Capitolo 1

Filtri e ultrafiltri

1.1 Introduzione

Questo corso si concentra sull'uso di speciali tecniche non elementari in teoria di Ramsey e in aspetti di teoria combinatoria dei numeri. Precisamente, gli strumenti che useremo saranno sostanzialmente di tre tipi: ultrafiltri, numeri ipernaturali dell'analisi nonstandard, spazi topologici compatti e dinamica topologica.

Qui di seguito sono elencati alcuni enunciati di teoremi che incontreremo in questo corso.

- **Teorema di Ramsey**: per ogni colorazione (cioè partizione) finita delle coppie di numeri naturali, esiste un insieme infinito le cui coppie sono tutte monocromatiche;

- **Teorema di Schur**: in ogni colorazione finita dei numeri naturali, esistono triple a, b, $a+b$ monocromatiche (cioè appartenenti allo stesso pezzo della partizione);

- **Teorema di Hindman**: è un rafforzamento del teorema precedente, precisamente afferma che per ogni colazione finita dei naturali, esiste un insieme infinito tale che tutte le somme di suoi elementi distinti sono monocromatiche;

- **Teorema di Van der Waerden**: in ogni colorazione finita dei naturali, uno dei pezzi contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe;

- **Teorema di Szemeredi**: ogni insieme di naturali con densità superiore positiva contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe (vedremo solo il caso particolare di progressioni di lunghezza 3, il teorema di Roth);

- **Teorema di Rado**: ogni equazione diofantea lineare che ha una somma di alcuni suoi coeffcienti uguale a zero, ammette soluzioni monocromatiche per ogni colorazione finita dei naturali.

Un'altra classe di risultati che vedremo riguardano invece la connessione tra densità di un insieme (che in qualche senso ne esprime la grandezza) e il fatto di possedere "buchi limitati", ossia la proprietà di sindeticità. Questa può essere espressa dicendo che $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$A \cap [x+1,\, x+k] \neq \emptyset$$

per ogni $x \in \mathbb{N}$. Uno dei teoremi più importanti a tal proposito è il seguente:

- **Teorema Jin**: se A e B hanno densità asintotica superiore positiva, allora $A+B$ è sindetico a tratti.

1.2 Definizione di filtro e ultrafiltro

Iniziamo subito dalla definizione di filtro:

Definizione 1.2.1. Sia I un insieme di indici.[1] Un *filtro* su I è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di I tale che:
(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $I \in \mathcal{F}$;
(2) se $A \in \mathcal{F}$ e $B \supseteq A$ allora $B \in \mathcal{F}$;
(3) se $A, B \in \mathcal{F}$ allora $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Esempio 1.2.1. Sia I un insieme di indici. Allora l'insieme

$$\mathrm{Fr}_I = \{A \subseteq I \mid A^C \text{ è finito}\},$$

ossia l'insieme dei sottoinsiemi cofiniti di I, è un filtro detto *filtro di Frechet*.

Ricordiamo che una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* (in breve FIP, ossia *finite intersection property*) se ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{F}$ è non vuota. Ossia se

$$\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}\ A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset.$$

Dunque un filtro è una famiglia non vuota di insiemi che soddisfa la FIP ed è chiusa per soprainsieme. Se $\mathcal{G}$ è una famiglia (non vuota) con la FIP, allora chiaramente la famiglia di insiemi

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \{B \mid \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{G} \text{ t.c. } B \supseteq A_1 \cap \cdots \cap A_n\}$$

è un filtro, che si dice *filtro generato* da $\mathcal{G}$. Tale filtro è il più piccolo filtro che contiene $\mathcal{G}$ (dimostrare per esercizio).

[1] considereremo sempre I infinito per non imbatterci in casi banali.

Per passare dalla nozione di filtro a quella di ultrafiltro ci serve una proposizione:

Proposizione 1.2.1. *Sia $\mathcal{F}$ un filtro su I. Allora le seguenti sono equivalenti:*
(1) *se $A \notin \mathcal{F}$ allora $A^C \in \mathcal{F}$;*
(2) *se $A \cup B \in \mathcal{F}$ allora $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$;*
(3) *$\mathcal{F}$ è un filtro massimale rispetto all'inclusione.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Supponiamo per assurdo che $A \notin \mathcal{F}$ e $B \notin \mathcal{F}$, allora per la proprietà (1) abbiamo che $A^C \in \mathcal{F}$ e $B^C \in \mathcal{F}$. Così $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C \in \mathcal{F}$, e questo è assurdo perché anche $A \cup B \in \mathcal{F}$.
((2) $\Longrightarrow$ (3)) Supponiamo per assurdo che $\mathcal{F}$ non sia massimale rispetto all'inclusione, allora sia $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ un filtro che estende $\mathcal{F}$. Prendiamo dunque $X \in \mathcal{F}' - \mathcal{F}$, in particolare $X^C \notin \mathcal{F}'$ e dunque $X^C \notin \mathcal{F}$. Del resto però $I = X \cup X^C \in \mathcal{F}$, ma nessuno dei due insiemi sta in $\mathcal{F}$, contraddicendo la (2).
((3) $\Longrightarrow$ (1)) Supponiamo per assurdo che esista un insieme A tale che $A \notin \mathcal{F}$ e $A^C \notin \mathcal{F}$. Consideriamo allora la famiglia

