ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI
DISPENSA 1

MAURO DI NASSO

Introduzione

Scopo di questo corso è introdurre i primi elementi fondamentali della *teoria degli insiemi*. Questa disciplina riveste un ruolo del tutto speciale. Molti dei suoi aspetti possono essere presentati come si farebbe in un qualsiasi altro corso di matematica, ma la sua particolare importanza sta nel suo cruciale ruolo *fondazionale*. Infatti, al suo interno può essere formalizzata virtualmente tutta la matematica. La presentazione e la discussione di questi aspetti fondazionali ha anche lo scopo di costituire una introduzione agli strumenti tipici della logica matematica.

Nelle prime lezioni del corso ci muoveremo all'interno della cosiddetta teoria *intuitiva* degli insiemi. Assumeremo come "intuitivamente validi" i principi di *estensionalità* e *comprensione* che sembrano essere coerenti con la consueta pratica matematica, e ne dedurremo alcuni primi risultati. Questa introduzione informale ci sarà utile per familiarizzare con alcuni concetti fondamentali, che verranno poi ripresi e sviluppati con maggiore rigore nel seguito. In questa prima parte saranno anche presentati alcuni *paradossi* che storicamente evidenziarono la contraddittorietà di questo modo di procedere. La crisi che ne seguì durante gli anni a cavallo del 1900, portò alla formulazione di *teorie assiomatiche degli insiemi*, il cui ambizioso scopo era quello di rifondare su basi rigorose l'intera matematica.

Dopo questa breve parte introduttiva, tutto il resto del corso sarà proprio dedicato allo sviluppo sistematico di una di quelle teorie, cioè la teoria ZFC di Zermelo-Fraenkel con scelta, che è quella attualmente più usata. Attenendoci al metodo assiomatico, tutte le nozioni e i risultati presentati verranno giustificati rigorosamente a partire da una iniziale lista di principi, cioè gli assiomi, che saranno gli unici ad essere assunti come validi.

Nella parte finale del corso, introdurremo la nozione di *modello della teoria degli insiemi*, e saremo in grado di dare un significato preciso ad affermazioni del tipo: "il Teorema di Hahn-Banach *non è dimostrabile* senza l'assioma di scelta", oppure "l'ipotesi del continuo è *indipendente* dai principi della matematica".

1. Simboli logici

In questo corso faremo un massiccio uso di "formule", un po' più di quanto è consuetudine fare in altri settori della matematica. In realtà, uno dei primi compiti della logica matematica è quello di fornire una precisa e rigorosa definizione di *formula*, ma di questo ci occuperemo solo più avanti. Per il momento sarà sufficiente seguire l'uso comune, prestando però una particolare attenzione ai seguenti *simboli logici*, che useremo sistematicamente.

Definizione 1.1. Per *simboli logici* si intendono i seguenti simboli:

- *Connettivi*:
  negazione: $\neg$ ("non"); congiunzione: $\wedge$ ("e"); disgiunzione: $\vee$ ("o"); implicazione: $\rightarrow$ ("se ... allora"); equivalenza: $\leftrightarrow$ ("se e solo se").
- *Quantificatori*:
  esistenziale $\exists$ ("esiste"); universale $\forall$ ("per ogni").

Il significato di questi simboli può sembrare evidente, ma un loro uso corretto richiederà qualche cautela. Cominciamo con i connettivi.

Definizione 1.2. Siano P e Q enunciati, cioè affermazioni cui si possa attribuire uno ed uno solo dei valori di verità *vero* o *falso*. Allora:

- $P \wedge Q$ è vera quando sia P che Q sono vere, ed è falsa altrimenti;
- $P \vee Q$ è falsa quando sia P che Q sono false, ed è vera altrimenti;
- $P \rightarrow Q$ è falsa quando l'*ipotesi* (o *antecedente*) P è vera e la *tesi* (o *conseguente*) Q è falsa, ed è vera negli altri casi;
- $P \leftrightarrow Q$ è vera quando P e Q hanno lo stesso valore di verità (entrambe vere o entrambe false), ed è falsa altrimenti.

