

Compito di MD

13 febbraio 2014

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Sia S l'insieme delle successioni (a_1, a_2, \dots, a_n) di lunghezza n in cui ogni a_i è uguale a 0, 1 o 2.

1. Quante sono le successioni in S ?
2. Quante sono le successioni in S con almeno una delle cifre uguali ad 1?
3. Quante sono le successioni in S la cui somma delle cifre è 5?

Soluzione: 1) Per ogni a_i ci sono 3 scelte, quindi S ha cardinalità 3^n .

2) Basta sottrarre dal totale delle successioni quelle in cui non compaiono degli 1. Il totale è 3^n . Quelle senza 1 sono 2^n . La risposta è dunque $3^n - 2^n$.

3) Supponiamo $n \geq 5$. Se la somma delle cifre è 5 ci possono essere due 2 e un 1, oppure un 2 e tre 1, oppure cinque 1, mentre le cifre rimanenti devono essere tutte uguali a 0. Consideriamo separatamente questi tre tipi di successioni.

Per le successioni del primo tipo abbiamo n possibili posizioni per l'1 e una volta scelta la posizione dell'1 abbiamo $\binom{n-1}{2}$ possibili posizioni per i due 2. Quindi in tutto ci sono $n\binom{n-1}{2}$ successioni del primo tipo. (Alternativamente avremmo potuto scegliere prima la posizione dei 2 e poi quella dell'1 ottenendo la formula equivalente $\binom{n}{2}(n-2)$.)

Per il secondo tipo ragioniamo analogamente ottenendo $n\binom{n-1}{3}$ possibili successioni.

Per il terzo tipo basta calcolare il numero delle possibili posizioni per i cinque 1, che è $\binom{n}{5}$.

Il totale generale si ottiene sommando il numero di successioni di ciascun tipo:

$$n \binom{n-1}{2} + n \binom{n-1}{3} + \binom{n}{5}.$$

I casi in cui $n \leq 5$ si ottengono rimpiazzando alcuni coefficienti binomiali con zero (quelli in cui il numero in basso è maggiore di quello in alto). \square

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 2. Consideriamo il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 5x \equiv a \pmod{42} \\ 6x \equiv 1 \pmod{35} \end{cases}$$

- a) Trovare tutte le soluzioni del sistema per $a = 107$.
- b) Determinare i valori del parametro intero a per cui il sistema è risolubile.

Soluzione: Con l'algoritmo di Bezout trovo che l'inverso di 5 modulo 42 è 17 e l'inverso di 6 modulo 35 è 6. Moltiplicando la prima congruenza per 17 e la seconda per 6 ottengo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x \equiv 17a \pmod{42} \\ x \equiv 6 \pmod{35} \end{cases}$$

Il massimo comun divisore tra 42 e 35 è 7. Se due numeri sono congrui modulo 42 lo sono anche modulo 7 e similmente se sono congrui modulo 35 lo sono anche modulo 7. Quindi se x esiste deve essere congruente sia a $17a$ sia a 6 modulo 7 e pertanto $17a$ deve necessariamente essere congruente a 6 modulo 7 affinché esista una soluzione. Dalla teoria sappiamo che tale condizione è anche sufficiente. Il sistema ha dunque soluzione se e solo se $17a \equiv 6 \pmod{7}$ ovvero $3a \equiv 6 \pmod{7}$. Possiamo semplificare ulteriormente questa condizione dividendo per 3 (lo possiamo fare in quanto 3 è primo con 7) ottenendo $a \equiv 2 \pmod{7}$.

La risposta alla domanda b) è dunque: *il sistema è risolubile se e solo se $a \equiv 2 \pmod{7}$.*

Per la domanda a) osserviamo innanzitutto che 107 è effettivamente congruo a 2 modulo 7 e dunque le soluzioni esistono. Il minimo comune multiplo dei moduli è $210 = \text{mcm}(42, 35)$, come si vede facilmente dalla fattorizzazione $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $35 = 5 \cdot 7$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ne segue che se x_0 è una soluzione particolare del sistema le altre si ottengono aggiungendo ad essa un multiplo di 210.

