

$\Downarrow$?

$x \notin \bigcup_{\alpha \in ON} V_\alpha$

(dim. per esercizio)

Corollario: $y \in WF. \Rightarrow \rho(y) \geq \sup\{\rho(x)+1 \mid x \in y\}$

Dim: $x \in y \Rightarrow \rho(x) < \rho(y) \Rightarrow \rho(x)+1 \leq \rho(y)$

Oss: $\rho(y) = \sup\{\rho(x)+1 \mid x \in y\} \doteq \alpha$

Dim. Per il corollario $\rho(y) \geq \alpha$.

Viceversa, $x \in y \Rightarrow \rho(x)+1 \leq \alpha \Rightarrow \rho(x) < \alpha \overset{\text{teorema}}{\Longrightarrow} x \in V_\alpha$

$\Rightarrow y \subseteq V_\alpha \Rightarrow y \in V_{\alpha+1} \Rightarrow \rho(y) \leq \alpha$ ∎

Esercizio: X insieme $X \subset WF \Rightarrow \exists \alpha$ t.c. $X \in V_\alpha$.

Dim: Sia $\alpha = \sup \underbrace{\{\rho(y)+1 \mid y \in X\}}$ e

è insieme per rimpiazzamento: se F è funzione classe

$\{Fa \mid a \in X\}$ è insieme

$\Downarrow$

posso farne il sup: il sup di un insieme di ordinali è ordinale.

$y \in X \Rightarrow \rho(y)+1 \leq \alpha \Rightarrow \rho(y) < \alpha \Rightarrow y \in V_\alpha \Rightarrow X \subseteq V_\alpha \Rightarrow X \in V_{\alpha+1}$ ∎

Assioma di fondazione: $\forall A$, $\in$ è ben fondato su A, cioè

$$\left[\forall A,\ \forall X \neq \emptyset,\ X \subseteq A,\ \exists y \in X \text{ t.c. } \forall z \in y,\ z \notin X \text{ cioè}\right]$$

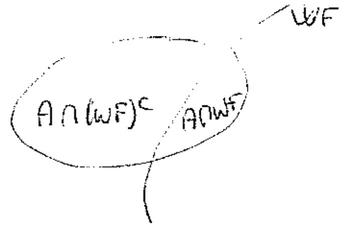
$$\forall X \neq \emptyset,\ \exists y \in X \text{ t.c. } \forall z \in y,\ z \notin X.$$

Teorema: Se A è transitivo, $\in$ ben fondato su A $\Rightarrow$ $\exists \alpha$ t.c. $A \in V_\alpha$

Dim. Basta far vedere che $A \subset WF$. Da ciò segue che $A \in WF$ (per il teorema prec.)

Sia $A \not\subset WF$. Sia $y \in A \setminus WF$ $\in$-minimale.

(Abbiamo supposto che $\in$ è ben fond. su A)



$$\left.\begin{array}{ll} \forall z \in y & z \in A \text{ poiché } A \text{ è transitivo} \\ & z \in WF \text{ poiché } y \text{ è minimale} \end{array}\right\} \Rightarrow y \in A \cap WF$$

$\Rightarrow y \subset WF \Rightarrow y \in WF$

□

Cofinalità

BERARDUCCI

27-05

<u>Teorema</u>: <u>κ cardinale infinito</u> $\boxed{\kappa^{cof(\kappa)} > \kappa}$ (esponenz. cardinale)

<u>Oss</u>: $\boxed{\kappa^{\kappa} > \kappa}$. Infatti $\kappa^{\kappa} \geq 2^{\kappa} > \kappa$.

<u>Oss</u>. $\underline{\kappa^{\kappa} = 2^{\kappa}}$.

$$\kappa^{\kappa} \leq (2^{\kappa})^{\kappa} = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^{\kappa} \leq \kappa^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad \kappa^{\kappa} = 2^{\kappa} > \kappa.$$

~~Dis~~ <u>Oss</u>: Dis. strette ~~ca~~ tra cardinali derivano da König.