Allo scopo di visualizzare queste definizioni, è consuetudine usare le cosiddette *tavole di verità*. In queste, viene indicato il valore di verità "V" (vero) o "F" (falso) degli enunciati ottenuti usando i vari connettivi, a partire dai possibili valori di verità degli enunciati P e Q di partenza.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Per giungere a definizioni precise, sono state fatte delle scelte non sempre in accordo con il linguaggio naturale, cioè con il comune linguaggio di tutti i giorni. Ad esempio la disgiunzione $\vee$ ("o") è *inclusiva*, cioè $P \vee Q$ è vera anche nel caso in cui P e Q siano entrambe vere.[1] Un altro caso non pienamente corrispondente all'uso comune è quello in cui accettiamo come vera l'implicazione $P \rightarrow Q$ anche quando P è falsa e Q è vera. Tuttavia le definizioni date sono in pieno accordo con la pratica matematica, come avremo modo di vedere con diversi esempi. Infatti in matematica un enunciato $P \rightarrow Q$ viene considerato vero "d'ufficio" nel caso in cui P sia falso.[2]

Utilizzando ripetutamente i vari connettivi, si possono formare nuovi enunciati composti a partire da enunciati assegnati. Quando due enunciati composti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$

[1] È interessante il fatto che questa ambiguità di significato che la disgiunzione ha in italiano, non sussisteva invece nel latino. In quella lingua si usavano infatti due congiunzioni diverse: "*vel*" per denotare la "o" inclusiva (quella corrispondente al nostro connettivo $\vee$), e "*aut*" per la disgiunzione esclusiva, dove P *aut* Q è falsa quando P e Q sono entrambe vere.

[2] Ad esempio, l'enunciato "*Se B è uno spazio di Banach non separabile di dimensione finita, allora B è compatto*" è vero, per il semplice fatto che *non* esistono spazi di Banach non separabili di dimensione finita.

hanno la stessa tavola di verità, diremo che sono *logicamente equivalenti*, e scriveremo $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. In questo caso attribuiremo ad $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ lo stesso significato e quindi – a seconda della convenienza – potremo sostituire uno all'altro in ogni ragionamento. Nel prossimo esercizio sono raccolte le equivalenze logiche più usate nella pratica.

Esercizio 1.3. Verificare che le seguenti coppie di enunciati composti hanno la stessa tavola di verità:

(1) Doppia negazione: $\neg(\neg P) \equiv P$.
(2) Leggi di De Morgan:
  - $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
  - $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.
(3) Negazione dell'implicazione: $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$.
(4) Contronominale: $P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$.
(5) Doppia implicazione: $P \leftrightarrow Q \equiv ((P \to Q) \wedge (Q \to P))$.

Quasi sempre negli enunciati matematici si fa uso dei quantificatori. Il loro significato verrà assunto come evidente. Di particolare importanza è il loro comportamento rispetto alla negazione, che ricordiamo qua sotto.

Scriviamo "$P(x)$" per indicare che "l'oggetto x soddisfa la proprietà P", e scriviamo $Q(x, y)$ per indicare che "la coppia (x, y) soddisfa la proprietà Q". Allora:

- "$\neg(\forall x\, P(x))$" ha lo stesso significato di "$\exists x\, \neg P(x)$";
- "$\neg(\exists x\, P(x))$" ha lo stesso significato di "$\forall x\, \neg P(x)$".
- "$\neg(\forall x\, \forall y Q(x, y))$" ha lo stesso significato di "$\exists x\, \exists y \neg Q(x, y)$".
- "$\neg(\exists x\, \exists y Q(x, y))$" ha lo stesso significato di "$\forall x\, \forall y \neg Q(x, y)$".
- "$\neg(\forall x\, \exists y Q(x, y))$" ha lo stesso significato di "$\exists x\, \forall y \neg Q(x, y)$".
- "$\neg(\exists x\, \forall y Q(x, y))$" ha lo stesso significato di "$\forall x\, \exists y \neg Q(x, y)$".

Analogamente nel caso di più quantificatori.

