Ricevimento logica 25/08/11

$f: \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$

b $a \subset b \Rightarrow f(a) \subset f(b)$ funzione crescente sui sottoinsiemi

$\exists\, y \quad f(y) = y$ punto fisso.

Abbiamo dimostrato che ogni funzione continua sugli ordinali ho punto fisso, ma noi non sappiamo se è continua.

Parto da $\emptyset$, ci applico f ottenendo $f(\emptyset)$ e sicuramente

$\emptyset \subseteq f(\emptyset) \overset{?}{\subseteq} f(f(\emptyset)) \subset fff(\emptyset)$ e vado avanti come ho fatto x i derivati.

lo posso dire

supponiamo di sapere che $f^{n}(\emptyset) \subset f^{n+1}(\emptyset)$

$$\Downarrow$$

$$f^{n+1}(\emptyset) \subset f^{n+2}(\emptyset)$$

$\emptyset \subset f(\emptyset) \subset f(f(\emptyset)) \ldots \subset f^{n}(\emptyset) \subset \ldots$

$f^{\omega}(\emptyset) = \bigcup_n f^{n}(\emptyset)$

$f^{\alpha}(\emptyset)$ lo definisco così:

però prima o poi si stabilizza xché il codominio sono le parti di X mentre nella gerarchia di Von Neumann posso spaziare all'infinito.

Def: $f^{\alpha}(\emptyset)$ Induzione su α

$f^{0}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{\alpha+1}(\emptyset) = f(f^{\alpha}(\emptyset))$

$f^{\lambda}(\emptyset) = \bigcup_{\beta<\lambda} f^{\beta}(\emptyset)$ λ limite

crescente come la gerarchia di Von Neumann

$\alpha \leq \beta \Rightarrow f^{\alpha}(\emptyset) \subset f^{\beta}(\emptyset)$ lo faccio per induzione su β

β limite, $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha < \gamma \; (\exists\, \gamma < \beta)$

quindi $f^{\alpha}(\emptyset) \underset{\substack{hp\\ induttivo}}{\subset} f^{\gamma}(\emptyset) \subset \bigcup_{\gamma'<\beta} f^{\gamma'}(\emptyset) = f^{\beta}(\emptyset)$

se $\beta = \gamma+1$

$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \leq \gamma \underset{\substack{hp\\ indutt.}}{\Rightarrow} f^{\alpha}(\emptyset) \subset f^{\gamma}(\emptyset) \underset{\substack{se\ applico\\ f\ crescente}}{\Rightarrow} f^{\alpha+1}(\emptyset) \subset f^{\gamma+1}(\emptyset) = f^{\beta}(\emptyset)$

OSS: 2
se riesco a dire che $f^{\alpha}(\emptyset) \subset f^{\alpha+1}(\emptyset)$ ho finito

Induzione su α: $\alpha = 0$ ovvio

$\alpha = \beta+1$ ind $f^{\beta}(\emptyset) \subset f^{\beta+1}(\emptyset)$

$\Downarrow$ applicando f crescente

$f^{\beta+1}(\emptyset) \subset f^{\beta+2}(\emptyset)$

$\parallel$

$f^{\alpha}(\emptyset) \subset f^{\alpha+1}(\emptyset)$

caso $\alpha = \lambda$ limite

Per induzione su β (il più grande ordinale tra i 2) lo dimostro simultaneamente che

1) $\forall \alpha \leq \beta \quad f^{\alpha}(\emptyset) \subset f^{\beta}(\emptyset)$

2) $\forall \alpha \leq \beta \quad f^{\alpha}(\emptyset) \subset f^{\alpha+1}(\emptyset)$

$2 \Rightarrow 1$) l'ho dimostrato, per uno stesso β

$1 \Rightarrow 2_{\beta}$) lo dimostro, dato β, x ordinali più piccoli di β

$f^{\alpha}(\emptyset) \subset f^{\alpha+1}(\emptyset)$

. α successore ok × definiz.

. α limite $f^{\alpha}(\emptyset) = \bigcup_{\gamma<\alpha} f^{\gamma}(\emptyset)$

$f^{\alpha+1}(\emptyset) = f\left(f^{\alpha}(\emptyset)\right)$

× definiz.