$$\mathcal{G} = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\},$$

e mostriamo che ha la proprietà dell'intersezione finita. Siano $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{G}$, allora esistono $F_1, \dots, F_n \in \mathcal{F}$ tali che $G_i = F_i \cap A$ per ogni $i = 1, \dots, n$. In questo modo

$$G_1 \cap \dots G_n = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \cap A = F \cap A,$$

dove $F = F_1 \cap \dots \cap F_n \in \mathcal{F}$. Effetivamente $F \cap A \neq \emptyset$, sennò $F \subseteq A^C$ e questo implicherebbe $A^C \in \mathcal{F}$, contro le ipotesi. Così $\mathcal{G}$ ha la FIP, quindi possiamo prendere il filtro $\mathcal{F}'$ generato da $\mathcal{G}$ e affermiamo che è un filtro che estende propriamente $\mathcal{F}$. Infatti abbiamo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ in quanto $F = F \cap I \in \mathcal{F}'$ per ogni $F \in \mathcal{F}$, e inoltre l'inclusione è stretta perché $A = I \cap A \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$, e dunque $A \in \mathcal{F}' - \mathcal{F}$. □

Definizione 1.2.2. Un filtro $\mathcal{F}$ che soddisfi una (e quindi tutte) le proprietà precedenti è detto *ultrafiltro.*

Su ogni insieme infinito I, il filtro di Frechet Fr_I non è un ultrafiltro. Infatti, basta prendere un insieme infinito $A \subseteq I$ tale che anche il suo complementare A^C sia infinito, ed abbiamo che $A, A^C \notin \mathrm{Fr}_I$.

Esempio 1.2.2. Osserviamo che per ogni $i \in I$ abbiamo il filtro generato dal singoletto $\{i\}$

$$\mathcal{U}_i = \{A \subseteq I \mid i \in A\}.$$

Tale filtro è anche massimale e dunque è un ultrafiltro. Questi ultrafiltri sono detti *ultrafiltri principali*, in quanto sono generati da un elemento solo.

Notiamo che se I è infinito allora nessun filtro principale estende il filtro di Frechet, anzi:

Proposizione 1.2.2. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Allora $\mathcal{U} \supseteq \mathrm{Fr}_I$ se e solo se $\mathcal{U}$ non è principale.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Supponiamo che $\mathcal{U}$ includa il filtro di Frechet Fr_I. Per ogni $i \in I$ abbiamo $\{i\}^C \in \mathrm{Fr}_I \subseteq \mathcal{U}$, e dunque $\{i\} \notin \mathcal{U}$ per ogni $i \in I$, e dunque $\mathcal{U}$ non è principale.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo $\mathcal{U} \not\supseteq \mathrm{Fr}_I$, ossia esiste un insieme cofinito $A \notin \mathcal{U}$. Ma allora

$$A^C = \{a_1, \ldots, a_n\} = \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \in \mathcal{U},$$

e dunque per il fatto che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro deve esistere $i = 1, \ldots, n$ tale che $\{a_i\} \in \mathcal{U}$. Dunque $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{a_i}$ sarebbe principale, e ciò contraddice l'ipotesi. □

L'esistenza di ultrafiltri è garantita dal lemma di Zorn, forma equivalente dell'assioma della scelta:

Teorema 1.2.1 (di Tarski). *Dato un filtro $\mathcal{F}$ esiste un ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Sia

$$\Gamma = \{\mathcal{G} \text{ filtro} \mid \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}\},$$

parzialmente ordinata per inclusione. Intanto Γ è non vuoto perché vi appartiene $\mathcal{F}$; poi dobbiamo verificare che ogni catena ammette un maggiorante. Sia dunque $\langle \mathcal{G}_s \mid s \in S \rangle$ una catena in Γ, allora $\mathcal{G} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{G}_s$ è un filtro che maggiora tutta la catena. Si conclude grazie al lemma di Zorn. □

In un senso preciso, non si possono definire ultrafiltri non principali.[2] In altre parole, nonostante si possa dimostrare che esistono (e lo abbiamo fatto!), nessuno di loro può essere "descritto esplicitamente".

1.3 Il prodotto tensore

Esiste un modo naturale di costruire un prodotto tra due ultrafiltri:

Definizione 1.3.1. Siano $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I e $\mathcal{V}$ un ultrafiltro su J. Il *prodotto tensoriale* $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è l'ultrafiltro su $I \times J$ definito ponendo per ogni $A \subseteq I \times J$:

$$A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Longleftrightarrow \{i \mid A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U},$$

dove con $A_i = \{j \in J \mid (i,j) \in A\}$ abbiamo denotato la fibra verticale di A corrispondente all'ascissa i.

[2] più precisamente, non esistono formule $\varphi(x)$ della teoria degli insiemi tali che la teoria ZFCdimostra che esiste ed unico x tale che $\varphi(x)$, e che un tale x è un ultrafiltro non principale.

