Compito di MD
17 gennaio 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1. Determinare le soluzioni sella seguente congruenza:

$$x^2 \equiv 1 \pmod{77}.$$

Soluzione: La congruenza dice che $x^2 - 1$ è multiplo di 77, ovvero è multiplo sia di 7 sia di 11. Poiché $x^2 - 1$ si fattorizza in $(x+1)(x-1)$ ciò significa che almeno uno dei fattori è multiplo di 7 (ovvero $x \equiv \pm 1 \bmod 7$) e almeno uno dei fattori è multiplo di 11 (ovvero $x \equiv \pm 1 \bmod 11$). Si presentano dunque quattro casi corrispondenti ai seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \bmod 7 \\ x \equiv 1 & \bmod 11 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x \equiv -1 & \bmod 7 \\ x \equiv -1 & \bmod 11 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x \equiv 1 & \bmod 7 \\ x \equiv -1 & \bmod 11 \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} x \equiv -1 & \bmod 7 \\ x \equiv 1 & \bmod 11 \end{cases}.$$

Ciascuno di questi sistemi ha una soluzione modulo 77 per il teorema cinese del resto.

Chiaramente $x = 1$ è soluzione dei primo sistema e $x = -1$ è soluzione del secondo sistema. Le altre soluzioni si ottengono aggiungendo un multiplo di 77.

Per studiare il terzo sistema possiamo sostituire $x = -1 + 11k$ in $x \equiv 1 \bmod 7$ ottenendo $-1 + 11k \equiv 1 \bmod 7$, che equivale a $4k \equiv 2 \bmod 7$. Ad occhio si trova la soluzione $k = 4 \bmod 7$. Una x che risolve il terzo sistema è dunque $x = -1 + 11 \cdot 4 = -1 + 44 = 43$ e le altre soluzioni si ottengono aggiungendo un multiplo di 77.

Analogamente per il quarto sistema si trova la soluzione $x = 1 - 44 = -43 \equiv 34 \bmod 77$.

La soluzioni della congruenza $x^2 \equiv 1 \bmod 77$ sono quindi

$$x = 1, \quad x = -1, \quad x = 43, \quad x = -43,$$

a ciascuna delle quali possiamo aggiungere un multiplo di 77. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Sia $\mathbb{N}_{50} = \{1, 2, ..., 50\}$.
a) Quante sono le funzioni $f : \mathbb{N}_{50} \to \mathbb{N}_{50}$ tali che $f(n) \equiv n + 1 \quad (5)$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{50}$?
b) Quante fra le funzioni individuate nel punto a) sono anche bigettive?
c) Quante fra le funzioni individuate nel punto a) sono tali che $|Imm\ f| = 5$?

Soluzione: a) $\mathbb{N}_{50}$ contiene 10 rappresentanti di ciascuna delle classi di equivalenza modulo 5. Dato $n \in \mathbb{N}_{50}$, $f(n)$ può essere uno qualsiasi dei 10 numeri nell'intervallo che siano congrui a $n + 1$ modulo 50. Ad esempio $f(1)$ può valere $2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42$ o 47. Visto che per ogni $n \in \mathbb{N}_{50}$ ho 10 possibili scelte per $f(n)$, in tutto vi sono 10^{50} funzioni f con le proprietà suddette.

b) Una funzione da $\mathbb{N}_{50}$ ad $\mathbb{N}_{50}$ è iniettiva se e solo se è bigettiva perché la funzione ha il dominio e il codominio della stessa cardinalità finita. Occorre quindi aggiungere alla condizione precedente l'iniettività.

Osserviamo che per $f(1)$ ci sono 10 possibilità (gli x congrui a 2 modulo 5). Una volta assegnato un valore ad $f(1)$, per $f(6)$ rimangono 9 possibilità (gli elementi congrui a due modulo 5 tranne quello già scelto per $f(1)$). Per $f(11)$ ne rimangono 8, e così via per ciascuno dei 10 numeri nella classe di 1 modulo 5. Abbiamo quindi in tutto $10!$ modi per definire f su questi argomenti.

Lo stesso discorso vale per gli elementi congrui a $2, 3, 4$ o 5. Quindi la cardinalità cercata è $(10!)^5$.

c) Sappiamo già che gli elementi congrui a 1 modulo 5 devono andare in elementi congrui a 2 modulo 5, quelli congrui a 2 in elementi congrui a 3, eccetera. Quindi sicuramente l'immagine di f contiene almeno un numero per ogni classe di congruenza modulo 5 e ha dunque cardinalità ≥ 5. L'unico modo per definire f in modo che l'immagine abbia solo 5 elementi è di mandare tutti e 10 gli elementi congrui ad 1 modulo 5 in uno stesso elemento (e ho 10 modi di sceglierlo) e analogamente per i numeri congrui a $2, 3, 4$ o 5. Visto che ho 5 classi di elementi e per ciascuna classe ho 10 modi di scegliere l'elemento in cui mandare tutti gli elementi della classe, in tutto ho 10^5 modi di definire la f. $\square$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....Corso e Aula: ....

