1. Esercizi svolti di algebra lineare

Esercizio 1.1. Sia T(3) l'insieme delle matrici triangolari superiori 3×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$.

(1) Dimostrare che $T(3)$ è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$ e determinarne una base.
(2) Definire, se possibile, un'applicazione lineare surgettiva $f : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to T(3)$.
(3) Definire, se possibile, un'applicazione lineare iniettiva $g : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to T(3)$.
(4) Sia $S(3)$ il sottospazio delle matrici 3×3 simmetriche. Estendere una base di $S(3)$ ad una base di $M_{3,3}(\mathbb{R})$.
(5) Definire, se possibile, un'applicazione lineare $h : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to T(3)$ tale che $\ker(h) = S(3)$ e $Im(g)$ abbia dimensione 3.

Dimostrazione. 1. La verifica che $T(3)$ è un sottospazio è lasciata al lettore. Una base è data dalle 6 matrici con un "1" sulla diagonale o sopra la diagonale e zero nelle altre otto posizioni.

2. Per trovare una applicazione lineare surgettiva $f : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to T(3)$ basta mandare i 9 elementi della base standard di $M_{3,3}(\mathbb{R})$ (costituita dalle 9 matrici con un "1" e otto "0") surgettivamente nei 6 elementi della base di $T(3)$ ed estendere per linearità. Un esempio di una tale f è la funzione che manda una generica matrice 3×3 nella matrice ottenuta da essa sostituendo degli zeri nelle tre posizioni sotto la diagonale.

3. Non può esistere un'applicazione lineare $g : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to T(3)$ iniettiva in quanto $M_{3,3}(\mathbb{R})$ ha dimensione 9 mentre $T(3)$ ha dimensione 6.

4. Ricordiamo che le matrici simmetriche sono le matrici A uguali alla propria trasposta A^t, ovvero quelle in cui il coefficiente a_{ij} nella riga i colonna j è uguale al coefficiente a_{ji} nella riga j colonna i. Esse formano uno spazio vettoriale $S(3)$ di dimensione 6 con una base $\mathcal{B}$ costituita dalle 3 matrici $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e dalle 3 matrici diagonali con un "1" e due "0" sulla diagonale. Per il teorema di completamento della base, possiamo estendere questo insieme di 6 matrici indipendenti ad una base $\mathcal{C}$ di $M_{3,3}(\mathbb{R})$. Un modo per farlo è quello di aggiungere alla suddetta base di 6 elementi di $S(3)$ le tre matrici antisimmetriche $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Le 9 matrici così ottenute sono linearmente indipendenti (verificate!) e costituiscono una base $\mathcal{C}$ di $M_{3,3}(\mathbb{R})$ diversa dalla base standard.

5. Basta considerare una $g : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to T(3)$ lineare che manda una generica matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ nella matrice triangolare superiore $\begin{pmatrix} 0 & a_{12}-a_{21} & a_{13}-a_{31} \\ 0 & 0 & a_{23}-a_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ovviamente il nucleo è $S(3)$. Per mostrare che la dimensione dell'immagine è 3 basta osservare che le sei matrici di $\mathcal{B}$ (definito al punto precedente) vanno in zero e le tre matrici rimanenti della base $\mathcal{C}$ vanno nelle tre matrici linearmente indipendenti $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ di $T(3)$. □

Esercizio 1.2. Si determini una base dello spazio vettoriale V costituito dai polinomi $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado minore o uguale a 4 che sono divisibili per (x^2+1).

Dimostrazione. Possiamo scrivere un generico polinomio $p(x)$ di V nella forma $(x^2+1)q(x)$ dove $q(x)$ ha grado ≤ 2. Una base dei polinomi di grado ≤ 2 è costituita dai tre polinomi $1, x, x^2$. Una base di V è dunque costituita dai tre polinomi che si ottengono da questi moltiplicandoli per (x^2+1), ovvero (x^2+1),$(x^2+1)x$ e $(x^2+1)x^2$. □

