Appello di Algebra Lineare
17 gennaio 2023

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

IMPORTANTE: Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **TASSATIVAMENTE** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Si considerano i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e i sottospazi

$$V = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3), \quad W = \mathrm{Span}(v_4, v_5, v_6)$$

di $\mathbb{R}^4$.

(1) Trovare basi di V e di W scegliendo gli elementi tra i vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.
(2) Trovare una base di $V+W$ scegliendo gli elementi tra i vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.
(3) Si può trovare una base di $V \cap W$ scegliendo gli elementi tra i vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$? [Se si, indicarne una, se no, scrivere NO nell'apposito riquadro.]

Soluzione. (1) Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice che ha v_1, v_2, v_3 come colonne si ottengono due pivots nelle prime due colonne, dunque $\{v_1, v_2\}$ è una base di V. (Alternativamente si osserva che v_1 e v_2 non sono proporzionali e $v_1 + v_2 = v_3$.) Succede lo stesso con v_4, v_5, v_6, dunque $\{v_5, v_6\}$ è una base di W. (Alternativamente si osserva che v_4 e v_5 non sono proporzionali e $-v_4 + v_5 = v_6$.)

(2) Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice che ha $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ come colonne si ottengono tre pivots: nelle prime due colonne e nella quinta, dunque $\{v_1, v_2, v_5\}$ è una base di $V + W$.

(3) I vettori di V sono della forma $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, e dunque in coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{pmatrix},$$

da cui si ricavano (risolvendo per le λ_i) le equazioni cartesiane $y = 0 = 3x + z - w$ di V. Similmente per W si ottengono le equazioni cartesiane $y - w = 0 = 3x + z$.

Risolvendo il sistema di equazioni $\begin{cases} y = 0 \\ 3x + z - w = 0 \\ y - w = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases}$ si ottiene

$$V \cap W = \{(x, 0, -3x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

una cui base è chiaramente $\{v_4\}$. (Alternativamente $\dim(V \cap W) = \dim V + \dim W - \dim(V + W) = 2 + 2 - 3 = 1$ e si osserva che $v_4 = v_1 - 2v_2 \in V \cap W$.) $\square$

Esercizio 2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

- $T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$;
- $T(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$;
- $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$,

dove $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ sono i tre vettori della base standard di $\mathbb{R}^3$.

(1) Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1{+}\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2{+}\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3\}$ in partenza e in arrivo.

(2) Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base standard $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in partenza e in arrivo.

Soluzione. (1) Usando la definizione si ottiene immediatamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Osserviamo che

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \mathbf{e}_3) \\ &= T(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - T(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + T(\mathbf{e}_3) \\ &= (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) - \mathbf{e}_3 + (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_2) &= T(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3) \\ &= T(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) - T(\mathbf{e}_3) \\ &= \mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Ora, sapendo che $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, usando la definizione si ottiene dunque

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Risposta (1)

Risposta (2)

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3, e sia V il suo sottospazio $V = \mathrm{Span}\{1 + X^3, X^2 + X^3, 1 + X + X^2\}$.

(1) Per quali valori del parametro k il polinomio $3-X+2X^2+kX^3$ appartiene a V?

(2) Sia $T : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ l'applicazione lineare dove

$$T(X^3) = 1+X^3;\ T(X^2) = X^2+X^3;\ T(X) = 1+X+X^2;\ T(1) = 3-X+2X^2+kX^3.$$

Per quali valori del parametro k abbiamo $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$?

Soluzione. (1) I vettori di V sono della forma $\lambda_1(1 + X^3) + \lambda_2(X^2 + X^3) + \lambda_3(1 + X + X^2)$, dunque eguagliando questo generico elemento di V a $3 - X + 2X^2 + kX^3$ otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 3 \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = k \end{cases}.$$

Le prime tre equazioni danno $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$, dunque la quarta dà $k = 7$, che è quindi l'unico valore di k per cui il polinomio $3 - X + 2X^2 + kX^3$ appartiene a V.

(2) La matrice di T nella base ordinata $\{1, X, X^2, X^3\}$ di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ (in partenza e in arrivo) è chiaramente

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $7 - k$, dunque per ogni $k \neq 7$ abbiamo $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

(Alternativamente, si verifica facilmente che $1+X^3, X^2+X^3$ e $1+X+X^2$ sono indipendenti (ossia V ha dimensione 3), e adesso il punto (1) ci dice che $V = \mathrm{Im}(T)$ se e solo se $k = 7$, altrimenti $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$. Dunque $k \neq 7$ se e solo se $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^4$, e per la formula della dimensione questo è equivalente a $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.) $\square$

Risposta (1)

Risposta (2)

Esercizio 4. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
(2) Trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A. [Se non esiste, scrivere NO all'apposito riquadro, altrimenti indicare una base.]

Soluzione. (1) Si calcola facilmente il polinomio caratteristico di A: $\det(xI - A) = x^4 - 3x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)^2$, dunque gli autovalori di A sono 0 e 2 di molteplicità algebrica 1, e -1 di molteplicità algebrica 2.

(2) Detto V_λ l'autospazio di A relativo all'autovalore λ, si calcola faclimente che $V_2 = \{(x, -x, 2x/3, -x/2) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $V_0 = \{(2x, -x, 2x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, e $V_{-1} = \{(x, 0, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, dunque una base di $\mathbb{R}^4$ costituita di autovettori di A è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2/3 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Risposta (1)

Risposta (2)