Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

8 Gennaio 2024

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n^3 < 70\}$ e $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}$ allora $\lvert X \cap Y \rvert = 2$.	☒	☐
2) La composizione di due funzioni iniettive è iniettiva.	☒	☐
3) Se v_1 e v_2 appartengono all'autospazio associato a λ, allora anche $v_1 - v_2$ ci appartiene.	☒	☐
4) Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene allo Span di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.	☒	☐
5) Tre vettori che generano $\mathbb{R}^3$ sono sempre una base.	☒	☐
6) L'equazione complessa $e^z = 1$ ha infinite soluzioni.	☒	☐
7) Un'appl. lin. è iniettiva se il sistema lin. associato ha soluzione per ogni scelta dei termini noti.	☐	☒
8) Tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sono suriettive.	☐	☒
9) $\det(A \cdot B^2) = \det(A) \cdot \det(B)^2$.	☒	☐
10) Il quadrato di un numero complesso immaginario puro è immaginario puro.	☐	☒
11) Il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.	☒	☐
12) Se V e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ con $\dim(V) = \dim(W) = 2$ allora $\dim(V \cap W) > 0$.	☐	☒

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

– 8 Gennaio 2024 –

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Il cubo di un numero complesso immaginario puro è immaginario puro.	☒	☐
2) Un'appl. lin. è suriettiva se il sistema lin. associato ha soluzione per ogni scelta dei termini noti.	☒	☐
3) $\det(A+2B) = \det(A) + 2\det(B)$.	☐	☒
4) Se $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 40\}$ e $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\}$ allora $\lvert A \cap B \rvert = 2$.	☐	☒
5) Il vettore $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.	☒	☐
6) Tre vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$ sono sempre una base.	☒	☐
7) La composizione di due funzioni suriettive è suriettiva.	☒	☐
8) Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene allo Span di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.	☒	☐
9) Se v appartiene all'autospazio associato a λ allora anche $-v$ ci appartiene.	☒	☐
10) Se V e W sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ con $\dim(V) = \dim(W) = 3$ allora $\dim(V \cap W) > 1$.	☒	☐
11) L'equazione complessa $e^z = 1$ ha una e una sola soluzione.	☐	☒
12) Tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sono iniettive.	☐	☒

Compito 24/01/08

ESERCIZIO 1

1) $e^{\frac{\pi}{2}i} = z^2$

$e^{\frac{\pi}{2}i}$ ha coordinate polari $\rho = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$,
quindi $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$. $\quad z = (\rho, \theta) \Rightarrow z^2 = (\rho^2, 2\theta)$,
quindi dobbiamo risolvere $\begin{cases} \rho^2 = 1 & \Rightarrow \rho = 1 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi & \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \end{cases}$

Le soluzioni sono $z_1 = (1, \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ e
$z_2 = (1, \frac{5}{4}\pi) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) $z^3 - 7\bar{z}^2 = 0 \iff z^3 = 7\bar{z}^2$

$z = (\rho, \theta) \Rightarrow z^3 = (\rho^3, 3\theta)$ e $7\bar{z}^2 = (7\rho^2, -2\theta)$. Quindi

$$\begin{cases} \rho^3 = 7\rho^2 \\ 3\theta = -2\theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \rho = 0 \text{ o } \rho = 7 \\ 5\theta = 2k\pi \leadsto \theta = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \\ \qquad \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi \end{array}$$

Quindi le soluzioni sono:

$z_0 = 0$

$z_1 = (7, 0) = 7 \quad ; \quad z_2 = (7, \frac{2}{5}\pi) = 7(\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi)$

$z_3 = (7, \frac{4}{5}\pi) = 7(\cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi)$

$z_4 = (7, \frac{6}{5}\pi) = 7(\cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi)$

$z_5 = (7, \frac{8}{5}\pi) = 7(\cos\frac{8}{5}\pi + i\sin\frac{8}{5}\pi)$

ESERCIZIO

2

Riduciamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{I}]{\mathrm{II}-2\mathrm{I}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{III}-\mathrm{II}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} P & P & L & L & L \end{array} \end{array}$$

1) Una base dell'immagine di f e' data dai vettori colonne nella matrice associata, cioe'

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) La dimensione del nucleo di f e' uguale al numero di colonne libere della matrice associata, cioe' 3.

3) Le variabili libere sono x_3, x_4 e x_5.

Troviamo le soluzioni speciali del sistema ridotto omogeneo:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3 + 0 = 0 \rightarrow x_1 = 3/2 \\ -x_2 + 2 - 0 - 0 = 0 \rightarrow x_2 = 2 \end{cases}$$

Quindi $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 - 0 + 0 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ -x_2 + 0 - 1 - 0 = 0 \rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

Quindi $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$

$$\begin{cases} 2x_1 - 0 + 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1 \\ -x_2 + 0 + 0 - 4 = 0 \rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

Quindi $\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base del nucleo di f e' data dalle soluzioni speciali:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

4) Riduciamo la matrice completa:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & -4 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[III-I]{II-2I} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & -3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ e' tale che $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ se e solo se il sistema avente come vettore di termini noti $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ ha come soluzione $\vec{v}$.