<u>Teo di König</u>: $\alpha_i < \beta_i \Rightarrow \sum_{i\in I} \alpha_i < \prod_{i\in I} \beta_i$

<u>Dim</u>. (del teorema):

$$\kappa^{cof(\kappa)} = \prod_{i\in cof(\kappa)} \kappa$$

Sia $f: cf(\kappa) \to \kappa$ cofinale

$$\forall i \in cf(\kappa),\ f(i) \in \kappa \Rightarrow |f(i)| \leq f(i) < \kappa \quad \Rightarrow \quad \prod_{i\in cof(\kappa)} \kappa \overset{\text{könig}}{>} \sum_{i\in cof(\kappa)} |f(i)|$$

$$\kappa = \bigcup_{i\in cof(\kappa)} f(i) \quad \Rightarrow \quad \kappa = |\kappa| = \left|\bigcup_{i\in cof(\kappa)} f(i)\right| \leq \sum_{i\in cof(\kappa)} |f(i)| \underset{\text{könig}}{<} \prod_{i\in cof(\kappa)} \kappa = \kappa^{cof(\kappa)}$$

∎

Per quanto riguarda gli ordinali minori di $cof(\kappa)$, abbiamo bisogno di GCH.

$$\boxed{GCH \equiv \forall \underset{\kappa \text{ infinito}}{\kappa},\ 2^{\kappa} = \kappa^+} \quad (\Longleftrightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$$

<u>Se vale GCH, allora</u> $\underline{\forall 0 < \lambda < cf(\kappa)}$ (λ cardinale) $\boxed{\kappa^{\lambda} = \kappa}$ (→ è inutile cercare un controesempi; poichè GCH <u>non</u> ha controesempi)

<u>Dim</u>:

$$\kappa^{\lambda} = |[\lambda \to \kappa]|$$

$\lambda < cof(\kappa) \Rightarrow \forall f: \lambda \to \kappa$, f è limitata, cioè $\exists\, \alpha < \kappa$ t.c. $f: \lambda \to \alpha$

In altre parole:

$$[\lambda \to \kappa] = \bigcup_{\substack{\alpha\in ON \\ \alpha<\kappa}} [\lambda \to \alpha]$$

$$\Rightarrow |[\lambda \to \kappa]| = \left|\bigcup_{\substack{\alpha\in ON \\ \alpha<\kappa}} [\lambda \to \alpha]\right| = \kappa \cdot \sup_{\alpha<\kappa} |[\lambda \to \alpha]| \underset{||\{f: A \to B\}| = |A|^{|B|}}{=} \kappa \cdot \sup_{\alpha<\kappa} |\alpha|^{\lambda} \leq$$

$$\leq \kappa \sup_{\alpha<\kappa} 2^{\max\{|\alpha|, \lambda\}} \overset{GCH}{\leq} \kappa \sup_{\alpha<\kappa} (\max\{|\alpha|, \lambda\})^+ \ ⊛$$

$(*) = K \cdot \sup_{\alpha < \kappa} \left(\max \{|\alpha|, \lambda\} \right)^+ \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa. \Rightarrow \kappa^\lambda \leq \kappa.$

L'altra disuguaglianza è banale $\Rightarrow \kappa = \kappa^\lambda$

■

Oss: Nella dimostrazione che ogni f-catena è segmento iniziale dell'altro, nella def. ammettere la f-catena vuota.

$\boxed{X \text{ transitivo} \iff a \in b \in X \to a \in X \iff b \in X \to b \subseteq X}$

Teorema: $\forall$ insieme X $\exists$ insieme Y transitivo t.c. $X \subseteq Y$.

Dim: Costruiamo la chiusura transitiva di X, il più piccolo transitivo che lo contiene.

$$\begin{cases} X_0 = X \\ \dots \\ X_{n+1} = \bigcup X_n = \bigcup_{a \in X_n} a \end{cases} \qquad trcl(X) = \bigcup_{n \in \omega} X_n$$

(transitive closure)

[$n \mapsto X_n$ definizione per ricorsione su $\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $trcl(X)$ è transitivo e $X \in trcl(X)$. Infatti:

Sia $a \in b \in trcl(X) \Rightarrow \exists n$ t.c. $a \in b \in X_n \Rightarrow a \in X_{n+1} \subset trcl(X) \Rightarrow a \in trcl(X)$

Dimostrare per esercizio che:

$Y \supset X$, Y è transitivo $\Rightarrow trcl(X) \subset Y$

(si dimostra per induzione che $X_n \subset Y$)

Esercizio: R relazione-classe. $x R y \iff \varphi(x,y)$

Per esempio $\in$ è definita su $V \times V$.