Esempio 1.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La proprietà "$f$ è continua su $\mathbb{R}$" è espressa dalla seguente formula:

$$\forall x_0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ (|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

La proprietà "f *non* è continua su $\mathbb{R}$" è la negazione della precedente, e si esprime con la seguente formula:

$$\exists x_0\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x\ (|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon).$$

2. I tre principi della teoria intuitiva degli insiemi

Dopo questo brevissimo preambolo sui simboli logici, passiamo finalmente ad occuparci degli insiemi, sui quali è incentrato tutto questo corso. Non definiremo cosa sia un insieme, perché si tratta di una nozione primitiva non riconducibile ad altri concetti più elementari. Informalmente, sarà sufficiente pensare ad un *insieme* come ad una collezione di oggetti, priva di ogni struttura. Quegli oggetti a che costituiscono un insieme A si dicono i suoi *elementi*. In questo caso si scrive "$a \in A$", che si legge: "a appartiene ad A" oppure "A contiene a".

Per lo sviluppo di questa prima parte intuitiva di teoria degli insiemi, ci atterremo ai seguenti tre principi informali, ognuno dei quali sarà ripresentato in forma precisa e rigorosa nella seconda parte del corso.

> **Principio del Linguaggio.** Ogni proprietà che consideriamo deve essere esprimibile nel *linguaggio della teoria degli insiemi*, cioè deve poter essere scritta come formula nella quale compaiono soltanto i simboli logici, il simbolo di uguaglianza $=$, e il simbolo di appartenenza $\in$.

In altre parole, in base a questo principio possiamo identificare le *proprietà insiemistiche* con le *formule*.

Notazione 2.1. Scriviamo "$A \neq B$" per intendere la formula "$\neg(A = B)$", e scriviamo "$A \notin B$" per intendere "$\neg(A \in B)$".

L'intuizione che un insieme è completamente determinato dai suoi elementi è racchiusa nel seguente principio.

> **Principio di Estensionalità.** Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi, cioè:
> $$\forall A\ \forall B\ [\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B) \leftrightarrow A = B\,].$$

Osserviamo che – grazie a questo principio – potremmo anche fare a meno del simbolo di uguaglianza. Infatti, potremmo sostituire ogni formula "$A = B$" con la formula equivalente "$\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$".

Una fondamentale intuizione nella pratica matematica riguarda la possibilità di formare un insieme a partire da ogni assegnata proprietà. Precisamente, nella pratica sembra evidente che l'*estensione* di una proprietà, cioè la collezione di tutti gli oggetti che la soddisfano, formi un insieme. A questo corrisponde il terzo principio della teoria intuitiva degli insiemi, che è il seguente.

> **Principio di Comprensione.** Se P è una proprietà "ammissibile", allora:
> $$\exists X\ \forall x\,(x \in X \ \leftrightarrow\ P(x)).$$

Osserviamo subito che un tale insieme X è necessariamente unico, in conseguenza del principio di *estensionalità*. Per denotarlo, si scrive:

$$X = \{x \mid P(x)\}.$$

Adottiamo anche le seguenti ovvie convenzioni:

- "$x \in X$" significa $P(x)$;
- "$X = Y$" significa "$\forall x\ (P(x) \leftrightarrow x \in Y)$".
- "$X \in Y$" significa "$\exists y\ (y \in Y \wedge y = X)$".

Naturalmente, le proprietà di essere un numero naturale, intero, razionale, reale, complesso, sono tutte proprietà ammissibili.[3] Dunque potremo formare i rispettivi insiemi dei numeri naturali $\mathbb{N}$, dei numeri interi $\mathbb{Z}$, dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, dei numeri reali $\mathbb{R}$, e dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Attenzione! Non tutte le proprietà sono ammissibili. L'esempio più famoso, che ha avuto una cruciale importanza nella storia dei fondamenti della matematica,

[3] Anche se può sembrare strano, vedremo più avanti che anche queste proprietà soddisfano il principio del linguaggio, cioè sono esprimibili da formule che contengono soltanto simboli logici e i simboli di uguaglianza e di appartenenza.

è dato dal celebre *paradosso di Russell.* Sia P la proprietà di non essere elemento di se stesso, cioè $P(x)$ significa "$x \notin x$". Allora la sua estensione non può essere un insieme. Infatti, supponiamo per assurdo che esista l'insieme $R = \{x \mid x \notin x\}$ di tutti quegli insiemi che non appartengono a se stessi. Si hanno due casi. Se $R \in R$, allora R *non* soddisfa la proprietà P, dunque $R \notin R$. Se $R \notin R$, allora R soddisfa la proprietà P, e dunque $R \in R$, di nuovo contro l'ipotesi. In entrambi i casi otteniamo un assurdo, e dobbiamo così concludere che la collezione degli insiemi che non appartengono a se stessi non forma un insieme!

