SOLUZIONI Compito scritto del 14/1/2022

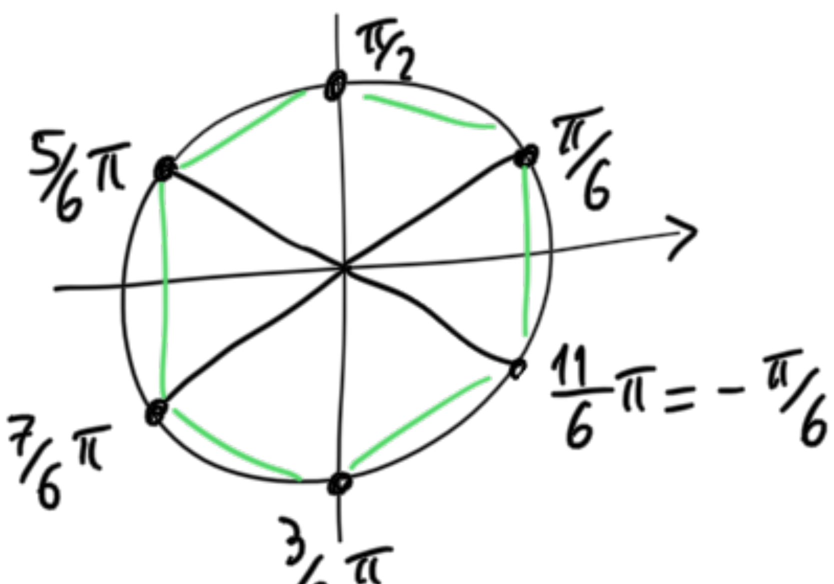
Esercizio 1 Trovare tutte le soluzioni complesse di $z^6+64=0$

In coordinate polari, sia $z=(\rho,\theta) \Rightarrow z^6=(\rho^6, 6\theta)$

Visto che $z^6=-64$, scriviamo in coordinate polari anche $-64=(64,\pi)$. Quindi:

$$\begin{cases} \rho^6 = 64 \Rightarrow \rho = 2 \\ 6\theta = \pi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pi/6 + k\,\pi/3 = \pi/6,\ \pi/2,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi = -\pi/6 \end{cases}$$

e poi si ripetono.



Quindi le soluzioni sono 6. Precisamente:

$z_1 = (2, \pi/6) \rightsquigarrow z_1 = 2(\cos \pi/6 + i \sin \pi/6) = \sqrt{3} + i$

$z_2 = (2, \pi/2) \rightsquigarrow z_2 = 2i$

$z_3 = (2, 5/6\,\pi) \rightsquigarrow z_3 = 2(\cos 5/6\,\pi + i \cdot \sin \frac{5}{6}\pi) = -\sqrt{3} + i$

$z_4 = (2, 7/6\,\pi) \rightsquigarrow z_4 = 2(\cos 7/6\,\pi + i \sin 7/6\,\pi) = -\sqrt{3} - i$

$z_5 = (2, 3/2\,\pi) \longrightarrow z_5 = -2i$

$$z_6 = \left(2, -\tfrac{\pi}{6}\right) \rightsquigarrow z_6 = 2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i$$

Esercizio 2

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ appl. lineare corrispondente al sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = b_1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = b_2 \\ \qquad -2x_2 + 6x_3 = b_3 \end{cases}$$

Riduciamo la matrice associata:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 4 & 3 & 3 & -2 & b_2 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{II-2I} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{III+2II}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3+2b_2-4b_1 \end{array}\right)$$

Anche se NON era richiesto dall'esercizio, notiamo che il sistema ha soluzione $\iff b_3 + 2b_2 - 4b_1 = 0$

La forma ridotta è quindi

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & L & L \end{array} \end{array}$$