$x R y \iff x = \mathcal{P}(y)$

$\Rightarrow$ Esiste $R^* \supset R$ relazione classe t.c.

1) $\forall x, y, z$, $x R^* y$, $y R^* z \Rightarrow x R^* z$.

2) R^* è minimale, cioè data Q relazione transitiva $Q \supset R^*$

(è la chiusura transitiva di R).

Esempio: $x R y \iff y = x+1$

$\Rightarrow R^* = <$.

Dim: Caso in cui R è un insieme. $\Rightarrow \exists A$ t.c. $R \subset A \times A$ $(A = \{x \mid \exists y \ (x,y) \in R\}$ dim. che è un insieme)

$$\cancel{\begin{cases} R_0 = R \\ R_{n+1} = \{(x,y) \in A \times A \mid \exists z, \ x R_n z, \ z R y\} \end{cases}}$$

$$R_{\leq n} = \begin{cases} x \; R_{\leq 0} \; y \iff x = y & (x,y \in A) \\ x \; R_{\leq n+1} \; y \iff \exists z \in A, \; x \; R_{\leq n} \; z \; \wedge \; z \; R \; y \end{cases}$$

definizione per induzione (per ricorsione)

$\downarrow$

OSS: il teorema di ricorsione lo posso definire non su classi proprie.

$R_n \subset A \times A \; \forall n$.

$\Rightarrow$ Posso definire:

$$x \; R^* y \iff \exists \, n \in \omega \text{ t.c. } x R_{\leq n} y$$

$\Rightarrow$ R^* è la chiusura transitiva di R. Infatti:

$$x R^* y R^* z . \Rightarrow \exists n, k \text{ t.c. } x R_n y R_k z.$$

$$\underset{?}{\Rightarrow} x R_{n+k} z \Rightarrow x R^* z.$$

$\downarrow$

$k = 0$ ovvio

$k = 1$ ovvio

$k = t+1 \Rightarrow$ $y R_{t+1} z \Rightarrow \exists w$ t.c. $y R_t w R z$

$$\Rightarrow x R_n y R_t w \underset{\uparrow \text{ hp ind.}}{\Rightarrow} x R_{n+t} w R z$$

$$\underset{\uparrow \text{ def.}}{\Rightarrow} x R_{n+t+1} z.$$

~~Esercizio: R^* è la minima~~

Esercizio (facile): $Q \supset R$ Q transitiva $\Rightarrow Q \supset R^*$

Esercizio (più difficile) (per capire bene il teorema di ricorsione): funziona anche se R è classe.

Non possiamo definire per ind. su n

$$n \mapsto R_n.$$

Abbiamo definito anche le funzioni su classi, ma l'output è un insieme: qui l'output non è un insieme. $\rightarrow$ spunto per analizzare il teo. di ricorsione.

— · — · — · — · — · — · — · —

$$\boxed{\text{Fondazione} \leftrightarrow \forall x \; \exists \alpha \quad x \in V_\alpha}$$

Dim: ($\leftarrow$) facile; $\forall x \; \exists \alpha$ t.c. $x \in V_\alpha$.

Sia $X \neq \emptyset$. : $\Rightarrow$ devo dimostrare che X ha un elemento $y \in X$ $\in$-minimale t.c.

$$\forall z \in y, \; z \notin X.$$

Esempio: $X = \{x\}$ non contiene elementi $\in$-minimali.

Prendo come y un elemento di X di rango minimale.

$$\rho(y) = \min \{\alpha \mid y \in V_{\alpha+1}\}$$

$\rho(y)$ esiste perché per hp ogni insieme ha un rango e gli insiemi di ordinali hanno minimo.

Dico che y è $\in$-minimale. Se no, $\exists z \in X$ t.c. $z \in y \Rightarrow \rho(z) < \rho(y)$ ASSURDO!