A qst punto, fissato $\gamma < \alpha$, si ha $f^{\gamma}(\emptyset) \subset f^{\alpha}(\emptyset)$

che oto usando il punto 1 × l'ordinale α

$\Rightarrow$ applicando f crescente abbiamo $f^{\gamma+1}(\emptyset) \subset f^{\alpha+1}(\emptyset)$

$\underbrace{\bigcup_{\gamma<\alpha} f^{\gamma+1}(\emptyset)}_{= f^{\alpha}(\emptyset)} \subset f^{\alpha+1}(\emptyset)$

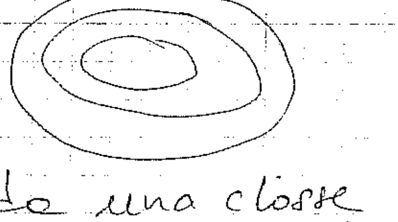
Ho dimostrato che la successione degli f^{α} cresce

Poiché sono tutti sottoinsiemi di X, visto che codominio $= \mathcal{P}(X)$, non può tuttavia crescere più di tanto.

Infatti supponiamo × assurdo che $\forall \alpha \; f^{\alpha}(\emptyset) \subsetneq f^{\alpha+1}(\emptyset)$

scelgo $x_{\alpha} \in f^{\alpha+1}(\emptyset) \setminus f^{\alpha}(\emptyset)$

$\alpha \in ON \xrightarrow[\text{iniettiva}]{} x_{\alpha} \in X$



assurdo xché ho una funzione da una classe al un insieme e × ASSIOMA RIMPIAZZAMENTO NON PUÒ CAPITARE

Funzione classe è una formula

$\varphi(x,y) \quad \forall x \, \exists!\, y \; \varphi(x,y)$

$F : V \longrightarrow V$ iniettiva (universo)

$Y = \{x_{\alpha} \in X \mid \alpha \in ON\}$

$G : Y \longrightarrow ON$ surgettiva

$G(x_{\alpha}) = \alpha$

$G(y) = \alpha \Leftrightarrow y = x_{\alpha}$

lo classe degli ordinali fosse

2° soluzione x l'es senza usare ordinali

CONTIENE TUTTI I PUNTI FISSI, ED ESSENDO L'INTERSEZIONE È IL PIÙ PICCOLO PUNTO FISSO

Scriviamo chi è il punto fisso: $Y = \bigcap \{a \in P(X) \mid a \supset f(a)\}$

Y è non vuoto xchè almeno X ci appartiene.

$f(X) \subset X$

N.B. $a = f(a)$

$\Downarrow$

$Y \subset a$

$f(Y) = Y$?

Chiamo $Z = \{a \in P(X) \mid a \supset f(a)\} \Rightarrow Y = \bigcap Z$

$a \in Z \Rightarrow a \supset f(a) \Rightarrow f(a) \supset f(f(a)) \Rightarrow f(a) \in Z$

Inoltre $X \in Z$

$a \in Z \Rightarrow a \supset Y \Rightarrow a \supset f(a) \supset f(Y) \Rightarrow$

$a \supset f(Y)$

cioè ogni elemento a di Z include $f(Y)$

$Y = \bigcap Z \supset f(Y)$ Ho dimostrato che $Y \supset f(Y)$

Devo dim la disuguaglianza opposta

$f(Y) \subset Y \underset{f \text{ cresc.}}{\Rightarrow} f(f(Y)) \subset f(Y) \Rightarrow$

$f(Y) \in Z$

dunque $f(Y) \supset Y$

$\Rightarrow$ Unisco le 2 disuguaglianze e ho $f(Y) = Y$

Questo lem. serve x dare una nuova visione del teo di ricorsione, visto che la ricorsione è un punto fisso.

Funzione fattoriale $!: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$\begin{cases} !(0) = 0 \\ !(n+1) = !n \cdot (n+1) \end{cases}$

Il fattoriale $! \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ insieme di coppie (a,b) t.c. $b = a!$

vorrei definire

$F : P(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \longrightarrow P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ t.c. $F(y) = y \iff y = !$

per dire che $\exists$ funz. fattoriale ! basta scriverla come punto fisso.

