Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Test di Geometria

Tempo a disposizione: 20 minuti

12 Febbraio 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) Se $X = \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $Y = \{7n \mid n \in \mathbb{N}\}$ allora $X \cap Y = \emptyset$.	☐	☑
2) L'inversa di una funzione biunivoca è biunivoca.	☑	☐
3) Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene allo Span di $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.	☑	☐
4) Se il quadrato di $z \in \mathbb{C}$ è reale allora z è immaginario puro.	☐	☑
5) $z = \pi i$ è soluzione di $e^z = 1$.	☐	☑
6) Ogni matrice $n \times n$ ha almeno un autovalore reale.	☐	☑
7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ha due autovalori distinti.	☑	☐
8) Se V e W sono sottosp. di $\mathbb{R}^4$ e $\dim(V) = 3$ e $\dim(W) = 2$ allora $V \cap W \neq \{0\}$.	☑	☐
9) Nessuna appl. lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ è iniettiva.	☐	☑
10) $\det(A) > 0$ se e solo se l'appl. lineare associata ad A non è iniettiva.	☐	☑
11) Un insieme di vettori che generano $\mathbb{R}^4$ contiene una base.	☑	☐
12) Se un'appl. lineare $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è biunivoca allora $m = n$.	☑	☐

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

— Test di Geometria —

Tempo a disposizione: 20 minuti

12 Febbraio 2023

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false:

PUNTEGGIO : **risposta mancante = 0; risposta esatta = +3; risposta errata = -2**

Proposizione	**Vera**	**Falsa**
1) $z = \pi i$ è soluzione di $e^z = -1$.	☑	☐
2) Sia $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ un'appl. lineare biunivoca. Allora $m = n$.	☑	☐
3) Qualunque matrice quadrata ha almeno un autovalore reale.	☐	☑
4) Se una funzione è biunivoca allora la sua inversa è biunivoca.	☑	☐
5) Il vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ appartiene allo Span di $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.	☑	☐
6) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ ha due autovalori distinti.	☑	☐
7) Se il quadrato del numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è reale allora z è reale.	☐	☑
8) Un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$ contiene una base.	☑	☐
9) Siano $A = \{5k \mid k \in \mathbb{N}\}$ e $Y = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Allora $A \cap B = \emptyset$.	☐	☑
10) Nessuna appl. lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ è suriettiva.	☐	☑
11) $\det(A) = 0$ se e solo se l'appl. lineare associata ad A non è iniettiva.	☑	☐
12) Siano V e W sono sottosp. di $\mathbb{R}^3$ con $\dim(V) = \dim(W) = 2$. Allora $V \cap W \neq \{0\}$.	☑	☐

Ingegneria Edile-Architettura e Ingegneria Design Industriale

Compito di Geometria – 12 Febbraio 2024

Tempo a disposizione: 120 minuti.

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Attenzione: Solo le risoluzioni scritte su questi fogli verranno corrette.
Le risposte non giustificate non saranno considerate valide. Buon lavoro!

Esercizio 1. [8 pt.]

1. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$z^3 - 2z^2 + 2z = 0$$

2. Trovare tutte le soluzioni complesse z della seguente equazione:

$$e^{2z} + 1 = 0.$$

1) $z^3 - 2z^2 + 2z = z(z^2 - 2z + 2) = 0$

$\nearrow z = 0$

$\searrow z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$= \dfrac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 1-i \\ 1+i \end{cases}$

Dunque le tre soluzioni dell'equazione assegnata sono:

$z = 0$, $z = 1-i$, $z = 1+i$.

2) Sia $z = a + ib$.

$e^{2z} = e^{2a+2bi}$ e' il numero complesso avente modulo $\rho = e^{2a}$ ed argomento $\theta = 2b$

$e^{2z} = -1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} e^{2a} = 1 \Rightarrow 2a = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 2b = \pi + 2k\pi \Rightarrow b = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

ha modulo
$\rho = 1$
ed argomento
$\theta = \pi$

Dunque l'insieme delle soluzioni e' infinito e contiene tutti i numeri complessi della forma

$z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. [8 pt.]

Considerare le seguenti matrice:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice B, e sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata alla matrice trasposta B^T.

1. Determinare una base del nucleo di f.
2. Determinare una base del nucleo di g.
3. Determinare una base dell'intersezione $\mathrm{Imm}(f) \cap \mathrm{Imm}(g)$.
4. Determinare la dimensione del sottospazio $\ker(f) + \ker(g)$.