Oss: Possiamo associare un rango a qualsiasi rel. (insieme) ben fondata (una relazione classe deve essere localmente piccola cioè $\forall y$ insieme $\{x \mid x R y\}$ è insieme)

($\leftarrow$): Sia X insieme. Considero $\operatorname{trcl}(X) = \overline{X}$ (per costruirla non serve assioma di fond).

Mostro $\exists \alpha$ t.c. $\overline{X} \in V_\alpha$. Se dimostro ciò, allora

$$X \subset \overline{X} \subset V_\alpha \Rightarrow X \subset V_\alpha \Rightarrow X \in V_{\alpha+1}$$

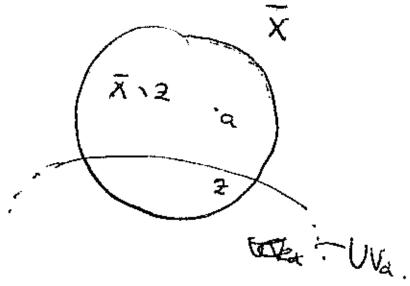
Considero:

$$Z = \{t \mid t \in \overline{X} \wedge \exists \alpha \text{ t.c. } t \in V_\alpha\}$$

$\Rightarrow \forall t \in Z,\ \exists\ \alpha = \alpha_t$ (minimo) t.c. $t \in V_{\alpha_t + 1}$

$\Rightarrow Z \subset V_{\sup(\alpha_t)+1}$

$\Rightarrow Z \in V_{\sup(\alpha_t)+2} \Rightarrow Z$ ha rango.



Domande da orali:

Che assiomi si usano x il teo. di riconsidere

Basta mostrare che $Z = \overline{X}$.

Se fosse $Z \neq \overline{X} \Rightarrow \overline{X} \setminus Z \neq \phi \Rightarrow \exists a \in \overline{X} \setminus Z$ $\in$-minimale. (esiste x fond.)

$\Rightarrow t \in a \Rightarrow t \in Z \Rightarrow \exists \alpha_t$ t.c. $t \in V_{\alpha_t} \Rightarrow a \subset \bigcup_{t \in \alpha_t} V_{\alpha_t} \subset V_{\sup(\alpha_t)+1}$

($t \in \overline{X}$ perché $\overline{X}$ è transitivo)

$\Rightarrow a \in V_{\sup(\alpha_t)+2}$ ASSURDO!

■

Oss: X è insieme $\Leftrightarrow X \in V_\omega$.

$\rightarrow$ valgono tutti gli assiomi eccetto l'infinito.

X è in $\Leftrightarrow X \in V_{\omega+1}$

$\rightarrow$ non vale più l'assioma della coppia: $\omega \in V_{\omega+1}$ ma $\{\omega\} \in V_{\omega+2}$

Se ci fermiamo ad un ordinale succ. salta la coppia

X è insieme $\Leftrightarrow X \in V_{\omega+\omega}$

$\rightarrow$ non vale il rimpiazzamento.

$$n \xrightarrow{F} \omega + n$$

$\Rightarrow \operatorname{Im} F = \omega + \omega \subset V_{\omega+\omega}$ ma $\omega+\omega \notin V_{\omega+\omega}$.

$\Rightarrow$ F è una funzione classe il cui dominio è un insieme ma la cui immagine non è insieme.

⋮

Bisogna salire... Non ci si può fermare: ci potremmo fermare se esistesse un cardinale inaccessibile su cui valgono tutti gli assiomi

$ZFC \nvdash \exists \alpha\, (V_\alpha \models ZFC)$

Da ZFC non possiamo concludere che per un certo α in V_α valgono tutti gli ZF assiomi.

Poiché

$\exists$ cardinale inaccessibile $\Rightarrow \exists\, \alpha\, (V_\alpha \models ZFC)$

$\Rightarrow ZFC \nvdash \exists \alpha$ card. inaccessibile.

PA = Teoria di Peano $\subset ZFC$

Hilbert : $PA \xrightarrow{?}$ ∃ coerenza di ZFC (si può tradurre in termini numerici: un polinomio con particolari coeff. ha radici?)

Gödel ha dimostrato che

$ZF \nvdash$ ∃ coerenza di ZFC