$F(y) = \begin{cases} ? & \text{se } y \text{ non è una funzione} \\ & \text{se } y \text{ è una funzione con dominio} \end{cases}$

$dom(y) \underset{init}{\subset} \mathbb{N}$, $Im(y) \subset \mathbb{N}$

S.2 Dimostrare che se $\boxed{\alpha \text{ limite} \Rightarrow Cof(\aleph_\alpha) = Cof(\alpha)}$

$\beta = Cof(\alpha) \xrightarrow[f \text{ cof crescente}]{} \alpha$

$f : \beta \to \alpha$ $\quad g : \beta \longrightarrow \aleph_\alpha \quad g(i) = \aleph_{f(i)} < \aleph_\alpha$

$g : \beta \longrightarrow \aleph_\alpha$ è cofinale, xchè essendo α limite, $\aleph_\alpha$ è

$\aleph_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta = \sup_{i < \beta} \aleph_{f(i)} \qquad cof(\aleph_\alpha) \leq \beta$

resta da vedere che $Cof(\alpha) \leq Cof(\aleph_\alpha)$

$\gamma = Cof(\aleph_\alpha)$ voglio $\gamma \geq cof(\alpha)$

$\exists\ f : \gamma \longrightarrow \aleph_\alpha$ cofinale (cresc.) $\quad f(i) \in \aleph_\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \aleph_\beta$

$\exists \beta < \alpha$ t.c. $\aleph_\beta \leq f(i) < \aleph_{\beta+1}$ $\quad$ (volendo posso prendere $\beta = \min \gamma$ t.c. $f(i) < \aleph_{\gamma+1}$)

la funzione $\beta : i \longrightarrow \beta(i)$ è in realtà una funzione $\beta : Cof(\aleph_\alpha) \longrightarrow \alpha$ cofinale

ES GIUGNO 2010

$\{(\alpha, \beta) \text{ ordinali} \mid \alpha + \beta = \beta\}$

↑ somma ordinale

esempio più facile di tutti $1+\omega=\omega$

$\alpha(1+\omega) = \alpha + \alpha\omega$ distributività a destra

$\alpha\omega = \alpha + \alpha\omega$

Quindi per ora le coppie sono

$\langle 1, \omega\rangle$

$\langle \alpha, \alpha\omega\rangle$

Si vede anche geometricamente

xchè $\alpha\omega = \underbrace{\alpha+\alpha+\alpha \dots +\alpha}_{\omega \text{ volte}}$ e se ci aggiungi un altro α all'inizio non cambia niente

Più in generale osserviamo che

~~se prendo~~ $\boxed{\beta \geq \alpha\omega} \iff \alpha+\beta=\beta$

È IL RISULTATO

Se $\beta \geq \alpha\omega$ allora $\beta = \alpha\omega + \gamma$

$\alpha+\beta = \alpha + (\alpha\omega+\gamma) = \alpha\omega+\gamma = \beta$

Se $\beta < \alpha\omega \Rightarrow \alpha+\beta \neq \beta$

$\beta < \alpha\omega \quad \exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\alpha n \leq \beta < \alpha(n+1)$

$\beta = \alpha n + r \quad r \in \omega$

$\alpha+\beta = \alpha + \alpha n + r$

$= \alpha(n+1) + r \neq \underbrace{\alpha n + r}_{\beta}$

↑ xchè x UNICITÀ DEL QUOZIENTE E RESTO NELLA DIVISIONE DI ORDINALI

3 31/05/2010

- Se $X \in V_{\omega+\omega}$ $f: X \longrightarrow V_{\omega+\omega} \Rightarrow f \in V_{\omega+\omega}$

no, xchè potrebbe accadere che ?

$$x = \omega \qquad f: \omega \longrightarrow V_{\omega+\omega}$$
$$n \to f(n) = \omega + n$$
$$\mathrm{Im}\, f = \omega+\omega \notin V_{\omega+\omega}$$
$$\Downarrow$$
$$f \notin V_{\omega+\omega}$$

$\alpha = \{\gamma \in ON \mid \gamma \in V_\alpha\}$

$\alpha \in ON \quad \forall x, y \in V_\alpha \quad \{f \mid f: X \longrightarrow Y\} \in V_\alpha$

$$\overset{\shortparallel}{[X \longrightarrow Y]}$$

<u>α limite ok</u>

$x, y \in V_\alpha \quad \alpha$ limite $\Rightarrow \exists\, \beta < \alpha \quad x, y \in V_\beta$

~~P è un insieme di coppie $\langle u, v\rangle$~~

$\boxed{\text{OSS:}}$ Una funzione $X \xrightarrow{f} Y$ è un sottoinsieme del prod. cartesiano $X \times Y$

cioè $f \subset X \times Y$

$$\Downarrow$$
$$f \in \mathcal{P}(X \times Y)$$

$[X \to Y] \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ ma $X \times Y$ a quale V appartiene?