A questo punto non ci resta che dare alcune proprietà del prodotto tensoriale. La prima di esse ci garantisce che quella data è una buona definizione;

Lemma 1.3.1. *Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ultrafiltri. Allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro.*

Dimostrazione. Dobbiamo intanto verificare che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un filtro. La proprietà (1) si verifica facilmente; per quanto riguarda la chiusura per soprainsieme prendiamo $A \subseteq B$ in $I \times J$ e supponiamo che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, ciò significa che

$$\{i \mid A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Del resto $\{i \mid A_i \in \mathcal{V}\} \subseteq \{i \mid B_i \in \mathcal{V}\}$, così dal fatto che $\mathcal{U}$ è un filtro abbiamo anche che $\{i \mid B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. La terza proprietà e la massimalità per inclusione si mostrano in modo analogo. $\square$

Lemma 1.3.2. *Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono non principali, allora anche $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è non principale.*

Lemma 1.3.3. *Verificare che l'operazione di prodotto tensoriale tra ultrafiltri è associativa, ossia $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$.*

1.4 Limite lungo un filtro

La nozione di filtro è già ricca di per sé, come testimonia il fatto che possiamo definire una nozione di limite rispetto a un filtro. Iniziamo da un esempio:

Esempio 1.4.1. Sia $\mathcal{F}$ un fltro su $\mathbb{N}$ e sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Diciamo che l'$\mathcal{F}$–limite di x_n è y, e si scrive $\mathcal{F} \lim_n x_n = y$, se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\{n \mid |y - x_n| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$.
Osserviamo che se si utilizza come filtro il filtro di Frechet allora questa nozione di limite coincide con quella usuale.

Definizione 1.4.1. Siano X uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ un filtro su I e $\{x_i\}_{i \in I}$ una successione in X. Diciamo che

$$\mathcal{F} \lim_{i \in I} x_i = y$$

se per ogni U intorno di y si ha $\{i \mid x_i \in U\} \in \mathcal{F}$.

Proposizione 1.4.1. *Sia X uno spazio topologico a base numerabile e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su $\mathbb{N}$. X è di Hausdorff se e solo se ogni successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in X ammette al più un $\mathcal{U}$-limite.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Per assurdo siano $x \neq y$ due $\mathcal{U}$–limiti di una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dall'ipotesi che X è di Hausdorff abbiamo che esistono U_x e U_y intorni rispettivamente di x e y tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$. Dalla definizione di limite abbiamo

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_x\} \in \mathcal{U} \quad \text{e} \quad \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_y\} \in \mathcal{U},$$

e allora

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_x\} \cap \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_y\} = \emptyset \in \mathcal{U},$$

contro la definizione di filtro.
($\Longleftarrow$) Supponiamo che X sia uno spazio topologico non di Hausdorff, mostriamo allora che esiste una successione che ha due limiti distinti. Prendiamo dunque $x, y \in X$ due punti distinti: dall'ipotesi che X è primo–numerabile abbiamo l'esistenza di

$$\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

sistemi fondamentali numerabili di intorni rispettivamente di x e y; senza perdere di generalità possiamo supporre che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valga $U_{n+1} \subset U_n$ e $V_{n+1} \subset V_n$. Dall'ipotesi che X non è di Hausdorff per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $U_n \cap V_n \neq \emptyset$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ prendiamo $z_n \in U_n \cap V_n$. Mostriamo adesso che z_n $\mathcal{U}$–converge a x, la dimostrazione che $\mathcal{U}$–converge a y è del tutto analoga. Sia dunque U_x un intorno di x e sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $U_x \supseteq U_N$, allora

$$\{n \mid z_n \in U_x\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid z_n \in U_N\}.$$

□

Proposizione 1.4.2. *Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. X è compatto se e solo se ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X ammette $\mathcal{U}$-limite.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Per assurdo, sia $\{x_i\}_{i\in I}$ che non ha limite. Questo significa che per ogni $y \in X$ esiste U_y intorno di y tale che $A_y = \{i \in I \mid x_i \in U_y\} \notin \mathcal{U}$. La famiglia $\{U_y \mid y \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, e per compattezza abbiamo l'esistenza di $y_1, \ldots, y_n$ tali che $\bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} = X$. Così

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_{y_i} = I \in \mathcal{U},$$

ma nessuno degli insiemi dell'unione finita sta in $\mathcal{U}$.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo che esista un ricorpimento aperto $\{U_j\}_{j\in J}$ tale che per ogni $J' \subseteq J$ finito $\{U_j\}_{j\in J'}$ non ricopra X. Sia dunque $I = \operatorname{Fin} J$ e definiamo

$$K_j = \{J' \in \operatorname{Fin} J \mid j \in J'\}.$$

U4

La famiglia $\{K_j\}_{j\in J}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, e dunque esiste l'ultrafiltro $\mathcal{U}$ generato da questa famiglia. Per ogni $J' \in \operatorname{Fin} J$ sia

$$x_{J'} \notin \bigcup_{j\in J'} U_j,$$

vogliamo mostrare che $\{x_{J'}\}_{J'\in \operatorname{Fin} J}$ non ha limite. Sia $x \in X$, e sia j_x tale che $x \in U_{j_x}$: allora

$$\{J' \in \operatorname{Fin} J \mid x_{J'} \notin U_{j_x}\} \supseteq K_{j_x},$$

e dunque sta in $\mathcal{U}$. $\square$

Teorema 1.4.1 (di Tychonoff). *Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia qualsiasi di spazi topologici compatti. Allora $X = \prod_{i\in I} X_i$ è compatto rispetto alla topologia prodotto.*[3]