Esercizio 1.3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia $T : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$=3$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$=-2$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $T\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$=4$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice $[T]_{\mathcal{E}}$ associata a T rispetto alla base standard $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. Consideriamo la base $\mathcal{B}$ data dai tre autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$. Visto che i rispettivi autovalori sono $3, -2, 4$ la matrice associata a T nella base $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale $D = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Per trovare la matrice rispetto alla base standard $\mathcal{E}$ basta scrivere $V_{\mathcal{E}} \xrightarrow{T} V_{\mathcal{E}}$ come composizione $V_{\mathcal{E}} \xrightarrow{id} V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{T} V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{id} V_{\mathcal{E}}$

e scrivere le matrici di queste applicazioni nelle base indicate. Ricordando che la composizione di applicazioni lineari corrisponde alla moltiplicazione di matrici otteniamo $[T]_{\mathcal{E}} = PDP^{-1}$ dove $P = [id]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ è la matrice associata a $V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{id} V_{\mathcal{E}}$ nelle basi indicate e $P^{-1} = [id]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ è la matrice associata a $V_{\mathcal{E}} \xrightarrow{id} V_{\mathcal{B}}$, che coincide anche con la matrice inversa di P. Per finire basta calcolare P^{-1} e moltiplicare le matrici. □

Esercizio 1.4. Sia A la matrice definita da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $L_A(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$. Determinare una base del nucleo di L_A ed estenderla ad una base di $\mathbb{R}^4$.

Dimostrazione. Con mosse di riga riduciamo A alla matrice a scalini

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le mosse di riga non alternano il nucleo delle corrispondenti applicazioni lineari: $\ker(L_A) = \ker(L_B)$. Applicando B al vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ otteniamo $\begin{pmatrix} x + 3z - w \\ y - 3z \\ 0 \end{pmatrix}$. Il nucleo si ottiene uguagliando a zero questo vettore, ovvero ponendo $y = 3z$ e $x = -3z + w$. Il generico elemento nel nucleo ha quindi la forma $\begin{pmatrix} -3z + w \\ 3z \\ z \\ w \end{pmatrix}$ che possiamo vedere come combinazione lineare $z \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Una base del nucleo è dunque data dai due vettori colonna $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per estenderla ad una base di $\mathbb{R}^4$ affianchiamo a questi due vettori i quattro vettori e_1, e_2, e_3, e_4 della base standard di $\mathbb{R}^4$ eliminando quelli che sono combinazioni lineari dei precedenti. In tal modo si ottiene una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da v_1, v_2, e_1, e_2 essendo e_3 ed e_4 combinazioni lineari di questi (come si può verificare calcolando il rango). □

Esercizio 1.5. Sia $V = \mathbb{R}^n$, sia $T : V \to V$ un'applicazione lineare e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che il sottospazio $V_\lambda = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$ abbia dimensione d. Si dimostri che $(x-\lambda)^d$ divide il polinomio caratteristico $p_T(x)$.

Dimostrazione. Considero una base $v_1, \dots, v_d$ di V_λ e la estendo ad una base $v_1, \dots, v_d, \dots, v_n$ di V. Rispetto a questa base la matrice $[T]$ associata a T ha sulle prime d colonne dei vettori con $n-1$ zeri e un λ (per la precisione per ciascun $i = 1, \dots, d$ la i-esima colonna ha un λ nella i-esima posizione). Sviluppando il determinante $p_T(x)$ di $xI - [T]$ ciascuna delle prime d colonne contribuisce per un fattore $(x - \lambda)$. □

Esercizio 1.6. Un endomorfismo lineare $T : V \to V$ si dice nilpotente se per un certo intero positivo n si ha $T^n = 0$ (l'endomorfismo nullo). Dimostrare che se T è nilpotente ha $\lambda = 0$ come unico autovalore.

Dimostrazione. Se $Tv = \lambda v$ allora $T^n v = \lambda^n v$ e dall'ipotesi di nilpotenza $\lambda^n v = 0$. Se $v \neq 0$ questo implica $\lambda = 0$. □

Esercizio 1.7. La matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

Dimostrazione. Si ha $T^3 = 0$ quindi T è nilpotente. Per l'esercizio precedente l'unico autovalore di T è $\lambda = 0$. Se T fosse diagonalizzabile esisterebbe una matrice diagonale D e una matrice invertibile P con $D = P^{-1}TP$. D'altra parte D deve avere gli autovalori di T sulla diagonale e quindi è la matrice 0. Ne segue che $T = PDP^{-1}$ è anch'essa la matrice 0. Assurdo. □