Appello di Algebra Lineare
30 Marzo 2023

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Scrivere il nome su ogni foglio. Mettere **<u>TASSATIVAMENTE</u>** nei riquadri le risposte, e nel resto del foglio lo svolgimento. **Risposte non motivate non saranno accettate.** Ogni esercizio vale 8 punti.

Esercizio 1. Si consideri la seguente matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

(1) Determinare gli autovalori della matrice A.
(2) Trovare una base dell'autospazio dell'autovalore la cui molteplicità algebrica è strettamente maggiore di 1.
(3) La matrice A è diagonalizzabile? (Nell'apposito riquadro scrivere SI o NO).

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 2. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$

$$V = \operatorname{Span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Sia inoltre $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita come segue:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \end{bmatrix}.$$

(1) Calcolare le dimensioni di $\operatorname{Ker}(T)$ e di $\operatorname{Im}(T)$.
(2) Determinare la dimensione del sottospazio $V + \operatorname{Ker}(T)$ di $\mathbb{R}^4$.
(3) Determinare la dimensione del sottospazio $V \cap \operatorname{Ker}(T)$ di $\mathbb{R}^4$.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 3. Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ delle soluzioni (x, y, z, w) dell'equazione lineare

$$x + y + z - w = 0.$$

(1) Determinare la dimensione di V.
(2) Determinare una base ortogonale di V contenente il vettore $(1, -1, 1, 1)$.
(3) Determinare una base dello spazio $V^{\perp}$.

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Esercizio 4. Siano v_1 e v_2 i vettori di una base di $\mathbb{R}^2$. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base ordinata $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ in partenza e arrivo.

(1) Qual è la matrice di L rispetto alla base ordinata $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ in partenza e alla base ordinata $E' = \{e_3, e_1, e_2\}$ in arrivo?

(2) Qual è la matrice di L rispetto alla base ordinata $E' = \{e_3, e_1, e_2\}$ in partenza e in arrivo?

(3) Qual è la matrice di $L \circ L$ rispetto alla base ordinata $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ in partenza e alla base ordinata $E'' = \{e_1, e_3, e_2\}$ in arrivo?

Risposta (1)	Risposta (2)	Risposta (3)

Risposte Esercizio 1.

(1) Il polinomio caratteristico di A è $P_A(t) = t(t-1)^2(t+2)$, quindi gli autovalori sono 0 (con molteplicità algebrica 1), 1 (con molteplicità algebrica 2) e -2 (con molteplicità algebrica 1).

(2) L'autospazio di 1 è costituito dai vettori $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ che soddisfano $x = 0$, $w = 2z$, quindi una base è data da $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è quindi 2.

(3) SI, perché la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla molteplicità geometrica (questo è automatico per quelli di molteplicità 1).

Risposte Esercizio 2.

(1) Applicando l'algoritmo di Gauss alla matrice di T nelle basi canoniche

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

si trova una forma a scalini (ridotta)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

con 2 pivots, quindi $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(T) = 2$ e allora $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(T) = 4 - 2 = 2$.

Alternativamente, sappiamo che $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(T) \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, quindi per verificare che $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(T) = 2$ basta trovare 2 vettori linearmente indipendenti di $\mathrm{Im}(T)$. Per esempio, $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ lo sono perché non sono proporzionali. Ne risulta anche $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(T) = 4 - 2 = 2$.

(2) Dalla forma a scalini sopra risulta che gli elementi di $\mathrm{Ker}(T)$ sono i vettori con $x_3 = -2x_4$, $x_1 = 2x_2 - x_4$. Ponendo, per esempio, $x_4 = 0, x_2 = 1$, poi $x_4 = 1, x_2 = 0$, ne risulta la base $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

D'altra parte, V ha dimensione 3, poiché si verifica facilmente che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Si verifica anche che V non contiene v_1 (e neanche v_2). Quindi $4 \geq \dim_{\mathbb{R}}(V + \mathrm{Ker}(T)) > 3$, e l'unica possibilità è $\dim_{\mathbb{R}}(V + \mathrm{Ker}(T)) = 4$.

(3) Con la formula di Grassmann si calcola $\dim_{\mathbb{R}}(V \cap \mathrm{Ker}(T)) = \dim_{\mathbb{R}}(V) + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(T) - \dim_{\mathbb{R}}(V + \mathrm{Ker}(T)) = 3 + 2 - 4 = 1$.

Risposte Esercizio 3.

(1) Chiaramente la dimensione di V è 3, visto che V è lo spazio delle soluzioni di un'equazione lineare non banale. Usando l'algoritmo di Gauss si trova ad esempio

la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ con

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Osserviamo che $(1, -1, 1, 1) = -v_1 + v_2 + v_3$ dunque il vettore $w_1 = (1, -1, 1, 1)$ è in V, e chiaramente $\{w_1, v_2, v_3\}$ è una base di V. Applicando l'ortogonalizzazione di Gram-Schmidt a questa base troviamo la base ortogonale $\{w_1, w_2, w_3\}$ dove

$$w_2 = v_2 \quad \text{e} \quad w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

(3) Sappiamo dalla teoria (ed è immediato verificare) che il vettore dei coefficienti della nostra equazione è ortogonale a V, dunque, poiché $\dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} = 4 - \dim_{\mathbb{R}} V = 4 - 3 = 1$, il vettore $(1, 1, 1, -1)$ è una base di $V^{\perp}$.

Risposte Esercizio 4.

(1) Usando la definizione di matrice di una trasformazione lineare nella base E in partenza e E' in arrivo si calcola immediatamente che la matrice cercata è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si può osservare che, essendo E' ottenuta da E tramite una permutazione ciclica dei suoi elementi, la matrice cercata si ottiene facendo la stessa permutazione ciclica delle righe della matrice nella base E in partenza e in arrivo.

(2) Usando la definizione di matrice di una trasformazione lineare nella base E' in partenza e in arrivo si calcola immediatamente che la matrice cercata è

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si può osservare che, essendo E' ottenuta da E tramite una permutazione ciclica dei suoi elementi, la matrice cercata si ottiene facendo la stessa permutazione ciclica delle colonne della matrice nella base E in partenza e E' in arrivo.

(1) Usando la definizione di matrice di una trasformazione lineare nella base E in partenza e E'' in arrivo si calcola immediatamente che la matrice di L in queste basi è

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si può osservare che, essendo E'' ottenuta da E tramite una permutazione dei suoi elementi, la matrice di L nella base E in partenza e E'' in arrivo si ottiene facendo la stessa permutazione delle righe della matrice nella base E in partenza e in arrivo.

Ora, per la formula della matrice della composizione di trasformazioni lineari, la matrice di $L \circ L$ nella base E in partenza e E'' in arrivo è semplicemente data dal prodotto

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$