Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 24 Gennaio 2022

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [6 pt.]
Trovare tutte le soluzioni complesse (scritte in forma cartesiana) della seguente equazione, dove $\overline{z}$ denota il coniugato di z:

$$\overline{z} - 16z^3 = 0 \iff \overline{z} = 16z^3$$

$$z = (\rho, \theta)$$

$$\overline{z} = (\rho, -\theta) \qquad z^3 = (\rho^3, 3\theta) \qquad 16z^3 = (16\rho^3, 3\theta)$$

$$\overline{z} = 16z^3 \iff (\rho, -\theta) = (16\rho^3, 3\theta) \iff$$

$$\begin{cases} \rho = 16\rho^3 \Rightarrow \rho = 0 \text{ o } \rho = \frac{1}{4} \\ -\theta = 3\theta + 2k\pi \Rightarrow 4\theta = -2k\pi \Rightarrow \theta = -k \cdot \pi/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta = 0, \pi/2, \pi, \tfrac{3}{2}\pi \text{ (poi si ripetono)}$$

Le soluzioni sono:

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = \left(\frac{1}{4}, 0\right) \Rightarrow z_1 = \frac{1}{4}$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{4}, \pi/2\right) \Rightarrow z_2 = \frac{1}{4}i$$

$$z_3 = \left(\frac{1}{4}, \pi\right) \Rightarrow z_3 = -\frac{1}{4}$$

$$z_4 = \left(\frac{1}{4}, \tfrac{3}{2}\pi\right) \Rightarrow z_4 = -\frac{1}{4}i$$

Esercizio 2. [10pt.]
Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$, dove k è un parametro:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2k \\ 2k+1 \\ -2 \\ 6k \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2k-1 \\ -3 \\ 4k^2-2 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro k, determinare la dimensione del sottospazio $W = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$A = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \right) = \begin{pmatrix} -1 & -2k & 1 \\ 1 & 2k+1 & 2k-1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 6k & 4k^2-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}+2\text{I}]{\text{II}+\text{I}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2k & 1 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2k & 4k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-2k\cdot\text{II}]{\text{III}+2\text{II}} \begin{pmatrix} -1 & -2k & 1 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 0 & 4k-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $4k-3 \neq 0$, cioè se $k \neq \frac{3}{4}$ allora ci sono 3 colonne pivot.
Quindi $\mathrm{Im}(T_A) = 3$ dove $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ e' l'appl. lineare associata ad A. D'altra parte $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathrm{Im}(T_A)$ e quindi $\dim W = 3$

Se invece $k = \frac{3}{4}$ ci sono 2 colonne pivot e quindi $\dim W = \dim(\mathrm{Im}(T_A)) = 2$

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile S ed una matrice diagonale D tali che $S^{-1}AS = D$.

Il polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \underset{\text{sviluppo lungo la II riga}}{=} (-3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{sviluppo lungo la II riga}}{=} (-3-\lambda)(1-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda+3)(\lambda-1)\left[(2-\lambda)(-1-\lambda)+2\right] = \lambda(\lambda+3)(\lambda-1)^2$$

$$\cancel{-2} - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 \cancel{+2}$$

$$\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda-1)$$

Gli autovalori sono:

$\lambda = 1$ molt. alg. 2

$\lambda = 0$ molt. alg. 1

$\lambda = -3$ molt. alg. 1

$\lambda=1$ $\quad Aut_A(1) = \ker(A-I)$

$$A-I = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-I} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV+\frac{1}{2}II]{III+II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } III \text{ e } IV} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} P & P & P & L \end{array}$$

$x_4 = 1$ var. libera

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 + 0 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una base dell'autospazio $Aut_A(1)$ e' $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

quindi la molteplicita' geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ e' $1 < 2 =$ molt. alg.

Quindi la matrice A NON e' diagonalizzabile e NON esiste una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS$ e' diagonale.

$\underline{\lambda = 0}$ $\quad \mathrm{Aut}_A(0) = \ker A$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e IV}]{\substack{\text{per comodità} \\ \text{scambio}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV} - 2\mathrm{I}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II e IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{IV}+3\mathrm{II}]{\mathrm{III}-4\mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IV}+\mathrm{III}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

$x_4 = 1$

VAR. LIBERA

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ -3x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 + 0 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\vec{s_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Base di } \mathrm{Aut}_A(0) \text{ e' } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{\lambda = -3}$ $\quad Aut_A(-3) = \ker(A+3I)$

$$A+3I = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I e IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{IV-5I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II e IV}]{\text{scambio}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III+2II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\quad$ P P L P

$x_3 = 1$ VAR. LIBERA

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - 12x_4 = 0 \Rightarrow -2x_2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = -1 \\ -24x_4 = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 - 1 + 1 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Base di } Aut_A(-3) \text{ e'} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 4. [8 pt.]

Sia $W = \mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai seguenti vettori:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base di W.
2. Trovare un'applicazione lineare T tale che $\ker(T) = W$.
3. Trovare, se esiste, una matrice A di dimensioni 3×3 tale che:
   - A è diagonalizzabile.
   - A *non* è invertibile.
   - W è un autospazio di A.

Sia $B = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3 \middle| v_4 \middle| v_5 \right)$. Allora $W = \mathrm{Im}\, T_B$ dove

$T_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ e' l'appl. lineare associata a B.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & -5 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}+2\mathrm{I}]{\mathrm{II}+3\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-2\mathrm{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} P & L & P & L & L \end{array} \end{array}$$

Una base di $W = \mathrm{Im}\, T_B$ e' data dalle colonne pivot della matrice iniziale B, cioè

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Completiamo $\mathcal{B}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$,
ad esempio $\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Si tratta di una base perche' $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

Prendiamo l'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
tale che $T\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e

$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Allora $\ker(T) = W$.

Se volessimo trovare la matrice associata a T rispetto alla base canonica (cosa NON richiesta nella domanda 2 dell'esercizio) possiamo procedere cosi':

1. La matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ e' $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. La matrice "cambio di base" e' $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Se A e' la matrice associata a T rispetto alla base canonica, allora $C = S^{-1} A S$ e quindi $A = S \cdot C \cdot S^{-1}$

L'applicazione lineare T considerata sopra ha i vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ come autovettori di autovalore $\lambda = 0$.

Inoltre, ha il vettore $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ come autovettore di autovalore $\lambda = 1$.

Quindi la matrice associata A ha come autospazio $Aut_0(E) = Span\{w_1, w_2\} = W$ e come autospazio $Aut_1(E) = Span\{w_3\}$.

Quindi A è diagonalizzabile e non invertibile (perché ha nucleo NON banale)

Infatti $\tilde{\mathcal{B}} = \{w_1, w_2, w_3\}$ sono una base di autovettori e

$$S^{-1} A \cdot S = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è diagonale}$$

Svolgendo i calcoli si ricava che $S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

e che $A = S \cdot C \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$