Noi sappiamo che $X, Y \in V_\beta$. Cerchiamo di capirlo.

$u \in X \in V_\beta \Rightarrow u \in V_\beta \rightarrow \{u\} \in V_{\beta+1}$

$v \in Y \in V_\beta \Rightarrow v \in V_\beta \qquad \{u, v\} \subset V_\beta$

$$\{u, v\} \in V_{\beta+1}$$

$\langle u, v\rangle = \{\{u\}, \{u, v\}\} \subset V_{\beta+1}$

$$\cap$$
$$V_{\beta+2}$$

quindi abbiamo dimostrato che se $\langle u, v\rangle \in X \times Y \Rightarrow \langle u, v\rangle \in V_{\beta+2}$

$X \times Y \in V_{\beta+2}$

$\to Y] \subset \mathcal{P}(X \times Y) \subset \mathcal{P}(V_{\beta+2}) = V_{\beta+2}$

$\Rightarrow [X \to Y] \in V_{\beta+4} \subset V_\alpha$

Infatti se α limite, $\forall x, y \in V_\alpha$ $[x \to y] \in V_\alpha$

Dim: Prendo $x, y \in V_\alpha$, Fisso $\beta < \alpha$ $x, y \in V_\beta$

Ora bisognerebbe dimostrare che per α non limite non torna

Un ordinale non limite si scrive come

$\alpha = \lambda + n$ con λ limite e n naturale

5°) Trovare α: $\forall x, y \in V_\alpha$ $\forall f\ x \to y$ $f \in V_\alpha$

Per α limite torna: $f \in [x \to y] \in V_\alpha \Rightarrow f \in V_\alpha$

Ma sembra che torni anche per $\alpha = \lambda + 1$ λ limite

ESEMPIO: $\alpha = \omega + 1$?

$x, y \in V_{\omega+1} = \mathcal{P}(V_\omega)$

$X, Y \subset V_\omega$

$X \times Y \subset V_\omega$

Dimostro qst ultimo passaggio

$\langle a, b \rangle \in X \times Y$, $a \in X \subset V_\omega$

$b \in Y \subset V_\omega$

n $a \in V_n$
$b \in V_n$
$\langle a,b\rangle \in V_{n+2}$; quindi $\langle a,b\rangle \in V_\omega$ e visto che vale $\forall a,b$
ho dimostrato che $X \times Y \subset V_\omega$ ma
$f \subset X \times Y \Rightarrow f \subset X \times Y \subset V_\omega \Rightarrow f \subset V_\omega \Rightarrow \boxed{f \in V_{\omega+1}}$
quindi valgono anche x i limiti

Per quali coppie (κ, λ) cardinali $\forall f : \kappa \longrightarrow V_\lambda \Rightarrow f \in V_\lambda$
Risposta: $\lambda > Cof(\lambda) > (\kappa)$; infatti succede che
~~vuole funzione~~ $\exists \alpha < \lambda$ $f: \kappa \longrightarrow V_\alpha$ (da dimostrare)

vendo la funzione composta $(\rho \circ f)$

$$\begin{array}{ccccc} i & \xrightarrow{f} & f(i) & \xrightarrow{\rho \text{ rango}} & \rho(f(i)) \in ON \\ \cap & & \cap & & \wedge \\ \kappa & & V_\lambda & & \lambda \end{array}$$

$(\rho \circ f) : \kappa \longrightarrow \lambda$ non può essere cofinale xché $Cof(\lambda)$ è grande

$\exists$ $\alpha < \lambda$ $\rho \circ f : \kappa \longrightarrow \alpha$.
$f : \kappa \longrightarrow V_\alpha$ (Ho dimostrato che $\kappa \longrightarrow V_\alpha$) ok.