Dimostrazione. Sia dunque $\{x^j\}_{j\in J}$ una successione in X e sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su J. Fissiamo $i \in I$ e consideriamo la successione $\{x_i^j\}_{j\in J} \subseteq X_i$: dal teorema precedente esiste il limite di questa successione, sia esso x_i. Dimostriamo ora che $\bar{x} = (\bar{x}_i \mid i \in I) \in X$ è il limite di $\{x^j\}_{j\in J}$. Consideriamo $J' \in \operatorname{Fin} J$ e sia $A_{J'}$ un intorno di $\bar{x}$ in X, allora

$$\{j \in J \mid x^j \in A_{J'}\} = \{j \in J \mid \forall i \in J' \; x_i^j \in A_i\} = \bigcap_{i\in J'} \dots \in \mathcal{U}.$$

$\square$

[3] ricordiamo che la topologia prodotto è la più piccola topologia che rende continue le proiezioni $\pi_i : X \to X_i$; in modo equivalente una base della topologia prodotto è formata dalle intersezioni finite di controimmagini di aperti.

Capitolo 1

Il teorema di Ramsey

1.1 Introduzione al teorema finito di Ramsey

Per capire di cosa si occupa la teoria combinatoria di Ramsey vogliamo subito presentare l'enunciato della forma finita di questo teorema. Per fare ciò ci serve una notazione:

Definizione 1.1.1. Per ogni insieme A e per ogni $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con

$$[A]^k = \{B \subseteq A \mid |B| = k\}$$

la famiglia di tutte le k–uple di A, cioè dei sottoinsiemi di A che hanno esattamente k elementi.

Come consuetudine nella teoria di Ramsey si adotta anche una terminologia che parla di colori:

Definizione 1.1.2. Una partizione finita di un insieme

$$X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$$

in r pezzi si dice r*–colorazione.* Inoltre, per indicare che un certo insieme $Y \subseteq C_i$ è incluso in uno dei pezzi della partizione, si dice che Y è *monocromatico.*

Presentiamo adesso l'enunciato del teorema:

Teorema 1.1.1 (di Ramsey finito). *Per ogni k, per ogni r, per ogni m, esiste n con la proprietà che ogni r–colorazione $[\{1, \ldots, n\}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ ammette un insieme H con m elementi che è omogeneo, cioè tale che tutte le sue k–uple $[H]^k \subseteq C_i$ sono monocromatiche.*

Il teorema ha una certa complessità, dovuta anche al grande numero di quantificatori, ma una volta appreso davvero lo potremo applicare anche a casi molto concreti. Cerchiamo di capire il teorema nel caso $k = 2$, $r = 2$ e $m = 3$: mostriamo che in questo caso il numero n minimo per il quale il teorema inizia a valere è $n = 6$.

Supponiamo di essere ad una festa, e scegliamo a caso 6 persone. Allora possiamo essere certi che tra queste ci sono 3 persone che si conoscono tra di loro, oppure ce ne sono 3 che non si conoscono. Vediamo perché. Denotiamo con A, B, C, D, E, F le 6 persone, e concentriamoci su una di loro, diciamo A. Di sicuro capita una ed una sola delle seguente due eventualità: (1) A conosce almeno 3 persone; (2) A non conosce almeno 3 persone. Supponiamo che valga la prima possibilità (nell'altro caso la dimostrazione è del tutto analoga). Ad esempio, supponiamo che A conosca B, C e D. Se quest'ultime 3 persone non si conoscono tra loro, allora abbiamo già la tesi. Altrimenti almeno 2 di queste 3 persone si conoscono, diciamo B e C. Ma allora A, B e C sono 3 persone che si conoscono tra loro, e la tesi è raggiunta.

Se invece si volessero 4 persone che formano un gruppo omogeneo, cioè tali che si conoscono tutte tra loro oppure non si conoscono tra loro, allora occorrerebbe prendere almeno 18 individui. Questo numero è il migliore possibile, perché si può dimostrare che esistono gruppi di 17 persone senza gruppi omogenei di 4 individui. Può sembrare strano, ma l'analogo problema per gruppi omogenei di 5 persone non è ancora stato risolto! E si dubita che lo sarà di qui a breve, trattandosi di una questione combinatoria estremamente complessa. Le stime più aggiornate indicano che la soluzione ottimale, cioè il minimo numero di persone da prendere per essere sicuri di trovare un gruppo omogeneo di 5 persone, è compresa tra 43 e 49 persone. Il problema sale vertiginosamente di diffcoltà, e diventa presto pressoché intrattabile. Ad esempio, già per $m = 10$, si conosce soltanto che il numero cercato è tra 798 e 23556.

Il teorema di Ramsey finito ci dice che quei numeri esistono sempre per ogni m (anche se non fornisce stime sulla loro grandezza). Lo strumento degli ultrafiltri ci permetterà di dimostrare prima la versione infinita del teorema di Ramsey, e successivamente di derivarne la versione finita. Dunque per noi, la versione infinita sarà in un certo senso più semplice di quella finita.

1.2 Il teorema di Ramsey infinito

Come già anticipato, iniziamo dalla versione infinita del teorema:

Teorema 1.2.1. *Sia X un insieme infinito. Per ogni k, ogni colorazione finita delle k–uple di X, ossia $[X]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ ammette un insieme infinito omogeneo,* UF

cioè un insieme infinito $H \subseteq X$ tale che tutte le sue k–uple $[H]^k \subseteq C_i$ sono monocromatiche.