3. Alcune notazioni fondamentali

Nel caso di alcune proprietà ammissibili particolarmente importanti, fisseremo una volta per tutte delle particolari scritture per denotare i corrispondenti insiemi che si ottengono applicando il principio di comprensione. È bene chiarire che si tratta di scritture *metalinguistiche*, cioè scritture contenenti simboli esterni al linguaggio. Il primo semplice esempio è il seguente.

Notazione 3.1. Con la scrittura "$\emptyset$" denotiamo l'insieme $\{x \mid x \neq x\}$.

Visto che "$x \neq x$" è chiaramente una proprietà che non è verificata da alcun x, l'insieme "$\emptyset$" si chiama *insieme vuoto.* Si tratta dell'unico insieme senza elementi.

Introduciamo ora altri simboli molto familiari, in corrispondenza a proprietà ammissibili che si riferiscono ad insiemi assegnati A, B.

Notazione 3.2. Siano A e B insiemi assegnati. Allora

- La scrittura "$A \cup B$" denota l'insieme $\{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$, che viene chiamato l'*unione* di A e B;
- La scrittura "$A \cap B$" denota l'insieme $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$, chiamato l'*intersezione* di A e B;
- La scrittura "$A \setminus B$" denota l'insieme $\{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, chiamato la *differenza insiemistica* di A e B.

Dunque, l'unione è il corrispettivo insiemistico della disgiunzione inclusiva "$\vee$", e l'intersezione corrisponde alla congiunzione "$\wedge$".

Esercizio 3.3. Verificare le seguenti uguaglianze:

(1) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$.
(2) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Un'altra notazione comunemente usata è la seguente:

Notazione 3.4. Siano $a_1, \ldots, a_n$ insiemi fissati. Con la scrittura "$\{a_1, \ldots, a_n\}$" denotiamo l'insieme $\{x \mid (x = a_1) \vee \ldots \vee (x = a_n)\}$ i cui elementi sono tutti e soli gli a_i.

Seguendo il principio del *linguaggio*, anche le proprietà insiemistiche più semplici dovranno essere espresse da formule.

Definizione 3.5. Siano A e B insiemi. Diciamo che A è *sottoinsieme* di B (o A è *incluso* in B) se vale la proprietà: "$\forall x\ (x \in A \to x \in B)$". In questo caso scriviamo "$A \subseteq B$".

Dunque per noi "$A \subseteq B$" è una scrittura *metalinguistica*, che serve ad abbreviare la formula di sopra (ricordiamo che gli unici simboli extra-logici del linguaggio degli insiemi sono il simbolo di uguaglianza "$=$" e il simbolo di appartenenza "$\in$").

Usando la notazione di sottoinsieme, il principio di *estensionalità* potrebbe essere riscritto così:

$$\forall A\, \forall B\, [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)] \leftrightarrow A = B.$$

Se $X = \{x \mid P(x)\}$ è l'estensione di una proprietà P, allora:

- "$Y \subseteq X$" significa "$\forall x\ (x \in Y \to P(x))$".
- "$X \subseteq Y$" significa "$\forall x\ (P(x) \to x \in Y)$".

Per ogni insieme A, vale l'inclusione "$\emptyset \subseteq A$". Infatti, la corrispondente formula "$\forall x\, (x \in \emptyset \to x \in A)$", cioè "$\forall x\, (x \neq x \to x \in A)$", è banalmente vera. Si tratta infatti di una implicazione la cui premessa è sempre falsa.

Notazione 3.6. La scrittura "$\mathcal{P}(A)$" denota l'insieme $\{X \mid X \subseteq A\}$, che è chiamato l'*insieme potenza* o l'*insieme delle parti* di A.

Elenchiamo qui di seguito altre comode abbreviazioni che si usano molto nella pratica.

Notazione 3.7.

