Elementi di Logica Matematica
Terzo Appello 2006-07
Prova scritta del 17 Sett. 2007

Esercizio 1. Si dimostri che tutte le basi di $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità e si determini tale cardinalità.

Esercizio 2.

1. Dato un insieme infinito Y di cardinalità α, quanti sono i buoni ordini su Y?
2. Dato un insieme infinito Y di cardinalità α, quante sono le funzioni biunivoche da Y in se stesso?
3. Dato un insieme bene ordinato infinito $(Y, \prec)$ di cardinalità α, quanti sono i sottoinsiemi bene ordinati di Y (con l'ordine indotto da $\prec$) di cardinalità α?

Esercizio 3. Si lavori nella teoria assiomatica degli insiemi ZFC.

1. Senza far uso dell'assioma della scelta, dimostrare che se un insieme X può essere bene ordinato, allora anche l'insieme delle parti finite di X può essere bene ordinato.
2. Senza fare uso dell'assioma delle parti, dimostrare l'esistenza dell'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ di cardinalità 2.
3. Senza far uso dell'assioma delle parti, dimostrare l'esistenza dell'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{N}$.