La riduzione di sopra mostra che il sistema con quei termini noti e' risolubile e l'insieme dei vettori $\vec{v}$ che cerchiamo è l'insieme delle soluzioni $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ del sistema (ridotto)

$$\begin{cases} 2x_1 \quad -3x_3 \quad +2x_5 = 4 \\ \quad -x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = -2 \end{cases}$$

Si può trovare una soluzione particolare ponendo le variabili libere $x_3 = x_4 = x_5 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 = 4 \rightarrow x_1 = 2 \\ -x_2 = -2 \rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \qquad \vec{x}_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ soluzione particolare}$$

L'insieme di tutte le soluzioni si ottiene sommando una fissata soluzione particolare con tutti i vettori del nucleo. Quindi:

$$\left\{ \vec{v} \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \vec{x}_p + \vec{w} \;\middle|\; \vec{w} \in \ker f \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

/5

Esercizio

3

1) $A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

determinante $\rightsquigarrow$

$(1-\lambda)\cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$ (sviluppo lungo la I riga)

sviluppo lungo la I colonna

$= (1-\lambda)(1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \underbrace{(\lambda^2-3\lambda+2)}_{(\lambda-1)(\lambda-2)} =$

$= (\lambda-1)^3(\lambda-2)$

$\lambda = 1$ è autovalore di molt. alg. 3.

$\lambda = 2$ è autovalore di molt. alg. 1.

2) $\underline{\lambda=1}$ $\quad Aut(A,1) = \ker(A-1\cdot I)$

$A-I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

È immediato vedere che $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

sono vettori del nucleo di $A-I$.

Inoltre sono vettori lin. indip. e quindi formano una base di $Ker(A-I) = Aut(A, +1)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di $\lambda = 1$ è 3

$\underline{\lambda = 2}$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV + III}$$

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

Per trovare una base di $ker(A-2I)$ trovo le soluzioni speciali.

L'unica variabile libera è x_4:

$$x_4 = 1 \quad \begin{cases} -x_1 \quad -x_3 - x_4 = 0 \\ -x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} -x_1 \quad -x_3 - 1 = 0 \\ -x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ -2x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_2 = -x_3 - 1 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_1 = -x_3 - 1 = -\tfrac{1}{2}$$

Quindi la soluzione speciale è $\vec{s} = \begin{pmatrix} -\frac12 \\ -\frac12 \\ -\frac12 \\ 1 \end{pmatrix}$

e una base di $Aut(A, 2) = ker(A-2I)$ è:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac12 \\ -\frac12 \\ -\frac12 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

LA MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di $\lambda = 2$ è 1.

3) La matrice è diagonalizzabile perché esiste una base di autovettori, cioè

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ricordiamo che esiste una base di autovettori se e solo se tutti gli autovalori sono reali e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche coincidono, come è accaduto in questo caso.

Es_4 (soluzione 1)

Per dato dell'esercizio sappiamo che

$$f\, v_1 = (-1)\cdot v_1 \qquad\qquad f\, v_2 = 1 \cdot v_2$$

di conseguenza, detta $\mathcal{B}$ la base $\{v_1, v_2\}$,

$$[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi stabilito che ESISTE UN'UNICA APPLICAZIONE LINEARE f con le proprietà richieste: l'applicazione rappresentata, nella base $\mathcal{B}$, dalla matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Per rispondere alla seconda domanda calcoliamo

$$[f]^{can.}_{can.} = M^{\mathcal{B}}_{can} \cdot [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot M^{can}_{\mathcal{B}} =$$

$$M^{\mathcal{B}}_{can} = \begin{array}{cc} \left(\boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}}\right. & \left.\boxed{\begin{matrix}1\\-1\end{matrix}}\right) \\ v_1 & v_2 \end{array}$$

$$M^{can}_{\mathcal{B}} = \left(M^{\mathcal{B}}_{can}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es 4 (soluzione 2)

Cerchiamo f rappresentata, nella base canonica, da una generica matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ che soddisfi le richieste.

Siccome $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore -1,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} a + b = -1 & (\alpha) \\ c + d = -1 & (\beta) \end{cases}$$

Siccome $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore 1,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} a - b = 1 & (\gamma) \\ c - d = -1 & (\delta) \end{cases}$$

Stiamo quindi cercando le soluzioni (a, b, c, d) del sistema di equazioni $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$. Le equazioni α e γ equivalgono a $a = 0$, $b = -1$ mentre β e δ equivalgono a $c = -1$, $d = 0$.

L'applicazione f è quindi univocamente determinata, ed è rappresentata, nella base canonica, da

$$[f]^{can.}_{can.} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$