Elementi di Logica Matematica
Quarto Appello 2006-07
Prova scritta del 16 Gennaio 2008

Un albero è un insieme T di "nodi" su cui è definita una relazione d'ordine parziale $\preceq$ con un elemento minimo r (la radice dell'albero) e tale che l'insieme dei predecessori $\{y \mid y \preceq x\}$ di un qualsiasi nodo $x \in T$ è <u>finito</u> (NOTA BENE) e linearmente ordinato da $\preceq$ (ovvero dati due nodi $a, b \preceq x$ si ha $a \preceq b$ o $b \preceq a$). Definiamo $x \prec y :\iff x \preceq y \wedge x \neq y$. Se $x \prec y$ diciamo che y è un discendente di x. Se y è un discendente di x e inoltre non vi è alcun nodo z con $x \prec z \prec y$ allora diciamo che y è figlio di x. Diciamo che un albero $(T, \preceq)$ è ben fondato se non ha rami infiniti, ovvero se non esistono successioni $(x_n \mid n \in \mathbb{N})$ di nodi tali che per ogni n il nodo x_{n+1} è figlio di x_n. (Questo significa in effetti che la relazione inversa $x \preceq^* y :\iff y \preceq x$ è ben fondata.)

1) Si dimostri che un albero $(T, \preceq)$ è ben fondato se e solo se esiste una funzione decrescente $f\colon T \to ORD$, dove ORD è la classe degli ordinali e f è detta decrescente se $y \prec x$ implica $f(x) \prec f(y)$.

Diciamo che un albero è a ramificazione finita se ogni suo nodo ha un numero finito di figli.

2) Si dimostri che un albero ben fondato $(T, \preceq)$ a ramificazione finita ammette sempre una funzione decrescente $f\colon T \to ORD$ la cui immagine è un ordinale finito, ma che vi sono alberi ben fondati a ramificazione infinita che non ammettono tali funzioni.

L'altezza di un albero ben fondato $(T, \preceq)$ è definita come il minimo ordinale α tale che esiste una funzione decrescente $f\colon T \to \alpha$. (Quindi l'altezza di un albero ben fondato a ramificazione finita è un ordinale finito.) Conveniamo che l'altezza di un albero vuoto è zero.

3) Si dimostri che l'altezza $\rho(T)$ di un albero T è uguale a $\sup\{\rho(T') + 1 \mid T'\}$ dove T' varia tra i sottoalberi propri di T immediatamente sopra la radice.

4) Si trovino esempi di alberi ben fondati di altezza ω, $\omega + 1$, $\omega + \omega$ ed $\omega \cdot \omega$.

5) Si dimostri che l'altezza di un albero numerabile è un ordinale numerabile, e che per ogni ordinale numerabile α esiste un albero ben fondato T di altezza α.

6) Dato un cardinale κ, si caratterizzino gli ordinali che possono essere altezze di alberi ben fondati di cardinalità $\leq \kappa$.