Dimostrazione. Per $k = 1$, il teorema di Ramsey infinito afferma semplicemente che in ogni partizione finita di un insieme infinito, almeno uno dei pezzi è infinito. Occupiamoci adesso del caso $k = 2$. Senza perdere di generalità, possiamo supporre $X = \mathbb{N}$: infatti la proprietà di Ramsey si estende banalmente ai soprainsiemi e – visto che X è infinito – possiamo senz'altro assumere che X includa (una copia di) $\mathbb{N}$. Consideriamo la sopradiagonale

$$\Delta^+ = \{(n, m) \mid n < m\},$$

e indentifichiamo le coppie $[\mathbb{N}]^2$ con Δ^+. Prendiamo ora un qualunque prodotto tensoriale $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ dove $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Per ogni n, la fibra

$$\Delta_n^+ = \{m \mid n < m\} \in \mathcal{U}$$

perché è un insieme cofinito (e $\mathcal{U}$ è non principale), dunque $\Delta^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Per la proprietà di ultrafiltro, da $\Delta^+ = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, si ottiene l'esistenza di un colore C_i tale che $C_i \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. La tesi discende allora dalla seguente proprietà generale:

Lemma 1.2.1. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Per ogni $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ esiste un insieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che $[H]^2 = \{(h, h') \mid h < h'\} \subseteq A$.*

Dimostrazione. Per definizione $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ se e solo se $\hat{A} = \{n \mid A_n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Sia $h_1 \in \hat{A}$, allora la fibra $A_{h_1} \in \mathcal{U}$, e possiamo prendere $h_2 \in \hat{A} \cap A_{h_1} \in \mathcal{U}$ con $h_2 > h1$ (ricordiamo che ogni insieme di un ultrafiltro non principale è infinito). Iterando questo procedimento, si ottiene un insieme infinito $H = \{h_1 < h_2 < \cdots < h_k < h_{k+1} < \ldots\}$ tale che $(h_i, h_j) \in A$ per ogni $i < j$, come volevamo. □

La dimostrazione del caso generale $k > 2$ si ottiene generalizzando l'argomento di sopra. Precisamente, si identificano le k–uple $[\mathbb{N}]^k$ con la sopradiagonale

$$\Delta_k^+ = \{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid n_1 < \cdots < n_k\}$$

di dimensione k. Poi si osserva che $\Delta_k^+ \in \mathcal{U}^{\otimes k}$, dove

$$\mathcal{U}^{\otimes k} = \underbrace{\mathcal{U} \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}}_{k \text{ volte}}$$

è l'ultrafiltro su $\mathbb{N}^k$ ottenuto iterando il prodotto tensoriale di $\mathcal{U}$ con se stesso k volte. Infine si raggiunge la tesi estendendo la validità del lemma di sopra ad ogni $k > 2$. La dimostrazione di quest'ultima proprietà si ottiene con diretta modifica di quanto già visto per $k = 2$, ma occorre una certa cura per sistemare i dettagli (lasciamo questa verifica per esercizio). $\square$

Un'importante applicazione del teorema di Ramsey in teoria combinatoria dei numeri è la seguente:

Teorema 1.2.2 (delle differenze). *Per ogni colorazione finita dei numeri naturali $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, esiste un insieme infinito H tale che l'insieme di differenze*

$$H \ominus H = \{h - h' \mid h, h' \in H \text{ e } h' > h\}$$

è monocromatico.

Dimostrazione. Per ogni $i = 1, \ldots, r$, poniamo $D_i = \{(n, m) \in [\mathbb{N}]^2 \mid m - n \in C_i\}$. Otteniamo così una r–colorazione finita delle coppie $[\mathbb{N}]^2 = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$. Per il teorema di Ramsey, esiste un insieme infinito H con $[H]^2 \subseteq D_i$ per un opportuno i. Dalla definizione di D_i segue infine che l'insieme delle differenze $H \ominus H \subseteq C_i$ è monocromatico. $\square$

Definizione 1.2.1. Un insieme di naturali A si dice *insieme di differenze* o Δ–set se esiste X infinito con $X \ominus X \subseteq A$.

Come corollario del teorema delle differenze otteniamo il teorema di Schur:

Teorema 1.2.3 (di Shur infinito). *In ogni colorazione finita dei numeri naturali esiste una "tripla di Schur" $a < b < a + b$ monocromatica.*

Dimostrazione. Sia $H = \{h_1 < h_2 < \cdots < h_k < h_{k+1} < \ldots\}$ un insieme infinito tale che le differenze $H \ominus H$ sono monocromatiche. Poniamo $a = h_2 - h_1$ e $b = h_k - h_2$ in modo che $b > a$. Allora anche $a + b = h_k - h_1 \in H \ominus H$ e quindi a, b, $a + b$ è una tripla di Schur monocromatica. $\square$