$\kappa < \lambda \Rightarrow \kappa \in V_\lambda$ $f : \kappa \longrightarrow V_\alpha$ $\alpha < \lambda$
$V_\alpha \in V_{\alpha+1} \subset V_\lambda$
es precedente , poiché $dom(f), Im(f) \in V_\lambda$
λ limite $\Rightarrow f \in V_\lambda$

Ritorno al punto 2 e dimostro la 2° parte
caso $\alpha = \gamma + 1$; allora $\exists\ x, y \in V_\alpha = V_{\gamma+1} = \mathcal{P}(V_\gamma)$
~~[illegible]~~ con $[X \to Y] \notin V_\alpha$

Basta prendere $x = y = \gamma$ $\quad id_\gamma : \gamma \to \gamma \quad id_\gamma \in [X \to Y]$

$\{id_\gamma\} \subset [X \to Y]$
$\cancel{\in}$
$V_{\gamma+1}$

è un po' come dire

$\gamma \in V_{\gamma+1}$ ma

$\{\gamma\} \notin V_{\gamma+1}$

Se $X \subset Y \in V_\alpha \Rightarrow X \in V_\alpha$ (una variante della transitività)

Prop: X chiuso di $\mathbb{R}^d$. $\Rightarrow \exists P$ perfetto t.c. $X = P \cup N$ con N numerabile

BERARDUCCI
27-05

Dim.

Def: $a \in X$ è di condensazione se $\forall \varepsilon > 0$, $|B_\varepsilon(a) \cap X| > \aleph_0$

P = p.ti di condensazione di X.

$\Rightarrow P$ è chiuso e perfetto. Infatti:

Sia $(x_n)_n$ $x_n \in P$, $x_n \to x$. Voglio mostrare che $x \in P$.

Sia $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n$ t.c. $x_n \in B_\varepsilon(x)$. $\Rightarrow \exists$ $\varepsilon' > 0$ t.c. $B_{\varepsilon'}(x_n) \subset B_\varepsilon(x)$

$\Rightarrow |B_\varepsilon(x) \cap X| \geq |B_{\varepsilon'}(x_n) \cap X| > \aleph_0 \Rightarrow P$ è chiuso. $\Rightarrow P$ è perfetto.

Sia $x \in X \setminus P \Rightarrow \exists$ palla razionale (di centro e raggio razionale) $x \in B_x$ t.c. $|B_x \cap X| \leq \aleph_0$.

$$\Rightarrow X \setminus P = \underbrace{\bigcup_{x \in X \setminus P}}_{} (B_x \cap X) \leq \aleph_0$$

le palle razionali sono numerabili $\Rightarrow$ ho unione numerabile di palle numerabili

---

$X \subset \mathbb{R}$ è di Borel se $X \in \mathcal{B} = \{$boreliani$\}$ dove $\mathcal{B}$ è la più piccola classe t.c.

(1) $\forall a, b$, $(a,b) \in \mathcal{B}$

(2) $X \in \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{R} \setminus X \in \mathcal{B}$

(3) $\forall n$, $X_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_n X_n \in \mathcal{B}$

$\leftarrow \mathcal{B}$ è l'intersezione di tutti gli insiemi che soddisfano (1), (2), (3).

OSS: $\{$aperti$\} \subseteq \mathcal{B}$ poiché gli aperti sono unioni (numerabili, possiamo supporre) di intervalli aperti (gli aperti sono unioni arbitrarie di intervalli aperti ma posso ricondurre a unioni numerabili)

$|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^c = 2^{2^{\aleph_0}}$

Mostriamo che $|\mathcal{B}| = c$.

$\mathcal{B}_0 = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \Rightarrow |\mathcal{B}_0| = c$

$\mathcal{B}_{\alpha+1} = \{X$ t.c. $\exists Y \in \mathcal{B}_\alpha$ t.c. $X = Y^c\} \cup \{X \mid \exists (X_n)$ $X_n \in \mathcal{B}_\alpha$ t.c. $X = \bigcup_n X_n\}$

Non mi posso fermare a ω:

$X_i \in \mathcal{B}_i$ $\forall i < \omega \Rightarrow \bigcup_{i<\omega} \mathcal{B}_i \in \mathcal{B}_\omega \Rightarrow \bigcup_{i<\omega}$ $\to$ se lo complemento, esco.

Posso fermarmi a $\mathcal{B}_{\omega_1}$

OSS: Per stimare la cardinalità di ...

Basta mostrare che

2) $\forall A \in \mathcal{B}_{\omega_1} \implies A^c \in \mathcal{B}_{\omega_1}$.