1)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{II} + 2I} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\overline{III} - \frac{1}{4} II}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P \quad L \quad P \end{array}$$

Variabile libera x_2 $\qquad x_2 = 1$ $\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \\ 4x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$

Soluzione speciale : $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Una base di ker(f) e' $\mathcal{B}_{\ker(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Una base di $Im(f)$ e' data dalle colonne pivot nella matrice iniziale, cioe' $\mathcal{B}_{Im(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2) $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-2I]{II+2I} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio } II \text{ e } III}$

$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L \end{matrix} \end{array}$ Variabile libera x_3

$x_3 = 1$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \end{cases}$

$4x_2 + 1 = 0 \Rightarrow$

$x_2 = -1/4$

$x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = -1/2$

La soluzione speciale e'

$\vec{s} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ Una base di $ker(g)$ e' $\mathcal{B}_{ker(g)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Una base di $Im(g)$ e' data dalle colonne pivot della matrice iniziale, cioe' $\mathcal{B}_{Im(g)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4) Sia $ker(f)$ che $ker(g)$ hanno dimensione 1.
Una base di $ker(f)$ e' formata dal solo vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
e una base di $ker(g)$ e' formata dal solo vettore $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Visto che si tratta di 2 vettori NON allineati l'intersezione $\ker(f) \cap \ker(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(Geometricamente, si tratta dell'intersezione di due rette per l'origine che non sono allineate)

Dunque $\dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 0$ e per la formula di Grassman si ottiene:

$$\dim(\ker(f) + \ker(g)) = \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) = 1 + 1 - 0 = 2$$

Inoltre $\ker(f) + \ker(g) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e quindi ha dimensione 2.

3) Ricordiamo che $Im(f)$ e $Im(g)$ hanno come basi:

$$\mathcal{B}_{Im(f)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B}_{Im(g)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Notiamo che:

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \notin Im(f) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Infatti, la riduzione

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{II + 2I} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{III - \frac{1}{4} II}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$ dimostra che il sistema

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\lambda+2\mu=1\\-2\lambda=-2\\\mu=2\end{cases}$$

<u>NON</u> ha soluzione

Inoltre $\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}\in \mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Infatti il sistema $\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$,

cioè $\begin{cases}\lambda+2\mu=-2\\-2\lambda=4\\\mu=0\end{cases}$, ha soluzione, come

dimostrato dalla riduzione:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&2&-2\\-2&0&4\\0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{II+2I}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&-2\\0&4&0\\0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{III-\frac{1}{4}II}\left[\begin{array}{cc|c}1&2&-2\\0&4&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

Concludiamo che

$\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$ e quindi

$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$ è la base cercata.

Troviamo ora una base di $\mathrm{Im}(f)\cap\mathrm{Im}(g)$

con un metodo diverso.

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, quindi

$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists\, \lambda_1, \lambda_2$ t.c. $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$

$\iff$ il seguente sistema ha soluzione: $\begin{cases}\lambda_1 + 2\lambda_2 = b_1\\ -2\lambda_1 = b_2\\ \lambda_2 = b_3\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & b_1\\ -2 & 0 & b_2\\ 0 & 1 & b_3\end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}+2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & b_1\\ 0 & 4 & b_2+2b_1\\ 0 & 1 & b_3\end{array}\right) \xrightarrow{4\cdot\mathrm{III}-\mathrm{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & b_1\\ 0 & 4 & b_2+2b_1\\ 0 & 0 & 4b_3-b_2-2b_1\end{array}\right).$$ Quindi

$\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f) \iff 4b_3 - b_2 - 2b_1 = 0 \iff 2b_1 + b_2 - 4b_3 = 0$

Analogamente, $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\iff$ il seguente sistema ha soluzione: $\begin{cases}\lambda_1 - 2\lambda_2 = b_1\\ -2\lambda_1 + 4\lambda_2 = b_2\\ 2\lambda_1 = b_3\end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & b_1\\ -2 & 4 & b_2\\ 2 & 0 & b_3\end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-2\mathrm{I}]{\mathrm{II}+2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & b_1\\ 0 & 0 & b_2+2b_1\\ 0 & 4 & b_3-2b_1\end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}\text{ e }\mathrm{III}]{\text{scambio}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_1 \\ 0 & 4 & b_3-2b_1 \\ 0 & 0 & b_2+2b_1 \end{array}\right)$$. Quindi

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in Im(g) \iff b_2 + 2b_1 = 0, \text{ cioe' } 2b_1 + b_2 = 0$$

Percio' $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in Im(f) \cap Im(g) \iff$

$$\begin{cases} 2b_1 + b_2 - 4b_3 = 0 \\ 2b_1 + b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2b_1 + b_2 - 4b_3 = 2b_1 + b_2 \Rightarrow -4b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 0$$

$$2b_1 + b_2 = 0 \iff b_2 = -2b_1.$$

Quindi se poniamo $\lambda = b_1$, i vettori che appartengono a $Im(f) \cap Im(g)$ sono tutti e soli i vettori della forma $\begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Quindi $Im(f) \cap Im(g) = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ ha dimensione 1, ed ha come base $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

<u>N.B.</u> I vettori multipli di $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ coincidono con i vettori multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un altro metodo ancora per trovare una base di $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)$ e' il seguente. Sappiamo che

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad e$$

$$\operatorname{Im}(g) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Consideriamo la seguente matrice ottenuta mettendo come colonne i vettori di sopra, e troviamone il nucleo.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II + 2I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - \frac{1}{4} II}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{matrix}\right) \\ P \quad P \quad P \quad L \end{array}$$

x_4 variabile libera. Troviamo la soluzione speciale:

$$x_4 = 1 \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + 0 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$\ker B$ ha come base $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. $\quad B \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \text{ quindi}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Im}(f)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Im}(g)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e perciò $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)$.

