Appello di Algebra Lineare
07 Luglio 2022

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(1) I vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti oppure no? Mettere SI o NO nell'apposito riquadro e motivare la risposta sul foglio.
(2) Estrarre una base di $V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$ dal sistema di vettori v_1, v_2, v_3.
(3) Trovare dimensioni di nucleo ed immagine dell'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3.$$

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni lineari $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ date da:

$$\phi_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_2 \end{bmatrix}, \quad \phi_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ x_3 - x_4 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}.$$

(1) Trovare una base dei sottospazi: $\mathrm{Ker}(\phi_1)$ e $\mathrm{Im}(\phi_1)$.
(2) Trovare una base del sottospazio $\mathrm{Im}(\phi_1) \cap \mathrm{Im}(\phi_2)$.
(3) Trovare una base del sottospazio $\mathrm{Ker}(\phi_1) + \mathrm{Ker}(\phi_2)$.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 3. Sia t un parametro reale, e sia $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è la seguente:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & t+1 \end{bmatrix}.$$

(1) Determinare per quali valori del parametro t la matrice A_t è invertibile.
(2) Sia $B = A_{-4}$ la matrice che si ottiene ponendo $t = -4$. Trovare gli autovalori di B e stabilire se B è diagonalizzabile.

Risposta (1)

Risposta (2)

Esercizio 4. Siano v_1 e v_2 i vettori di una base di $\mathbb{R}^2$. Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ in partenza e arrivo.

(1) Qual è la matrice di ϕ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ in partenza e alla base ordinata $\mathcal{B}' = \{v_2, v_1\}$ in arrivo?

(2) Qual è la matrice di ϕ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}' = \{v_2, v_1\}$ in partenza e in arrivo?

(3) Qual è la matrice di $\phi \circ \phi$ rispetto alla base ordinata $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ in partenza e alla base ordinata $\mathcal{B}'' = \{v_1, -v_2\}$ in arrivo?

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Risposte Esercizio 1. Applicando l'algoritmo di Gauss alla matrice costituita dai vettori colonna v_1, v_2 e v_3 si ottiene una matrice con 2 pivots nelle prime due colonne. Ne concludiamo:

(1) I vettori v_1, v_2 e v_3 sono dipendenti.

(2) v_1 e v_2 formano una base di V (anche v_1 e v_3 o v_2 e v_3 sono buoni).

(3) La matrice ha rango 2, quindi la dimensione dell'imagine è 2, mentre quella del nucleo è $3 - 2 = 1$.

Risposte Esercizio 2.

(1) $\mathrm{Ker}(\phi_1)$ è costituita dai vettori $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ che soddisfanno $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Questo è uno spazio di dimensione 1, da cui ogni vettore $\neq 0$ è una base, ad esempio $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Lo spazio $\mathrm{Im}(\phi_1)$ è costituito dai vettori $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$ che soddisfanno $y_1 = -y_2$, le altre due coordinate invece possono essere qualsiasi. Una base è data dai vettori $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\mathrm{Im}(\phi_2)$ è costituita dai vettori che soddisfanno $y_2 = 0$, $y_3 = -y_4$. L'intersezione con $\mathrm{Im}(\phi_1)$ è data dai vettori con $y_1 = y_2 = 0$, $y_3 = -y_4$, quindi una base è data da $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(3) $\mathrm{Ker}(\phi_2)$ è costituita dai vettori che soddisfanno $x_1 = x_2$, $x_3 = x_4$. La Si ha $\mathrm{Ker}(\phi_1) \subset \mathrm{Ker}(\phi_2)$, quindi $\mathrm{Ker}(\phi_1) + \mathrm{Ker}(\phi_2) = \mathrm{Ker}(\phi_2)$. Una base è data da $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Risposte Esercizio 3.

(1) Il determinante della matrice A_t è uguale a t, quindi la matrice è invertibile per $t \neq 0$.

(2) Il polinomio caratteristico di B è $P(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 4\lambda + 4)$. Il polinomio $\lambda^2 + 4\lambda + 4$ ammette $\lambda = -2$ come radice di molteplicità 2, quindi gli autovalori sono 1 con molteplicità algebrica 1 e -2 con molteplicità algebrica 2. Si calcola che l'autospazio di -2 ha dimensione 1 e non 2, quindi la matrice non è diagonalizzabile.

Risposte Esercizio 4.

(1) Dopo la definizione della matrice associata ad un'applicazione lineare lo scambio dei vettori della base in arrivo corrisponde ad uno scambio delle righe della matrice. Risposta: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(2) Qui si fà anche uno scambio dei vettori in partenza, quindi uno scambio delle colonne. Risposta: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(3) La matrice di $\phi \circ \phi$ rispetto a v_1, v_2 in partenza e arrivo è $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sostituendo v_2 con $-v_2$ in arrivo si ottiene la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.