Teorema 1.2.4 (di Schur finito). *Per ogni r esiste n tale che in ogni r–colorazione di $\{1, \ldots, n\}$ esiste una tripla di Schur $a < b < a + b$ monocromatica.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un r tale che per ogni n esiste una r–colorazione di $\{1, \ldots, n\}$, diciamo $\{1, \ldots, n\} = C_1^n \sqcup \cdots \sqcup C_r^n$ senza triple di Schur monocromatiche. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$; fissato $k \in \mathbb{N}$ definiamo

$$\Gamma_i(k) = \{n \geq k \mid k \in C_i^n\},$$

e osserviamo che $\Gamma_1(k) \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_r(k) = [k, \infty) \in \mathcal{U}$. Dunque esiste un unico i_k tale che $\Gamma_{i_k}(k) \in \mathcal{U}$. A questo punto diciamo che

$$k \in C_i \Longleftrightarrow \Gamma_i(k) \in \mathcal{U},$$

e quindi abbiamo costruito una r–colorazione di $\mathbb{N}$. Per il teorema di Schur infinito esiste i ed esistono $a < b < a+b$ tali che stanno in C_i. Quindi per definizione

$$\Gamma_i(a),\ \Gamma_i(b),\ \Gamma_i(a+b) \in \mathcal{U},$$

e sia $n \in \Gamma_i(a) \cap \Gamma_i(b) \cap \Gamma_i(a+b)$. Allora nella colorazione di $\{1, \ldots, n\}$ c'è una tripla di Schur monocromatica. □

Vediamo subito una interessante applicazione in teoria dei numeri, che mostra come la congettura di Fermat sia falsa se considerata nell'ambito dei campi finiti $\mathbb{Z}_p$. Si tratta del risultato originale di Schur per il quale egli ebbe bisogno di utilizzare la proprietà combinatoria del teorema di Schur finito come lemma.

Corollario 1.2.1. *Per ogni k l'equazione $x^k + y^k = z^k$ ha soluzioni non banali in ogni campo $\mathbb{Z}_p$ con p sufficientemente grande.*

Dimostrazione. Fissato k, prendiamo il gruppo $\mathbb{Z}_p^*$ e il sottogruppo moltiplicativo $M_k = \{a^k \mid a \in \mathbb{Z}_p^*\}$ delle potenze k–esime. Visto che $\mathbb{Z}_p^*$ è ciclico, l'indice $r = [\mathbb{Z}_p^* : M_k]$ sarà $(k, p-1) \leq k$. Dunque le classi laterali di M_k determinano una r–colorazione finita di $\mathbb{Z}_p^*$ dove $r \leq k$, diciamo

$$\{1, \ldots, p-1\} = \mathbb{Z}_p^* = a_1 M_k \sqcup \cdots \sqcup a_r M_k.$$

Applicando la versione finita del teorema di Schur abbiamo che per ogni primo p sufficientemente grande si trovano $t, u, t+u \in a_i M_k$. Così

$$t = a_i x^k, \quad u = a_i y^k \quad \text{e} \quad t+u = a_i z^k,$$

con $x, y, z \in \mathbb{Z}_p^*$. Così $a_i x^k + a_i y^k = a_i z^k$, e del resto si può dividere per a_i e ottenere la soluzione non banale. □

Esercizio 1.2.1. Ogni insieme parzialmente ordinato infinito ha una catena infinita o un'anticatena infinita.

Esercizio 1.2.2. Esercizio 2.10.

(ex) X sp. top. allora X è T2 $\Leftrightarrow \forall I, \forall \mathcal{U}, \forall (x_i)_{i\in I}$ il $\lim_i x_i$, se $\exists$, è ! U10

(ex) X cpt $\Leftrightarrow \forall I\ \forall \mathcal{U}\ \forall (x_i)\ \exists$ limite.

SOLUZIONE

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $(x_i)_{i\in I}$ succ. senza limite: $\forall y\ \exists U(y)$ int. t.c. $A_{y_i} = \{i \in I : x_i \in U_y\} \notin \mathcal{U}$. Allora $\{U_y\}_{y\in Y}$ è ric $\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$.

Di conseguenza, $I = \bigcup_{i=1}^{n} A_{y_i}$, ma $A_{y_i} \notin \mathcal{U}$ assurdo.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\{U_j\}_{j\in J}$ ricopr. aperto t.c. $\forall \beta \in \mathcal{P}f(J)$ $\bigcup_{j\in\beta} U_j \neq X$. Sia $I = \mathcal{P}f(J)$ e dato $j \in J$ sia $K_j = \{\beta \in \mathcal{P}f(J) : j \in \beta\}$. verifichiamo che $\{K_j\}$ hanno la propr. $\cap$ finite. Ma se $\beta \in \mathcal{P}f(J)$, $\bigcap_{j\in\beta} K_j \ni \beta$. Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro t.c. $K_j \in \mathcal{U}$, $(x_\beta)_{\beta\in\mathcal{P}f(J)}$ succ. t.c. $x_\beta \notin \bigcup_{j\in\beta} U_j$: dimostriamo che (x_β) non ha limite secondo $\mathcal{U}$.

Sappiamo che $\forall x \in X\ \exists j_x : x \in U_{j_x}$: possiamo verificare che $\{\beta \in \mathcal{P}f(J) : x_\beta \notin U_{j_x}\} \supseteq K_{j_x}^c$ perché $x_\beta \notin \bigcup_{j\in\beta} U_j$. Ma $K_{j_x}^c \notin \mathcal{U}$, da cui ho trovato una succ. non conv. Allora x non è il limite.

FATTO: si può definire tutte le topologie usando gli ultrafiltri.

FATTO: questo enunciato è equiv. alla scelta.

FATTO: questo esercizio implica Tychonoff.