- Scrivendo "$\{x \in A \mid P(x)\}$" intendiamo $\{x \mid x \in A \wedge P(x)\}$;
- Scrivendo "$\forall\, x \in A\ P(x)$" intendiamo "$\forall\, x\ (x \in A \to P(x))$" ;
- Scrivendo "$\exists\, x \in A\ P(x)$" intendiamo "$\exists\, x\ (x \in A \wedge P(x))$".

4. Coppie ordinate

Una conseguenza del principio di estensionalità è l'impossibilità dell'esistenza di *atomi*, cioè di oggetti matematici che non siano insiemi. Osserviamo infatti che ognuno di questi atomi − in quanto privo di elementi − dovrebbe coincidere con l'*insieme vuoto*. Non c'è dubbio che questo contrasta con la pratica matematica. Ad esempio, i numeri e le coppie ordinate sono usualmente pensati come atomi e non come insiemi: è ben raro trovare un matematico che pensi al numero "pi greco" π come ad un insieme!

In questo corso svilupperemo una *teoria pura degli insiemi*, cioè assumeremo implicitamente che tutti gli oggetti con cui avremo a che fare siano insiemi, compresi i numeri e le coppie ordinate. In particolare, gli elementi di insiemi saranno a loro volta insiemi, e quindi il nostro campo d'azione sarà ristretto alle cosiddette *famiglie di insiemi*, per usare un termine dell'ordinario linguaggio matematico. Come vedremo, limitarsi agli *insiemi puri* è però una restrizione più apparente che reale. Uno degli scopi fondazionali della teoria degli insiemi è infatti proprio quello di mostrare come virtualmente *tutti* gli oggetti matematici, numeri compresi, possono essere "codificati" (cioè definiti) come particolari insiemi. Il primo esempio fondamentale che vedremo è quello di coppia ordinata.

Il concetto di coppia ordinata consiste nell'assegnare in modo "ordinato" due elementi (non necessariamente distinti): uno è la cosiddetta "prima componente" e l'altro la "seconda componente". Si usa la notazione (a, b) per indicare che a è la prima componente, e b la seconda.

La nozione di coppia ordinata potrebbe essere considerata come una nuova nozione primitiva, intuitivamente evidente, da aggiungere alla nozione primitiva di insieme. Ma il nostro scopo qui è quello di ricondurre ogni nozione matematica alla nozione di insieme. Con la prossima definizione, vedremo infatti che anche le coppie ordinate possono essere "codificate" da opportuni insiemi.

Definizione 4.1. Chiamiamo *coppia ordinata* di prima componente a e seconda componente b, il seguente insieme, detto *coppia di Kuratowki*:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

A prima vista, quella di sopra può sembrare una definizione piuttosto bizzarra, ma ciò che importa è che essa raggiunge lo scopo, realizzando tutte le proprietà richieste. Abbiamo infatti:

Esercizio 4.2. Verificare che valgono i seguenti fatti:

(1) X è una coppia ordinata se e solo se esistono a, b tali che $X = (a, b)$;
(2) La *prima componente* di una coppia ordinata X è quell'unico elemento a tale che $a \in x$ per ogni $x \in X$;
(3) La *seconda componente* di una coppia ordinata X la cui prima componte è a, è quell'unico elemento b tale che $(a, b) = X$.
(4) $(a, b) = (a', b')$ se e solo se $a = a'$ e $b = b'$.

A partire dalla nozione di coppia ordinata, si definiscono poi le triple ordinate ponendo $(a, b, c) = ((a, b), c)$, le quadruple ordinate $(a, b, c, d) = ((a, b, c), d)$, e così via.

Definizione 4.3. Il *prodotto cartesiano* di A con B è l'insieme di tutte le coppie ordinate la cui prima componente appartiene ad A e la cui seconda componente appartiene a B. In formule:

$$A \times B = \{x \mid \exists\, a \in A\ \exists\, b \in B\ x = (a, b)\}$$

Strettamente parlando, questa operazione di prodotto cartesiano non è associativa, perché in generale $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$. Coerentemente con la nostra definizione di tripla ordinata $(a, b, c) = ((a, b), c)$, conveniamo che $A \times B \times C = (A \times B) \times C$, e analogamente per prodotti cartesiani di quattro insiemi, *etc.*

5. Relazioni d'ordine

A partire dalle coppie ordinate, possiamo definire il concetto di relazione.

