Compito di MD
1^0 aprile 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{N}_{100} = \{1, 2, \ldots, 100\}$.

a) Contare le coppie (A, B) con $A, B \subseteq \mathbb{N}_{100}$, $|A| = 5$ e $|B| = 10$.
b) Contare le coppie (A, B) con $A, B \subseteq \mathbb{N}_{100}$, $|B| = 10$ e $A \subseteq B$.
c) Contare le coppie (A, B) con $A, B \subseteq \mathbb{N}_{100}$ e $|A \cap B| = 10$.

Soluzione: a) $\binom{100}{5} \cdot \binom{100}{10}$.

b) Ci sono $\binom{100}{10}$ possibili modi di scegliere B. Scelto B ci sono 2^{10} modi di scegliere un suo sottoinsieme A. Quindi la risposta è $\binom{100}{10} \cdot 2^{10}$.

c) Scelgo i 10 elementi da mettere in $A \cap B$. Ho $\binom{100}{10}$ possibili modi per farlo. Per ciascuno dei rimanenti 90 elementi ho tre possibilità: lo metto in A ma non in B; lo metto in B ma non in A; non lo metto né in A né in B. Ho 3^{90} modi di effetturare queste scelte. Quindi la risposta è $\binom{100}{10} \cdot 3^{90}$. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 6^x \equiv 4 \pmod{19} \\ 110x \equiv 275 \pmod{75} \end{cases}$$

Soluzione: Prima risolvo la prima congruenza. Osservo che per il piccolo teorema di Fermat $6^{18} \equiv 1 \bmod (19)$. Mi chiedo quale sia il minimo $y > 0$ tale che $6^y \equiv 1 \bmod 19$. Sappiamo che sicuramente è un divisore di 18. Li controllo uno ad uno e verifico che $6^9 \equiv 1 \bmod 19$ e il minimo y è 9. Ne segue che

$$6^y \equiv 1 \bmod 19 \iff y \equiv 0 \bmod 9$$

(funziona anche per gli y negativi! Andate a ripassarvi come è definito 6^y mod 19 per y negativo). Ho così trasformato una congruenza esponenziale in una lineare. Però la congruenza che mi interessava era un'altra: $6^x \equiv 4 \bmod 19$. Per ricondurmi al caso precedente cerco di scrivere 4 nella forma 6^t modulo 19. Dopo qualche tentativo trovo $6^4 \equiv 4 \bmod 19$. Quindi la congruenza di partenza è $6^x \equiv 6^4 \bmod 19$, che posso riscrivere come $6^{x-4} \equiv 1 \bmod 19$. Per i calcoli precedenti sappiamo che questa congruenza equivale a $x-4 \equiv 0 \bmod 9$, ovvero $x \equiv 4 \bmod 9$.

Ora risolvo la seconda congruenza. Riducendo i coefficienti modulo 75 la riscrivo nella forma $35x \equiv -25 \bmod 75$. Divido tutto per 5 e ottengo la congruenza equivalente $7x \equiv -5 \bmod 15$. Siccome 2 è coprimo con 15 se moltiplico entrambi i termini della congruenza per 2 ottengo la congruenza equivalente $-x \equiv -10 \bmod 15$, ovvero $x \equiv 10 \bmod 15$.

Il sistema equivale dunque a

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{9} \\ x \equiv 10 \pmod{15} \end{cases}$$

Calcolo il minimo comune multiplo $45 = \mathrm{mcm}(9, 15)$ e il massimo comun divisore $3 = (9, 15)$ dei moduli. Osservo che se due numeri sono congrui modulo 9 lo sono anche modulo 3, e se sono congrui modulo 15 lo sono anche modulo 3. Quindi se una soluzione x esiste, deve essere congrua sia a 4 sia a 10 modulo 3. Pertanto una condizione necessaria affinché x esista è che 10 e 4 siano congrui tra di loro modulo 3. In effetti lo sono, quindi la condizione è verificata. Essendo 3 il massimo comun divisore dei moduli, dalla teoria sappiamo che tale condizione è anche sufficiente e quindi la soluzione esiste. Per trovarla consideriamo le soluzioni della prima congruenza. Esse sono date dai numeri della forma $x = 4 + 9k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Sostituiamo nella seconda congruenza ottenendo $4 + 9k \equiv 10 \bmod 15$. Sottraendo 4 otteniamo $9k \equiv 6 \bmod 15$. Dividendo tutto per 3 otteniamo la congruenza equivalente $3k \equiv 2 \bmod 5$. Moltiplicando per 2 la posso ulteriormente semplificare ottenendo $k \equiv 4 \bmod 5$. Una soluzione particolare è data da $k = 4$. Sostituendo nell'espressione $x = 4+9k$ precedentemente trovata otteniamo $x = 40$. Dunque $x = 40$ è una soluzione particolare del sistema. Visto che 45 (il minimo comune multiplo dei moduli) è congruo a zero sia modulo 9 sia modulo 15, a tale soluzione particolare possiamo aggiungere un qualsiasi multiplo di 45. Otteniamo così le soluzioni $x = 40 + t45$ al variare di $t \in \mathbb{Z}$. Dalla teoria sappiamo che queste sono tutte le soluzioni. In altre parole il sistema equivale alla singola congruenza $x \equiv 40 \bmod 45$. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3.