DIMOSTRAZIONE TYCHONOFF

Sia $X = \prod_{i\in I} X_i$, J ins. indici, $\mathcal{U}$ ultrafiltro su J, $(x^j)_{j\in J} \subseteq X$, $x^j = (x_i^j)_{i\in I}$ e considero $(x_i^j)_{j\in J}$ (fisso i). Questa è succ. in X_i, da cui $\exists\ \overline{x}_i := \lim_{\mathcal{U}} (x_i^j)_{j\in J}$.

Sostengo che $\lim x_j = \overline{x}$, $\overline{x} = (\overline{x}_i)_{i\in I}$.

Verifichiamolo sugli aperti della base: se $\beta \in \mathcal{P}f(I)$, un aperto è $\bigcap_{i\in\beta} \pi_i^{-1}(A_i) =: \tilde{A}_\beta$. Allora $\{j \in J : x^j \in \tilde{A}_\beta\} = \{j \in J : \forall i \in \beta\ x_i^j \in A_i\} = \bigcap_{i\in\beta} \{j \in J : x_i^j \in A_i\} \in \mathcal{U}$, da cui segue la tesi.

TEOREMA DI RAMSEY INFINITO

Se $\underbrace{[\mathbb{N}]^k}_{k\text{-ple non ord.}} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$, allore $\exists H$ infinito "omogeneo", cioè $\exists i : [H]^k \subseteq C_i$.

DIMOSTRAZIONE

<u>Se $k=1$</u>, ovvio.

<u>Se $k=2$</u>, sia $\Delta^+ = \{(n,m) : n<m\} \cong [\mathbb{N}]^2$.

<u>IDEA</u>: prendo ultraf. W su $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ t.c.:

1) $\Delta^+ \in W$

2) $\forall X \in W\ \exists H$ infinito t.c. $[H]^2 = \{(h_1,h_2) : h_1<h_2,\ h_1,h_2 \in H\} \subseteq X$

Supp. di avere tale W: $\Delta^+ = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \in W$ e per le propr. di ultrafiltro $C_i \in W$, per la propr. 2 $\exists H$ inf. t.c. $[H]^2 \subseteq X$.

Sia ora $\mathcal{U}$ ultr. non princ. su $\mathbb{N}$, $W = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$: dim. che W ha le propr. cercate:

1) $\{n : \Delta_n^+ \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$? Sì perché $\Delta_n^+ = [n+1, \infty) \in \mathcal{U}$ perché $\mathcal{U}$ è non principale.

2) Sia $X \in \mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$. Per def., $\hat{X} := \{n \in \mathbb{N} : X_n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$, quindi prendo $h_1 \in \hat{X} : X_{h_1} \in \mathcal{U}$. Prendo $h_2 \in \hat{X} \cap X_{h_1}$, $h_2 > h_1$, che implica $(h_1,h_2) \in X$, $h_2 \in \hat{X}$ equivale a $X_{h_2} \in \mathcal{U}$.
Scelgo $h_3 \in \hat{X} \cap X_{h_1} \cap X_{h_2}$, $h_3 > h_2$: (h_1,h_3) e $(h_2,h_3) \in X$.
Reiterando, si ottiene la tesi.

caso generale è analogo a $K=3$

Sia $\mathcal{W}=\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$, $\Delta^+=\{(m,n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N} : n<m<p\}$

1) $\Delta^+\in\mathcal{W}\iff\{n : \Delta^+_n\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\}\in\mathcal{U}$. Ma $\Delta^+_n=\{(m,p) : n<m<p\}\in$ $\mathcal{U}\times\mathcal{U}\iff\{m : \Delta^+_{n,m}\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{U}\iff\{m : \underbrace{\{p : n<m<p\}}_{\forall m\in\mathcal{U} \text{ perché è } (m,\infty)}\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{U}$ $\iff\mathbb{N}\in\mathcal{U}\iff$ TRUE

2) $X_n=\{(m,p) : (n,m,p)\in X\}\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$X_{n,m}=\{p : (n,m,p)\in X\}\subset\mathbb{N}$

$X\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\iff\hat{X}=\{n : X_n\in\mathcal{U}\times\mathcal{U}\}\in\mathcal{U}$. Prendo $h_1\in\hat{X}$,

$X_{h_1}\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}\iff\hat{X}_{h_1}=\{m : X_{h_1,m}\in\mathcal{U}\}\in\mathcal{U}$. Scelgo $h_1<h_2\in\hat{X}\cap\hat{X}_{h_1}$,

$X_{h_1,h_2}\in\mathcal{U}$, $X_{h_2}\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}$, $h_3\in\hat{X}\cap\hat{X}_{h_1}\cap\hat{X}_{h_2}\cap X_{h_1,h_2}\in\mathcal{U}$, $h_3>h_2$

Abbiamo fatto il primo passo. Scegl. $h_4\in\hat{X}\cap\hat{X}_{h_1}\cap\hat{X}_{h_2}\cap\hat{X}_{h_3}\cap X_{h_1,h_2}\cap\ldots$

(ex) Finire la dimostrazione.

(ex) Trovare un'altra dimostrazione di Ramsey.

VERSIONE FINITA

TEOREMA DI SCHUR INFINITO (GIÁ VISTO)

$\mathbb{N}=C_1\cup\ldots\cup C_r\Rightarrow\exists i,\ a<b<a+b\in C_i$

TEOREMA DI SCHUR FINITO

$\forall r\ \exists n : \forall\{1\ldots n\}=C_1\sqcup\ldots\sqcup C_r\ \exists i : a<b<a+b\in C_i$

DIMOSTRAZIONE

In comb. si dice "con un argomento di compattezza..."