Esercizio 3.

Consideriamo in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio V dato dalle soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x+2y+z & =0 \\ -x-y+3t & =0 \end{cases}$$

e il sottospazio W generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcolare $dim\ V \cap W$ e $dim\ (V+W)$.

Soluzione: I due vettori che generano W sono indipendenti, quindi $\dim(W) = 2$. Inoltre W non è contenuto in V in quanto ad esempio il primo dei vettori che genera W non appartiene a V (basta sostituire nel sistema $x = 2, y = 0, z = 1, t = 1$). Ne segue che $V \cap W$ ha dimensione strettamente minore di quella di W, ovvero $\dim(V \cap W)$ è 0 o 1. Nemmeno il secondo dei vettori che genera W appartiene a V, ma questo ancora non ci permette di concludere se la dimensione sia 0 o 1. Dobbiamo controllare se una combinazione lineare

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b \\ -2b \\ a-2b \\ a \end{pmatrix}$$

appartenga a V. Sostituendo nel sistema che definisce V otteniamo

$$\begin{cases} (2a+3b)+2(-2b)+(a-2b) & =0 \\ -(2a+3b)-(-2b)+3a & =0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a-3b & =0 \\ a-b & =0 \end{cases}$$

che equivale a $a = b$. Dunque se $a = b$ il vettore dato dalla combinazione lineare appartiene a $V \cap W$. In particolare, prendendo $a = b = 1$, il vettore

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è diverso da zero ed appartiene a $V \cap W$, e siccome sapevamo già che la dimensione di $V \cap W$ è al più 1, otteniamo $\dim(V \cap W) = 1$.

Infine, per la formula di Grassman,

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

□

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 4. Consideriamo l'endomorfismo lineare L_a di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro reale a e definito da:

$$L_a(x, y, z) = (2ax + y + z, x + ay + z, -x + y + az)$$

Discutere la diagonalizzabilità di L_a al variare del parametro reale a.

Soluzione: La matrice di L_a rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

e il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2a - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & a - \lambda & 1 \\ -1 & 1 & a - \lambda \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante con la formula di Laplace lungo la prima riga otteniamo $p(\lambda) = (2a-\lambda)[(a-\lambda)^2-1]-(a-\lambda+1)+1+a-\lambda$. I termini dopo la parentesi quadra si cancellano e il termine entro le quadre si fattorizza in $(a - \lambda - 1)(a - \lambda + 1)$. Il polinomio caratteristico è quindi

$$p(\lambda) = (2a - \lambda)(a - \lambda - 1)(a + \lambda + 1)$$

che ha radici tutte reali date da

$$\lambda_1 = 2a, \quad \lambda_2 = a - 1, \quad \lambda_3 = a + 1.$$

Tali radici sono gli autovalori di L_a.

Studiamo ora la coincidenza degli autovalori. Innanzitutto osserviamo che $\lambda_1 \neq \lambda_3$ per ogni valore di a. Per $a = 1$ si ha $\lambda_1 = \lambda_3 = 2$ e pertanto l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2. Infine per $a = -1$ si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ e l'autovalore -2 ha molteplicità algebrica 2. Abbiamo quindi vari casi:

Caso $a \neq \pm 1$. L'endomorfismo L_a è diagonalizzabile in quanto ha 3 autovalori distinti (con molteplicità algebrica 1).

Caso $a = 1$. L'autovalore $2 = \lambda_1 = \lambda_3$ ha molteplicità algebrica 2 e dobbiamo calcolarne la sua molteplicità geometrica, ovvero la dimensione dell'autospazio $\ker(L_1 - 2I)$ relativo all'autovalore 2. La matrice di $L_1 - 2I$ è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice 3×3 ha rango 2 e pertanto $\dim \ker(L_1 - 2I) = 3 - 2 = 1$. La molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è dunque 1, che è minore della sua molteplicità algebrica. Poichè l'endomorfismo L_1 ha un autovalore la cui molteplicità geometrica è minore della molteplicità algebrica, esso non è diagonalizzabile.

Caso $a = -1$. L'autovalore $-2 = \lambda_1 = \lambda_2$ ha molteplicità algebrica 2. La molteplicità geometrica è $\dim \ker(L_{-1} + 2I)$. La matrice di $L_{-1} + 2I$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2. Quindi $\dim \ker(L_{-1} + 2I) = 3 - 2 = 1$ e l'autovalore -2 ha molteplicità geometrica 1, mentre la sua molteplicità geometrica è 2. Ne segue che L_{-1} non è diagonalizzabile. $\square$