



**Esercizio 2.** [8 pt.]

Si consideri il seguente sistema lineare con parametro  $k$ :

$$\begin{cases} x_1 + \quad \quad + kx_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = k - 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

1. Nel caso  $k = 1$  descrivere l'insieme delle soluzioni del sistema.
2. Discutere al variare di  $k \in \mathbb{R}$  se il sistema non ha soluzioni, o se ha un'unica soluzione, o se ha infinite soluzioni.

**Esercizio 3. [10pt.]**

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice  $A$  e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Trovare, se esistono, una matrice invertibile  $S$  ed una matrice diagonale  $D$  tali che  $S^{-1}AS = D$ .

#### Esercizio 4 [punti 8]

1. Trovare una matrice  $A$  di dimensioni  $3 \times 3$  (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti proprietà:

- Tutti e soli i suoi autovalori sono  $\lambda = 2$  e  $\lambda = -1$ ;

- I tre vettori  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  sono autovettori.

2. Esiste una matrice  $B$  di dimensioni  $2 \times 2$  (scritta rispetto alla base canonica) che soddisfi le seguenti tre proprietà?

- L'applicazione lineare associata non è suriettiva.
- $\lambda = 1$  è autovalore.
- $B$  non è diagonalizzabile.

Se la risposta è NO, spiegare perché. Se la risposta è SI, trovare un esempio.