Definizione 5.1. Una *relazione binaria* R è un insieme di coppie ordinate.

- L'insieme $\mathrm{dom}(R) = \{a \mid \exists\, b\ (a, b) \in R\}$ di dice *dominio* di R ;
- L'insieme $\mathrm{imm}(R) = \{b \mid \exists\, a\ (a, b) \in R\}$ si dice *immagine* di R.

Si dice che R è una *relazione su* A quando $\mathrm{dom}(R) = A$ e $\mathrm{imm}(R) \subseteq A$.

Spesso si scrive aRb per intendere che la coppia ordinata (a, b) "soddisfa" la relazione R, cioè $(a, b) \in R$. Ad esempio, con la nostra definizione, la consueta relazione $<$ sui numeri naturali $\mathbb{N}$ è identificata con l'insieme di tutte quelle coppie ordinate (n, m) di numeri naturali dove n è minore di m.

Ricordiamo qui di seguito le fondamentali definizioni di relazione di equivalenza e relazione d'ordine.

Definizione 5.2. Una *relazione di equivalenza* su un insieme A è una relazione R su A che gode delle proprietà seguenti:

- *Riflessiva*: Per ogni $a \in A$, aRa;
- *Simmetrica*: Per ogni $a, b \in A$, $aRb \to bRa$;
- *Transitiva*: Per ogni $a, b, c \in A$, $(aRb \wedge bRc) \to aRc$.

Definizione 5.3. Sia A un insieme, e sia $\approx$ una relazione di equivalenza su A. La corrispondente *classe di equivalenza* di un elemento $a \in A$ è l'insieme:

$$[a] = \{a' \mid a' \approx a\}.$$

L'*insieme quoziente* di A rispetto alla relazione di equivalenza $\approx$ è l'insieme:

$$A/\!\approx\, = \{x \mid \exists\, a \in A \;\; x = [a]\}.$$

Notiamo che la scrittura "$x = [a]$" è in realtà una abbreviazione che sta ad indicare la seguente formula nel linguaggio degli insiemi: "$\forall a' \, (a' \in x \leftrightarrow a' \approx a)$".

Definizione 5.4. Una relazione di *ordine parziale* su un insieme A è una relazione $\leq$ su A che gode delle proprietà seguenti:

- *Riflessiva*: Per ogni $a \in A$, $a \leq a$;
- *Anti-simmetrica*: Per ogni $a, b \in A$, $(\, a \leq b \wedge b \leq a\,) \to a = b$;
- *Transitiva*: Per ogni $a, b, c \in A$, $(a \leq b \wedge b \leq c) \to a \leq c$.

Definizione 5.5. Una relazione di *ordine parziale stretto* su un insieme A è una relazione $<$ su A che gode delle proprietà seguenti:

- *Irriflessiva*: Per ogni $a \in A$, $a \not< a$;
- *Asimmetrica*: Per ogni $a, b \in A$, $a < b \to b \not< a$;
- *Transitiva*: Per ogni $a, b, c \in A$, $(a < b \wedge b < c) \to a < c$.

Le due definizioni di sopra sono sostanzialmente equivalenti, per cui useremo indifferente i simboli $<$ o $\leq$ a seconda delle circostanze. Vale infatti il seguente risultato.

Esercizio 5.6. Sia $\leq$ un ordine parziale su A, e definiamo

$$a \prec b \;\Leftrightarrow\; a \leq b \wedge a \neq b.$$

Allora $\prec$ è un ordine parziale *stretto* su A. Viceversa, se $<$ è un ordine parziale *stretto* su A e definiamo

$$a \preceq b \;\Leftrightarrow\; a < b \vee a = b,$$

allora $\preceq$ è un ordine parziale su A.

Definizione 5.7. Un ordine parziale si dice *ordine totale* se inoltre vale la:

- *Tricotomia*: Per ogni $a, b, c \in A$, vale una delle seguenti tre possibilità:
$$(1)\ a < b\,;\quad (2)\ a = b\,;\quad (3)\ b < a$$

In modo equivalente, avremmo potuto richiedere la validità di *una ed una sola* delle tre possibilità di sopra. Vale infatti il seguente risultato:

Esercizio 5.8. Una relazione $<$ è una relazione d'ordine totale stretto su A se e solo se valgono le due proprietà:
(1) *Transitività*: Per ogni $a, b, c \in A$, $(a < b \ \wedge \ b < c) \Rightarrow a < c$;
(2) *Tricotomia forte*: Per ogni $a, b, c \in A$, vale *una ed una sola* delle seguenti tre possibilità: $a < b$, $a = b$, $b < a$.

