Elementi di Logica Matematica
Secondo Appello 2006-07
Prova scritta del 12 Luglio 2007

Esercizio 1.

1. Si determini la cardinalità dell'insieme di tutte le funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.
2. Si determini la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ strettamente crescenti (ovvero tali che per ogni $x < y$ si abbia $f(x) < f(y)$).
3. Si determini la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ con immagine finita.
4. Si determini la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ aventi la seguente proprietà: esistono un numero finito di razionali $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ tali che f è costante su ciascun intervallo (a_i, a_{i+1}) e sugli intervalli infiniti $(-\infty, a_1)$ e $(a_k, +\infty)$. (Se $k = 0$ si suppone che f sia costante su $\mathbb{Q}$.)

Esercizio 2. Ricordiamo che un insieme si dice "finito" se è in corrispondenza biunivoca con un segmento iniziale proprio dei numeri naturali. Diciamo che una famiglia F di insiemi ammette predecessore se per ogni $A \in F$ esiste $a \in A$ tale che $A \setminus \{a\} \in F$. Si dimostri che un insieme X è finito se e solo se per ogni famiglia F che ammette predecessore, se $X \in F$ allora $\emptyset \in F$.

Esercizio 3. Siano α e β numeri ordinali. Il supporto di una funzione $f : \beta \to \alpha$ è l'insieme degli $i < \beta$ tali che $f(i) \neq 0$. Sia $S(\beta, \alpha)$ l'insieme delle funzioni da β ad α con supporto finito. Date due funzioni distinte $f, g \in S(\beta, \alpha)$ osserviamo che grazie alla finitezza dei supporti esiste sicuramente un massimo ordinale $i < \beta$ tale che $f(i) \neq g(i)$. Se per tale ordinale i si ha $f(i) < g(i)$ diciamo che $f \prec g$.

1. Determinare la cardinalità di $S(\beta, \alpha)$.
2. Si dimostri che $(S(\beta, \alpha), \prec)$ è un buon ordine.
3. Si dimostri che se $\beta < \gamma$ $S(\beta, \alpha)$ è isomorfo ad un segmento iniziale di $S(\gamma, \alpha)$ (con l'ordine $\prec$).
4. Si dimostri che il tipo d'ordine di $(S(\beta, \alpha), \prec)$ è l'ordinale α^β (esponenziazione ordinale).
5. Calcolare la cardinalità dell'ordinale $\omega_2^{\omega_1}$ (esponenziazione ordinale, non cardinale), e in particolare dire se sia più grande, più piccola o uguale ad $\aleph_3$. (Ricordiamo che $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ ma si usa la prima notazione quando ci si riferisce a cardinali e la seconda quando ci si riferisce a ordinali.)