Elementi di Logica Matematica
Primo Appello 2006-07
Prova scritta del 11 Giugno 2007

Esercizio 1. Dimostrare la legge distributiva a destra su ordinali:

$$\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Esercizio 2. Si semplifichino le seguenti espressioni ordinali:

1. $4 + \omega^2 + \omega^3 + \omega$;
2. $\omega^\omega + \omega^{(\omega^2)}$.

Esercizio 3. Definiamo per induzione sugli ordinali:

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= P(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \text{ se } \lambda \text{ è limiite} \end{aligned}$$

Si dimostri che per ogni ordinale α, $|V_{\omega+\alpha}| \geq \aleph_\alpha$.

Esercizio 4.

1. Determinare la cardinalità massima di una famiglia di <u>buoni ordini numerabili</u> a due a due non isomorfi.
2. Determinare la cardinalità massima di una famiglia di <u>ordini lineari numerabili</u> a due a due non isomorfi.

Esercizio 5. Si dimostri in ZFC che date $H_1 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ e $H_2 \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ esistono $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ g(0) &= 0 \\ f(n+1) &= H_1(f(n), g(n)) \\ g(n+1) &= H_2(f(n), g(n)) \end{aligned}$$