3) $\forall n,\ X_n \in \mathcal{B}_{\omega_1} \implies \bigcup_n X_n \in \mathcal{B}_{\omega_1}$

Regolarità

$X_n \in \mathcal{B}_{\alpha_n}$ con $\alpha_n < \omega_1 \Rightarrow |\alpha_n| \leq \aleph_0 \Rightarrow \bar{\alpha} = \sup_{n<\omega} \alpha_n < \omega_1$ → se no avrei una cofinale da ω a ω_1

$\Rightarrow X_n \in \mathcal{B}_{\bar{\alpha}} \ \forall n \Rightarrow \bigcup_n X_n \in \mathcal{B}_{\bar{\alpha}+1} \Rightarrow \bigcup_n X_n \in \mathcal{B}_{\omega_1}$.

$$\Rightarrow \quad |\mathcal{B}| = \left| \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha \right| = \omega_1 \cdot \sup_{\alpha<\omega_1} |\mathcal{B}_\alpha|$$

Basta mostrare che $|\mathcal{B}_\alpha| = c \ \forall \alpha < \omega_1$.

Lo dimostriamo per induzione su α:

$\alpha = \beta+1 \implies |\mathcal{B}_{\beta+1}|$

$$\mathcal{B}_\beta^{\mathbb{N}} \xrightarrow{F} \mathcal{B}_{\beta+1}$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathcal{B}_\beta \longmapsto \begin{cases} \bigcup_{n>0} f(n) & \text{se } \bigcup_{n>0} f(n) \neq \emptyset \\ \neg f(0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ F è suriettiva $\Rightarrow$ $|\mathcal{B}_{\beta+1}| \leq$

$$\leq |\mathcal{B}_\beta^{\mathbb{N}}| \underset{\uparrow}{\leq} c^{\aleph_0} = c$$

hp. ind.: $|\mathcal{B}_\beta| = c$

$\alpha = \lambda$ - limite.

$$\Rightarrow \quad |\mathcal{B}_\lambda| = \left| \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{B}_\alpha \right| \leq |\alpha| \cdot c \leq \omega_1 \cdot c = c$$

Esercizio $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$x \leq y \iff \forall P\,(\ P$ è S-chiuso $\wedge\, x \in P \to y \in P)$

" $x \mathrel{R} y \iff y = S(x)$ " $\implies \leq$ = chiusura transitiva di R

Esercizio: Calcolare il minimo γ t.c. $\forall x$ numerabile e transitivo $x \in V_\gamma$. (assumendo la fondazione)

Dim: Dimostriamo che $\gamma = \omega_1$.

Sia X numerabile e transitivo. Mostro che $X \subset V_{\omega_1}$.

Se dimostro che $X \subset V_{\omega_1}$

$X = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \implies a_n \in V_{\alpha_n} \quad \alpha_n < \omega_1 \underset{\omega_1 \text{ è regolare}}{\implies} \sup \alpha_n = \bar{\alpha} < \omega_1$ (W_1 è Σ-reg.)

$\implies X \subset V_{\bar{\alpha}} \Rightarrow X \in V_{\bar{\alpha}+1} \subset V_{\omega_1} \Rightarrow X \in V_{\omega_1}$.

ω_1 è regolare.
Per assurdo sia $\phi: \omega \to \omega_1$
cof $\Rightarrow \omega_1 = \bigcup_{n \in \omega} \phi(n)$
$\Rightarrow \omega_1 = |\bigcup_n \phi(n)| \leq \sum_n |\phi(n)| =$
$= \max\{\sup_n |\phi(n)|, \underbrace{\ }_{\omega}$
$= \omega \quad \Rightarrow \omega_1 \leq \omega$ ASSU[RDO]

N.B. importanza dei cardinali regolari.

Mi basta dimostrare che $X \subset V_{\omega_1}$.

Per assurdo $\exists\, y \in X,\ y \notin V_{\omega_1}$. Sia y $\in$-minimale (o eq. di rango minimale)

$\Rightarrow \forall z \in y,\ z \in V_{\omega_1} \Rightarrow y \subset V_{\omega_1}$

y è numerabile: infatti $y \in X \underset{\text{transitività}}{\implies} y \subset X \Rightarrow y$ è numerabile

$\left.\begin{array}{l} y \subset V_{\omega_1} \\ y \text{ numerabile} \end{array}\right\} \Rightarrow y \in V_{\omega_1}$ ASSURDO!

Esercizio: $\exists\, x, y \in V_{\lambda+1} \Rightarrow [x \to y] \notin V_{\lambda+1}$

$x, y \in V_\lambda$
$\Downarrow$
$[x \to y] \in V_{\lambda+1}$

$x = y = \lambda$. $f = id_\lambda : \lambda \to \lambda \qquad id_\lambda \in [\lambda \to \lambda] = [x \to y]$.