Per trovare una soluzione osserviamo che $17a = 17 \cdot 107 \equiv 13 \pmod{42}$. Il sistema da risolvere (con $a = 107$) equivale dunque al seguente:

$$\begin{cases} x \equiv 13 \pmod{42} \\ x \equiv 6 \pmod{35} \end{cases}$$

Le x che verificano la prima congruenza sono tutte e sole quelle della forma $x = 13 + 42k$. Sostituendo tali valori nella seconda otteniamo $13 + 42k \equiv 6 \pmod{35}$, che equivale a $42k \equiv -7 \pmod{35}$. Dividendo tutto per 7 otteniamo la condizione equivalente $6k \equiv -1 \pmod{5}$, cioè $k \equiv 4 \pmod{5}$. Le soluzioni x del sistema si ottengono sostituendo tali valori di k nell'espressione $x = 13 + 42k$. I valori di k che ci interessano sono della forma $k = 4 + 5t$ e sostituendo otteniamo $x = 13 + 42(4 + 5t) = 13 + 42 \cdot 4 + 42 \cdot 5t$. Il sistema equivale dunque alla singola congruenza $x \equiv 13 + 42 \cdot 4 \pmod{42 \cdot 5}$, che possiamo riscrivere come

$$x \equiv 181 \pmod{210}.$$

Una soluzione particolare è 181 e le altre sono della forma $181 + m210$. \square

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 3.

Determinare il numero di soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale a

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 4x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + (a^2 - 19)z = a \end{cases}$$

Soluzione: La matrice del sistema è

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & (a^2 - 19) & a \end{array} \right).$$

Sottraendo dalla terza riga la prima riga e poi sottraendo dalla seconda riga la prima riga moltiplicata per 4 otteniamo la matrice a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & (a^2 - 16) & a - 4 \end{array} \right).$$

Osserviamo che $a^2 - 16 = (a - 4)(a + 4)$ ha come radici ± 4 .

Se $a \neq \pm 4$ il termine $a^2 - 16$ è diverso da zero e abbiamo una sola soluzione.

Se $a = -4$ la terza equazione del sistema ridotto a scala diventa $0z = -8$ e non c'è alcuna soluzione.

Se $a = 4$ la terza equazione del sistema ridotto a scala diventa $0z = 0$, che è soddisfatta da qualunque valore di z . Il sistema in questo caso ha infinite soluzioni. □

Cognome e nome:

Numero di matricola: Corso e Aula:

Esercizio 4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una trasformazione lineare che manda il vettore $(0, 0, 1)$ in $(2, 3, 4)$, il vettore $(0, 2, 0)$ in $(6, 8, 10)$ e il vettore $(1, 0, 0)$ in $(10, 14, 18)$.

- a) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f .
- b) Calcolare l'immagine del vettore $(1, 1, 1)$.

Soluzione: Rispondiamo prima al punto b). Siccome f è lineare, se manda un vettore in un altro deve mandare la metà di quel vettore nella metà dell'altro. In particolare visto che il vettore $(0, 2, 0)$ va in $(6, 8, 10)$, il vettore $(0, 1, 0)$ deve andare in $(3, 4, 5)$. Sappiamo dunque dove f manda i vettori della base standard $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ e le loro rispettive immagini ci forniscono le colonne della matrice A di f rispetto alla base standard:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 14 & 4 & 3 \\ 18 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Applicandola al vettore $(1, 1, 1)$ otteniamo

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 3 + 2 \\ 14 + 4 + 3 \\ 18 + 5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 27 \end{pmatrix}$$

L'immagine di $(1, 1, 1)$ è dunque il vettore $(15, 21, 27)$.

Per il punto a) osserviamo che la somma delle ultime due colonne della matrice A è il vettore colonna $(5, 7, 9)$, che moltiplicato per due fornisce la prima colonna $(10, 14, 18)$ della matrice, che è pertanto linearmente dipendente dalle altre. Il rango della matrice A è dunque al più 2, ma poiché le ultime due colonne sono linearmente indipendenti esso è esattamente due.

In generale la dimensione del nucleo di una applicazione lineare si ottiene dalla formula "dimensione del dominio - dimensione del nucleo = dimensione dell'immagine". Nel nostro caso il dominio ha dimensione 3 e la dimensione dell'immagine è 2 (pari al rango). Dunque la dimensione del nucleo è $3 - 2 = 1$. □