Esercizio 3. **[10pt.]** Si consideri la seguenti matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare gli autovalori reali della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
2. Per ognuno degli autovalori, trovare una base del relativo autospazio.
3. Stabilire se la matrice A è diagonalizzabile oppure no. (Motivare bene la risposta.)

1. Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda^2 - \lambda - 2)(-3-\lambda)^2 = (\lambda+3)^2(\lambda+1)(\lambda-2)$$

A ha quindi gli autovalori -3, -1, 2 le cui molteplicità algebriche sono rispettivamente $2, 1, 1$

2. $\lambda_1 = -3$

L'autospazio corrispondente è

$$S_1 = Ker(A + 3 Id) = Ker \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è immediato notare che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in S_1$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1$, inoltre la dimensione di S_1 non può superare la molteplicità algebrica di λ_1, cioè 2. Quindi $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di S_1.

<u>Altro metodo</u>: procedendo più scolasticamente, possiamo ridurre la matrice $A+3\,Id$ col metodo di Gauß.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & L & L \end{matrix} \end{array}$$

Assegnando alle due variabili libere i valori 0,1 e 1,0 rispettivamente si ottengono le soluzioni $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ del sistema omogeneo associato, da cui la base

$$\underline{\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}.$$

$\underline{\lambda_2 = -1}$

$$S_2 = \operatorname{Ker}(A + Id) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si nota che $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in S_2$. Inoltre, siccome la moltoplicità algebrica di λ_2 è 1, la dimensione di S_2 è 1.

Quindi $\underline{\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è una base di } S_2}$.

<u>Altro metodo</u>: per riduzione di Gauß

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} P & P & P & L \end{matrix} \end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui, assegnando il valore 1 alla variabile libera, otteniamo la soluzione $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi la base $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\lambda_3 = 2$

$$S_3 = \operatorname{Ker}(A + 5Id) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Da cui, procedendo come prima, otteniamo la base
$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

3. Le molteplicità geometriche degli autovalori di A, ossia le dimensioni dei relativi autospazi, sono rispettivamente 2, 1, 1 per λ_1, λ_2 e λ_3. La somma di queste molteplicità, 4, coincide con la taglia della matrice quadrata, che è 4×4. Di conseguenza, la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 4. **[6 pt.]**

1. Determinare una matrice A di dimensione 2×2 che soddisfi le seguenti proprietà:

   (a) $\lambda = 2$ è autovalore di A.

   (b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartiene al nucleo di A.

2. È vero che tutte le matrici A con le proprietà (a) e (b) di sopra sono diagonalizzabili? Motivare bene la risposta.

3. Esistono matrici non nulle A che soddisfano la condizione (b) di sopra ed hanno un unico autovalore? Motivare bene la risposta.

1. Consideriamo la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$. L'applicazione lineare f tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ soddisfa le richieste (a) e (b). Quindi

$$A = [f]^{can.}_{can.} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice che gode delle proprietà desiderate.

2. Sì, perché la proprietà (b) implica che 0 sia un autovalore di A. A ha quindi due autovalori, la somma delle molteplicità geometriche è, di conseguenza, almeno 2. D'altro canto, siccome A è una matrice 2×2, la somma di queste molteplicità è al più 2. La condizione per la diagonalizzabilità di A è, pertanto, soddisfatta.

3. Sì, esistono. Se A avesse un autovalore $\lambda \neq 0$, detto v un autovettore relativo, avremmo

$$A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v \neq 0 \longrightarrow Av \notin \operatorname{Ker} A$$

Basta quindi assicurarsi che

$$\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

Una possibilità è richiedere che

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da cui

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}} = \underline{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}}$$

Altro metodo

1. Scrivendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ otteniamo le equazioni

$$\det(A - 2\,Id) = 0 \longleftrightarrow (a-2)(d-2) - bc = 0 \qquad \alpha$$

$$A\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = 0 & \beta \\ -c + 3d = 0 & \gamma \end{cases}$$

Da β, γ deduciamo $a = 3b$ e $c = 3d$, quindi, sostituendo in α

$$(3b-2)(d-2) - 3bd = 0 \longleftrightarrow d = 2 - 3b$$

Abbiamo quindi determinato la forma generale di una matrice come richiesto:

$$A = \begin{pmatrix} 3b & b \\ 6-9b & 2-3b \end{pmatrix}$$

Per costruire una matrice concreta, basta fissare un valore di b. Per esempio, con $b=0$ otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Procedendo come nel punto precedente, dalla condizione (b), otteniamo $a=3b$ e $c=3d$. La condizione che A abbia un solo autovalore si esprime chiedendo l'equazione

$$\det(A-\lambda Id)=0$$
$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$
$$\lambda^2-(3b+d)\lambda=0$$

abbia la sola soluzione $\lambda=0$. Ossia $3b+d=0$.
La forma generale di una matrice come richiesto è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 3b & b \\ -9b & -3b \end{pmatrix}$$

Ce ne sono, quindi, di non nulle. Basta, per esempio prendere $b=1$.