Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 30 Gennaio 2023

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [7 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z^3 = i.$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z dell'equazione

$$e^{3z} = e^{\overline{z}}.$$

($\overline{z}$ è il coniugato di z).

Esercizio 2. [8 pt.]

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}; \qquad W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

1. Trovare una base di V e una base di W.
2. Trovare una base di $V + W$.
3. Trovare una base di $V \cap W$.

Esercizio 3. [10pt.]
Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

Esercizio 4 [punti 7]

1. Trovare il vettore $w \in \mathbb{R}^3$ tale che:

   - La sua prima e terza coordinata sono uguali.
   - La sua seconda coordinata è uguale 2.
   - $w \in \text{span}\{(1, 3, -1), (1, -2, 4)\}$

2. Trovare la matrice A (scritta rispetto alla base canonica) associata ad una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfi le seguenti proprietà:

   - $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 3$.
   - $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $\lambda = 1$.