Compito di MD
A.A. 2013/14 – 1 luglio 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: ....

Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare. Non si può scrivere con il lapis.

Esercizio 1. Si consideri la successione definita da $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ e

$$a_{n+1} = 3a_n + 5a_{n-1}$$

per ogni $n \geq 1$.

a) Dimostrare che, per ogni $n \geq 0$, a_n non è multiplo di 5.

b) Dimostrare che non esistono due termini consecutivi a_m, a_{m+1} della successione che sono entrambi multipli di $p = 19$.

a) Dimostro per induzione su n che $a_n \not\equiv 0 \ (5)$

PASSO BASE

$a_0 \equiv 2 \not\equiv 0 \ (5)$ $a_1 \equiv 1 \not\equiv 0 \ (5)$

supponiamo che $a_n \not\equiv 0 \ (5)$ e $n \geq 1$

allora $a_{n+1} = 3a_n + 5a_{n-1} \equiv 3a_n \not\equiv 0 \ (5)$ perché 5 è primo quindi il prodotto di due classi non zero è non zero modulo 5.

b) Per assurdo: supponiamo che la Tesi sia falsa e sia m il minimo intero t.che $a_m \equiv a_{m+1} \equiv 0 \ (19)$

$\Rightarrow m \geq 2$. ~~Inoltre~~ e $a_{m-1} \not\equiv 0 \ (19)$

Ma dalla formula $a_{m+1} \equiv 3a_m + 5a_{m-1}$ si ha $0 \equiv a_{m+1} \equiv 5a_{m-1} \ (19)$ da cui $a_{m-1} \equiv 0 \ (19)$ e questo è in contraddizione con quanto assunto

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 2. Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 4x \equiv 2 \quad (7) \\ x^5 \equiv 2 \quad (15) \end{cases}$$

Risolviamo le due congruenze:

- $4x \equiv 2 \quad (7) \iff 2 \cdot 4x \equiv 4 \quad (7) \iff x \equiv 4 \quad (7)$
- $x^5 \equiv 2 \quad (15)$ per il Teorema cinese si spezza in

$$\begin{cases} x^5 \equiv 2 \quad (3) \leftarrow \text{per verifica diretta ha sol } \boxed{x \equiv 2\ (3)} \\ x^5 \equiv 2 \quad (5) \leftarrow \text{per il p. Teorema di Fermat (5 è primo) } x^5 \equiv x\ (5) \text{ quindi l'unica sol è } x \equiv 2\ (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv 2\ (3) \\ x \equiv 2\ (5) \end{cases} \iff x \equiv 2\ (15)$$

questa sol la vedo "a occhio" non ce ne sono altre per il Teorema cinese.

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} x \equiv 4\ (7) \\ x \equiv 2\ (15) \end{cases}$$

Eq risolvente

$$4 + 7k = 2 + 15h$$

$$15h - 7k = 2 \qquad h_0 = 2 \quad k_0 = 4 \text{ è sol particolare.}$$

sol generale

$$\begin{cases} h = 2 + 7t \\ k = 4 + 15t \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$x = 4 + 7(4 + 15t) = 32 \quad (7 \cdot 15) \quad \boxed{x \equiv 32 \ (105)}$$

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 3. Sia K un campo e si consideri l'endomorfismo $A : K^3 \to K^3$ che, rispetto alla base standard, è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Dire se A è diagonalizzabile per $K = \mathbb{R}$.
b) Dire se A è diagonalizzabile per $K = \mathbb{Z}_3$.

Polinomio caratteristico di A

$$p_A(t) = \det(A - tI) = \begin{vmatrix} 3-t & 2 & 3 \\ 1 & 4-t & 3 \\ 1 & 2 & 5-t \end{vmatrix} =$$

$$= -t^3 + 12t^2 - 36t + 32$$

Cerco radici in $\mathbb{Q}$: $p_A(\pm 1) \neq 0$

$p_A(2) = 0$ $\qquad p_A(t) = (t-2)(-t^2+10t-16) = -(t-2)^2(t-8)$

$\lambda = 2$ autovalore doppio $\mu_2 = 2$ $\qquad \lambda = 8$ autovalore semplice $\mu_8 = 1$

Calcoliamo la molt. geometrica di $\lambda = 2$ per $K = \mathbb{R}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad rk = 1$$

$\nu_2 = \dim \ker(A - 2I) = 2$

$\boxed{\nu_2 = \mu_2}$

Sicuramente $\mu_8 = \nu_8$ perché $1 \leq \nu_8 \leq \mu_8 \leq 1$ $\Rightarrow$
A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Su $K = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$

$p_A(t) = (x-2)^3 = (x+1)^3$

Calcoliamo la molt geometrica di $\lambda = -1$ $(\mu_{-1} = 3)$

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 1$ $\dim \ker(A+I) = 2$

$\rightarrow$ A non è diag su $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$.

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

Esercizio 4. Sia $L : \mathbb{Q}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$ l'applicazione lineare definita da: $L(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + b + c)x^3 + dx^2 + 2c$. Determinare una base di $\operatorname{Ker} L$, una base di $\operatorname{Im} L$, e una base di $\operatorname{Im}(L \circ L \circ L)$.

Costruiamo la matrice associata a L rispetto alla base canonica ~~sia~~ in partenza che in arrivo.

$$M = [L]_{\{x^3, x^2, x, 1\}} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ [L(x^3)] & [L(x^2)] & [L(x)] & [L(1)] \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

rk M = 2 e i pivot sono nelle ~~per~~ colonne 1, 3, 4

$\Rightarrow L(x^3) = x^3$, $L(x) = x^3 + 2$ e $L(1) = x^2$ sono bas di Im L.

Base ker L (si sa che ha dim 4 - 3 = 1)

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ b = b \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ base ker L $= \langle -x^3 + x^2 \rangle$

$L \circ L \circ L(x^3) = x^3$ $\quad L^3(x^2) = x^3$ $\quad L^3(x) = L^2(x^3 + 2) = x^3 + L(2x^2) = 3x^3$

$L^3(1) = L^2(x^2) = x^3$

$\Rightarrow \operatorname{Im}(L^3) = \langle x^3 \rangle$