Mostrare che $\{id_\lambda\} \notin V_{\lambda+1}$

Esercizio: $\lambda \in V_{\lambda+1}$ ma $\{\lambda\} \notin V_{\lambda+1}$

Esercizio: $X \subset Y \in V_\alpha \Rightarrow X \in V_\alpha$.

Esercizio: funzione di Ackermann

$\exists!\ A: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ t.c.

$$\begin{cases} A(0,y) = y+1 \\ A(x+1,0) = A(x,1) \\ A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y)) \end{cases} \longleftrightarrow A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{se } x=0 \\ A(x-1,1) & \text{se } x>0,\ y=0 \\ A(x-1, A(x,y-1)) & \text{se } x>0,\ y>0. \end{cases}$$

Metodo 1: si rifà il teorema di ricorsione

Metodo 2: si fa rientrare nel teo. di ricorsione.

Mostro che $A(x,y)\downarrow$ per induzione su $\langle x,y\rangle$ ordinato in modo lessicografico o equivalentemente su $\omega x + y$ ordinati con $\in$.

$a = A(x, y-1)$ converge per hp

$A(x-1, a)$ converge per hp.

Penso $A: \omega\cdot\omega \longrightarrow \mathbb{N}$.

Dimostriamo l'unicità: sia A' che soddisfa le stesse equazioni $\Rightarrow A' = A$.

$A' \neq A \Rightarrow$ Sia $\langle x,y\rangle$ il minimo per cui $A'(x,y) \neq A(x,y)$
($\omega x + y$ minimale)

Divido i 3 casi:

① $x=0$

② $y=0,\ x>0$

③ $y>0,\ x>0$. $\longrightarrow A(x,y) = A(x-1, \underbrace{A(x,y-1)}_{A'(x,y-1)}) = A(x-1, \underbrace{A'(x,y-1)}_{a}) = A'(x-1, A'(x,y-1))$

$(x-1, a) < (x,y)$

$= A'(x,y)$

Dimostriamo l'esistenza: si fa utilizzando il teorema di ricorsione.

Sia $J \underset{\text{iniz.}}{\subseteq} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ iniziale rispetto all'ordine lexicografico.

$f: J \longrightarrow \mathbb{N}$ è buona se dove è definita verifica ①, ②, ③.

Definisco

$$B = \bigcup \{f \mid f \text{ buona}\}$$

Devo mostrare che $\forall J,\ \exists!\ f$ buona (è la dim. dell'unicità di A)
l'unicità

Almeno una buona c'è, è la funzione vuota.

Basta mostrare che $\forall J,\ \exists f$ buona per J.

Bisogna anche mostrare che B è buona e $B: J \to \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ devo mostrare che $J = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Sia $(x,y) \in (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \setminus J$ minimale rispetto a $<_{lex}$

$\Rightarrow$ estendo B a $\tilde{B}$ definita anche su (x,y) che è

$$\tilde{B} = B \cup \{\langle x, y, a\rangle\} \quad \text{con} \quad a = B(x-1, B(x, y-1))$$

$\Rightarrow \tilde{B}$ è buona. $\Rightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N} = J$.

Esercizio: $f(n+1) = h(f(n), g(n))$

$g(n+1) = k(f(n), g(n))$

$f(0) = g(0) = 0$ $\longrightarrow$ Vedi quaderno esercizi

Dimostrare che esistono f, g.

Metodo 1: dimostro il teo. di ric.

Metodo 2: definisco la funzione doppia e mi riconduco al teorema di ricorsione.

$$D(n) = (f(n), g(n))$$

$$D(n+1) = \Big(h\big((D(n))_1, (Dn)_2\big), \ k\big((Dn)_1, (Dn)_2\big)\Big) = H(D(n))$$

Esercizio: Trovare k t.c. $k > \aleph_0$

$$|x| < k \Rightarrow |[x \to x]| < k.$$

Oss: $\alpha < k \Rightarrow 2^\alpha \leq 2^k$ (non posso escludere che la dis. sia stretta)

Dim: $|[x \to x]| = |x|^{|x|} = 2^{|x|}$ Cerco k t.c.

$\alpha < k \rightarrow 2^\alpha < k$. $\forall$ card. α.

Scelgo $k = \beth_\omega$