Sia $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo che, rispetto alla base standard, è rappresentato dalla matrice

$$[B] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali valori di k l'endomorfismo B è diagonalizzabile.
b) Sia $k = 3$. Dire se è vero o falso che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ tale che, rispetto a tale base, l'endomorfismo B ha matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione: a) Il polinomio caratteristico di B è $p(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$. Gli autovalori sono $\lambda = 2$ con moltiplicità algebrica $m_2 = 1$ e $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica $m_1 = 2$. La matrice è diagonalizzabile se tali molteplicità coincidono con le dimensioni dei relativi autospazi $V_2 = \ker(B-2I)$ e $V_1 = \ker(B-I)$, dove

$$B - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ 5 & k-2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 5 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo dunque calcolare le dimensioni di V_2 e V_1. Un vettore di coordinate (a, b, c) appartiene a V_2 se e solo se

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ 5 & k-2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero $ka - b = 0$ e $5a + (k-2)b - c = 0$. La a può essere scelta liberamente e una volta scelta la a i valori di b, c sono determinati. Quindi $\dim(V_1) = 1$ (pari al numero delle scelte libere).

Per V_1 il calcolo è simile. Un vettore (a,b,c) appartiene a V_1 se e solo se $a = 0, ka = 0, 5a + (k-2)b = 0$. La c non interviene e può quindi essere scelta liberamente. La a deve essere 0 e di conseguenza $(k-2)b = 0$.

Dobbiamo distinguere due casi. Se $k = 2$ anche la b può essere scelta liberamente e dunque $\dim(V_1) = 2$.

Se $k \neq 2$ abbiamo $b = 0$ e l'unica scelta libera rimane quella di c. In questo caso $\dim(V_1) = 1$.

Confrontando le dimensioni di V_2 e V_1 con le molteplicità algebriche precedentemente trovate $m_2 = 1$ e $m_1 = 2$ concludiamo che se $k = 2$ abbiamo la coincidenza tra molteplicità algebriche e dimensioni dei relativi autospazi (ovvero le molteplicità geometriche) e B è diagonalizzabile, mentre per $k \neq 2$ non abbiamo la coincidenza e B non è diagonalizzabile.

b) La risposta alla seconda parte dell'esercizio è negativa. Per dimostrarlo occorre mostrare che un endomorfiamo $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che abbia, rispetto ad una qualsivoglia base $\mathcal{B}$, la matrice specificata al punto b), non può coincidere con l'endomorfismo $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di cui al punto a). Basta a tal fine osservare che i vettori v_1 e v_2 che hanno, rispetto alla base $\mathcal{B}$, coordinate $(1,0,0)_\mathcal{B}$ e $(0,1,0)_\mathcal{B}$, vengono mandati da L in se stessi, ovvero $Lv_1 = v_1$ e $Lv_2 = v_2$ (questo si vede osservando le prime due colonne della matrice di L nella base $\mathcal{B}$). Ciò implica che la dimensione dell'autospazio di L relativo all'autovalore 1, ovvero la dimensione di $V_1 = \{v : Lv = v\}$, è almeno due, in quanto contiene i due vettori indipendenti v_1 e v_2. Ma sapevamo già che per $k \neq 2$ (e quindi in particolare per $k = 3$) l'autospazio di B rispetto all'autovalore $\lambda = 1$ ha dimensione 1, quindi $B \neq L$. (Alternativamente si può far vedere che L è diagonalizzabile, mentre B non lo è.) $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 4. Sia V lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ (i cui elementi sono i polinomi su $\mathbb{R}$ di grado minore o uguale a due). Consideriamo l'applicazione lineare $L : V \to V$ che, per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$, manda il polinomio $ax^2 + bx + c$ nel polinomio $(3a + 3b)x^2 + (b + c)x + (a + b + 2c)$.
a) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine.
b) Stabilire se L è invertibile e in caso affermativo determinare l'immagine del polinomio $4x^2 + x + 1$ tramite la funzione inversa.

Soluzione: La matrice associata a L rispetto alla base $x^2, x, 1$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cominciamo dalla domanda b), ovvero proviamo a calcolare l'inversa con l'algoritmo standard. Se l'algoritmo ci fornisce una inversa significa che L è invertibile e dunque bigettiva. In questo caso la risposta alla domanda a) segue come immediata conseguenza della risposta alla domanda b): la dimensione del nucleo di L è 0 (iniettività) e la dimensione dell'immagine di L è 3 (surgettività).

Ricordiamo che l'algoritmo standard per trovare l'inversa prevede di agire per mosse di riga sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si trova che la matrice inversa effettivamente esiste ed è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dunque per concludere l'esercizio resta solo da trovare l'immagine del polinomio $4x^2 + x + 1$ tramite la funzione inversa. Per farlo basta applicare la matrice inversa al vettore

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il risultato è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

che corrisponde al polinomio $\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$.

$\square$