6. Funzioni

Passiamo ora ad un altro dei fondamentali concetti primitivi della matematica, quello di funzione. Grazie alla nozione di coppia ordinata (e quindi di relazione) siamo in grado di definire una funzione come uno speciale tipo di insieme. In sostanza, identificheremo una funzione con il suo grafico.

Definizione 6.1. Una *funzione* f è una relazione *univoca*, cioè una relazione con la proprietà che per ogni elemento $a \in \mathrm{dom}(f)$, esiste un unico b tale che $(a, b) \in f$. Si usa la notazione $f(a) = b$, o anche $f : a \mapsto b$, per intendere che $(a, b) \in f$. In questo caso si dice che b è l'immagine di a mediante f, oppure che b è il valore assunto da f in a.

La *funzione identità* id_A su un insieme A è la funzione avente come dominio A e tale che $\mathrm{id}_A(a) = a$ per ogni $a \in A$. Quando una funzione f assume un solo valore b, si dice che f è la *funzione costante* di valore b, e si usa la notazione c_b.

Notazione 6.2.
- Con la scrittura "$f : A \to B$" si intende che f è una funzione il cui dominio è l'insieme A, e la cui immagine è un sottoinsieme di B. Quando $\mathrm{imm}(f) = B$, si dice che $f : A \to B$ è *suriettiva*, oppure che f è *suriettiva su* B.[4]

Definizione 6.3. Una funzione f è *iniettiva* quando elementi diversi del dominio hanno immagini diverse. In formula:
$$\forall a, a' \in A\ (a \neq a' \to f(a) \neq f(a')).$$

Ricordiamo che ogni implicazione $P \to Q$ è logicamente equivalente alla sua contronominale $\neg Q \to \neg P$. Dunque possiamo riformulare l'iniettività di una funzione f in questo modo equivalente, più comodo da usare nella pratica:
$$\forall a, a' \in A\ (f(a) = f(a') \to a = a').$$

[4] Alcuni definiscono una funzione come una tripla (f, A, B), dove f è una relazione univoca, $\mathrm{dom}(f) = A$ e $\mathrm{imm}(f) \subseteq B$. L'insieme B viene chiamato *codominio*. In questo caso si parla di funzione suriettiva quando $\mathrm{imm}(f) = B$. Notiamo invece che in base alla nostra definizione, dove non è specificato il codominio, la nozione di suriettività non ha senso di per sé.

Definizione 6.4. Sia $f : A \to B$, e siano $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- L'*immagine di X mediante f* è l'insieme
$$f(X) = \{y \mid \exists\, x \in X\ f(x) = y\}.$$

Si usa la cosiddetta *notazione funzionale* $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$.

- La *controimmagine di Y mediante f* è l'insieme
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}.$$

Esercizio 6.5. Verificare le seguenti proprietà valgono per ogni X, X', Y, Y':

(1) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.
(2) $Y = f(f^{-1}(Y))$.
(3) $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$.
(4) $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$.
(5) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$.
(6) $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$.

Inoltre, l'uguaglianza $X = f^{-1}(f(X))$ vale per ogni X se e solo se f è iniettiva.

Notazione 6.6. Si usa la scrittura "B^A", o anche "$\mathrm{Fun}(A, B)$", per denotare l'insieme $\{f \mid f : A \to B\}$.

Definizione 6.7. Una funzione $f : A \to B$ si dice *biunivoca* (o *bigezione*) se è sia iniettiva che suriettiva.

Definizione 6.8. Siano f e g due funzioni con $\mathrm{imm}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$. La composizione $g \circ f$ è definita ponendo:
$$g \circ f = \{(x, y) \mid \exists z\ f(x) = z \wedge g(z) = y\}.$$
Dunque $g \circ f$ è quella funzione avente come dominio $\mathrm{dom}(f)$ e tale che per ogni x, $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$.