Le variabili libere sono x_3 e x_4

Troviamo le soluzioni speciali:

$$x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3\cdot 1 - 0 = 0 & \Longrightarrow 2x_1 + 3 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \\ x_2 - 3\cdot 1 + 0 = 0 & \Longrightarrow x_2 = 3 \end{cases} \qquad \vec{S}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 0 - 1 = 0 & \Longrightarrow 2x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 - 0 + 0 = 0 & \Longrightarrow x_2 = 0 \end{cases} \qquad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimensione del NUCLEO e' uguale al numero di variabili libere e uguale al numero di soluzioni speciali, quindi $\dim(\ker(T)) = 2$.
Una sua base e':

$$\mathcal{B} = \{\vec{S}_1, \vec{S}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimensione dell' IMMAGINE e' uguale al numero di colonne pivot, quindi $\dim(\mathrm{Imm}(T)) = 2$. Una sua base e' formata dalle colonne pivot della matrice iniziale, quindi

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Quando $b_1 = 2$, $b_2 = 5$, $b_3 = -2$ si ha che il sistema ridotto e':

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + 2b_2 - 4b_1 \end{array} \right), \text{ cioe' } \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Troviamo una soluzione particolare ponendo le variabili libere $x_3 = x_4 = 0$ nel sistema ridotto:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x_1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{array} \quad \vec{x}_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi l'insieme di tutte le soluzioni e':

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{v} + \vec{x}_p \;\middle|\; \vec{v} \in \ker(T) \right\} = \left\{ \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{generico vettore del nucleo}} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizio 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico:

sviluppo lungo la II colonna

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

(sviluppo lungo la II riga)

$$= (1-\lambda)(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)\left[(-\lambda)(-2-\lambda) - 0\right] =$$

$$= \lambda \cdot (\lambda-1)^2 (\lambda+2).$$

Quindi gli autovalori di A sono:

- $\lambda = 0$ con molt. alg. 1 ; $\lambda = 1$ con molt. alg. 2 ; $\lambda = -2$ con molt. alg. 1

$\lambda = 0$ L'autospazio $Aut_A(0) = \ker(A - 0 \cdot I) = \ker A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + 2I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{IV + III}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ \dots \end{pmatrix}$

La variabile libera e' x

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array} \end{array}$$

La variabile libera è x_4.

Troviamo la soluzione speciale:

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 + 2x_4 = 0 & \Rightarrow x_2 + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'autospazio $Aut_A(0)$ ha come base $\mathcal{B} = \{\vec{s}_1\}$, quindi ha dimensione 1, e la molteplicità geometrica di $\lambda = 0$ è 1.

$\lambda = 1$ L'autospazio $Aut_A(1) = \ker(A - I)$

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+I]{II-2I} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + \frac{1}{2} II} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} P & L & L & P \end{array} \end{array}$$

Ci sono due variabili libere, cioè x_2 e x_3. Troviamo le soluzioni speciali:

$$x_2 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 & \Rightarrow -x_1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{cases} \qquad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 0 \quad \Big| \quad 6x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0$

$$x_2 = 0,\ x_3 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow -x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \\ 6x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases} \qquad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'autospazio $Aut_A(1)$ ha come base $\mathcal{B} = \{\vec{s}_2, \vec{s}_3\}$, quindi ha dimensione 2, e la molteplicita' geometrica di $\lambda = 1$ e' 2.

$\lambda = -2$ L'autospazio $Aut_A(-2) = \ker(A + 2I)$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-2\text{I}]{\text{II}+2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

La variabile libera e' x_4.

Troviamo la soluzione speciale.

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 3x_2 + 6x_4 = 0 \Rightarrow 3x_2 + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \end{cases} \qquad \vec{s}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ \end{pmatrix}$$

$$3x_2 + 6x_4 = 0 \Rightarrow 3x_2 + 6 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$
$$3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

L'autospazio $Aut_A(-2)$ ha come base $\mathcal{B} = \{\vec{s}_4\}$, quindi ha dimensione 1 e la molteplicita' geometrica di $\lambda = -2$ e' 1.

Visto che tutti gli autovalori sono reali, e che per ognuno di essi la molteplicita' algebrica e' uguale alla molteplicita' geometrica, la matrice A e' diagonalizzabile.

$\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{s}_4\}$ e' una base di autovettori.

Quindi considerando la matrice "cambio di base"

$$S = \left(\vec{s}_1 \middle| \vec{s}_2 \middle| \vec{s}_3 \middle| \vec{s}_4 \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ abbiamo che

$$S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ e' la matrice diagonale i cui

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

elementi sulla diagonale sono gli autovalori rispettivamente di $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$, e $\vec{s}_4$, cioè $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 1$, e $\lambda = -2$

$\boxed{\text{Esercizio 4}}$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \right\}$$

Notiamo che $W = \ker(T)$ dove $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$ è l'applicazione lineare dove

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 3x_1 + 2x_2 - x_4 .$$

La matrice associata è

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & L & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Banalmente, le variabili libere sono x_2, x_3, x_4.

Troviamo le tre soluzioni speciali:

$x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ $\quad \{ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 2 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -2/3$ $\quad \vec{s}_1 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ $\quad \{ 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \Rightarrow 3x_1 + 0 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\quad \vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = 0$ $\quad \{ \quad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$x_2 = 0$ $\quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 + 0 - 1 = 0 \qquad \vec{s}_3 = \begin{pmatrix} \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0$ $\qquad \Rightarrow x_1 = 1/3$

$x_4 = 1$

Dunque una base di $W = \ker(T)$ e' $\mathcal{B} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\}$

Visto che $\dim W = 3$, basta prendere un qualunque vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ t.c. $\vec{v} \notin W$ e certamente allora $W + \text{span}\{\vec{v}\} = \mathbb{R}^4$.

Infatti, visto che $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ sono lin. indip. e $\vec{v} \notin W = \text{Span}\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\}$ allora $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \vec{v}$ sono 4 vettori linearmente indip. di $\mathbb{R}^4$ tutti appartenenti a $W + \text{Span}\{v\}$ e percio' $\dim(W + \text{Span}\{\vec{v}\}) \geq 4$.

Ma $W + \text{Span}\{\vec{v}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ e possiamo concludere che $W + \text{Span}\{\vec{v}\} = \mathbb{R}^4$.

Un esempio di vettore $\vec{v} \notin W$ e' $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ma se ne possono trovare facilmente molti altri.

Cerchiamo ora una matrice A 4×4 diagonalizzabile, i cui autovalori sono $\lambda=1$ e $\lambda=2$, e tale che $Aut_A(1)=W$.

Dunque $Aut_A(1)=W$ ha come base $\mathcal{B}=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\vec{s}_3\}$, e questo vale

se e solo se $\quad A\cdot\vec{s}_1=\vec{s}_1 \;;\; A\cdot\vec{s}_2=\vec{s}_2 \;;\; A\vec{s}_3=\vec{s}_3$

Se prendiamo un vettore $\vec{v}\notin W$, ad esempio $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$,

ed imponiamo che $A\cdot\vec{v}=2\cdot\vec{v}$, avremo che

$\tilde{\mathcal{B}}=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\vec{s}_3,\vec{v}\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A.

Dunque, una matrice A che ha le proprietà richieste,

è la matrice che assume la forma diagonale $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

se scritta rispetto alla base $\tilde{\mathcal{B}}$.

Se consideriamo la matrice "cambio di base"

$$S=\left(\vec{s}_1\,\middle|\,\vec{s}_2\,\middle|\,\vec{s}_3\,\middle|\,\vec{v}\right)=\begin{pmatrix}-2/3&0&1/3&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$, allora

$$S^{-1} A S = D \text{, cioè } A = S \cdot D \cdot S^{-1}.$$

Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>ATTENZIONE</u>: Ovviamente ci sono infinite altre metrici A con le proprietà volute, che si ottengono scegliendo al posto di $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ un qualunque vettore $\vec{v} \notin W$.