Esercizio 6.9. Verificare le seguenti proprietà:

(1) Siano f e g tali che $\mathrm{imm}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$. Allora per ogni $X \subseteq \mathrm{imm}(g)$ si ha $(f \circ g)^{-1}(X) = g^{-1}(f^{-1}(X))$.
(2) Sia $f : A \to B$. Allora:
  - f è iniettiva se e solo se ammette una *inversa sinistra*, cioè esiste $g : B \to A$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
  - f è suriettiva se e solo se ammette una *inversa destra*, cioè esiste $g : B \to A$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_B$.
  - $f : A \to B$ è biunivoca se e solo se è invertibile, cioè esiste $g : B \to A$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Definizione 6.10. Una *successione* è una funzione il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Talvolta, si parla di *I-successione* o *I-sequenza* per indicare una funzione f avente come dominio l'insieme I. In questi casi, si può usare anche la notazione $\langle f(i) \mid i \in I\rangle$.

Attenzione! Non confondere le due scritture $\langle f(i) \mid i \in I \rangle$ e $\{f(i) \mid i \in I\}$. Con la prima si intende denotare la funzione f, mentre con la seconda si intende denotare il corrispondente insieme immagine $\mathrm{imm}(f)$. È bene tenere distinte le due notazioni perché funzioni diverse possono avere la stessa immagine.

7. Unioni, intersezioni e prodotti infiniti

Notazione 7.1. Se $\mathcal{F}$ è una famiglia non vuota di insiemi, si denota:[5]

- $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F = \{x \mid \exists\, F \in \mathcal{F}\ x \in F\}$.
- $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \{x \mid \forall\, F \in \mathcal{F}\ x \in F\}$.

Se $\langle F_i \mid i \in I \rangle$ è una sequenza non vuota di insiemi (cioè $I \neq \emptyset$), analogamente a sopra si denota:

- $\bigcup_{i \in I} F_i = \{x \mid \exists\, i \in I\ x \in F_i\}$.
- $\bigcap_{i \in I} F_i = \{x \mid \forall\, i \in I\ x \in F_i\}$.

Esercizio 7.2. Sia $\langle F_i \mid i \in I \rangle$ è una sequenza non vuota di insiemi. Allora

(1) $X \setminus \left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) = \bigcap_{i \in I}(X \setminus F_i)$.
(2) $X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \bigcup_{i \in I}(X \setminus F_i)$.

Usando la nozione di sequenza, possiamo definire i prodotti cartesiani infiniti.

Definizione 7.3. Sia $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ una sequenza infinita. Il corrispondente *prodotto cartesiano infinito* è definito ponendo:

$$\prod_{i \in I} A_i \; = \; \{f \mid f \text{ è una } I\text{-sequenza } \wedge \ \forall i \in I \ f(i) \in A_i\}.$$

Questa definizione potrebbe essere estesa in modo naturale anche al caso in cui I è finito. Non lo facciamo, perché questo porterebbe ad una definizione diversa rispetto a quella già data per i prodotti cartesiani $A \times B$.

Enunciamo ora un'importante proprietà che non è direttamente deducibile dal principio di comprensione.

> **Assioma di Scelta.** Sia $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ una sequenza non vuota di insiemi non vuoti. Allora $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

L'assioma di scelta è una proprietà che a prima vista può apparire evidente. Tuttavia, come abbiamo detto, essa non è deducibile dal principio di comprensione. Inoltre, ha alcune conseguenze molto bizzarre e controintuitive, ed è stata per questo oggetto di lunghe discussioni a cavallo del 1900 e oltre. Oggigiorno, l'assioma di scelta è usato comunemente nella pratica matematica.

Esercizio 7.4. Sia $\langle F_{i,j} \mid (i,j) \in I \times J \rangle$ una sequenza di insiemi. Usando l'assioma di scelta, dimostrare che vale l'uguaglianza:

$$\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} F_{i,j} \; = \; \bigcup_{f \in J^I} \bigcap_{i \in I} F_{i,f(i)}.$$

---

[5] In realtà, visto che stiamo sviluppando una teoria *pura* degli insiemi, per noi tutti gli insiemi sono famiglie di insiemi! Manteniamo tuttavia il termine ridondante "famiglia" per seguire l'uso comune.