Per assurdo no: $\exists r\ \forall n\ \exists\{1\ldots n\}=C_1^n\sqcup\ldots\sqcup C_r^n\ \forall i\ a<b<a+b\notin C_i$

IDEA: facciamo un "limite" di questi controesempi.

Prendo $\mathcal{U}$ ultrafil. non principale su $\mathbb{N}$, $\Gamma_i(K)=\{n\geq K : K\in C_i^n\}$,

$\Gamma_1(K)\sqcup\ldots\sqcup\Gamma_r(K)=[K,+\infty)\in\mathcal{U}\Rightarrow\exists!\,i(K) : \Gamma_i(K)\in\mathcal{U}$, quindi assegno a K il colore $i(K)$

Ho così definito $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$. Per Schur ∞ $\exists\, i$, $a<b<a+b \in C_i$

Ma $a \in C_i \iff \Gamma_i(a) \in \mathcal{U}$, quindi $\Gamma_i(a) \cap \Gamma_i(b) \cap \Gamma_i(a+b) \in \mathcal{U}$

assurdo.

1 (ex)* Ramsey per $K=2$ senza ultrafiltri.

2 (ex)* Ramsey $\infty \Rightarrow$ Ramsey $<\infty$ (analogo a questo).

3 (ex) Usando Ramsey, dimostrare che ogni insieme parz. ord. S infinito ha catene ∞ o anticatene ∞.

4 (ex) Usando Ramsey, dimostrare che A Δ-set, $A = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ $\Rightarrow \exists\, i : C_i$ è Δ-set.

<u>DEF</u>: A è Δ-set se $X \ominus X \subseteq A$ per un opportuno X infinito.

SOLUZIONE 3 5/10

$[S]^2 = C_1 \sqcup C_2$, $C_1 = \{\{x,y\} \in [S]^2 : x, y \text{ confrontabili}\}$

$C_2 =$ " " " non confront.$\}$

Per Ramsey $\exists\, H : |H| = +\infty$, $[H]^2 \subseteq C_i$ per qualche i.

Allora H è una catena ∞ o una anticatena ∞.

ARIANTE: $(S, \leq)$ ord. totale infinito. Allora S contiene un insieme infinito H t.c. $H \cong \mathbb{N}$ o $H \cong -\mathbb{N}$.

SOLUZIONE

Per AC, sia $\prec$ buon ordine su S. Coloro $[S]^2$ con:

$C_1 = \{\{x,y\} \in [S]^2 : x < y \iff x \prec y\}$

$C_2 = C_1^c = \{\{x,y\} \in [S]^2 : x < y \iff x \succ y\}$

Per Ramsey $\exists\, H$ infinito, $H^2 \subseteq C_i$. Se $i=1$, $(H, <)$ è buon ord. $\Rightarrow \exists$ segm. iniziale $\cong \mathbb{N}$. Se $i=2$, $(H, >)$ è b.o. $\Rightarrow \exists\, \dots \cong \mathbb{N}$.

TEOREMA DI RAMSEY FINITO

DEF: $n \longrightarrow (m)^k_r$ significa che $\forall C_1 \dots C_r : [\{1 \dots n\}]^k = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$, $\exists |H| = m$ omogeneo, cioè t.c. $[H]^k \subseteq C_i$ per qualche i

TEOREMA (RAM FIN)

$\forall k \, \forall r \, \forall m \, \exists n \quad n \longrightarrow (m)^k_r$

es Grafi se n è il n° vertici, $[\{1 \dots n\}]^2 = C_1 \sqcup C_2$

Per Ramsey $\exists$ clique/grafo di pt isolati
coppie coll coppie non coll

OSS: se $n = 6$, $\exists$ triangolo o 3 vertici isolati tra loro.

PRINCIPIO DI COMPATTEZZA I

DEF: se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di insiemi. Diciamo che $\mathcal{A}$ è r-regolare su un insieme X se $\forall$ partizione $X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ $\exists$ $A \in \mathcal{A} : A \subseteq C_i$

es $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\{a, b, a+b\} : a < b\}$: Schur dice che $\mathcal{A}$ è r-regolare.

TEOREMA DI VAN DER WEERDEN

$\mathcal{A}_\ell = \{a, a+d, \dots, a+\ell d : d > 0\}$ è r-regolare su $\mathbb{N}$

TEOREMA DI RAMSEY INFINITO

$\mathcal{A} = \{[H]^k : H \text{ infinito}\}$ è r-regolare su $[\mathbb{N}]^k$

PRINC. COMP. 1

Se una famiglia $\mathcal{A}$ di ins. finiti è r-regolare su un insieme infinito X, allora è r-regolare su un sottoinsieme finito $Y \subseteq X$

TEOREMA DI SCHUR FINITO

$\forall r \, \exists n : \forall \{1 \dots n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r \quad \exists a < b < a+b$ monocrom.

DIMOSTRAZIONE CON PRINC. COMP.

$\mathcal{A}=\{\{a,b,a+b\}: a<b\}$ é r-regolare su $\mathbb{N}$ per Schur infinito.
Allora $\exists Y$ finito su cui $\mathcal{A}$ é r-regolare $\Rightarrow Y\subseteq\{1,\dots,n\}$ per qualche $n \Rightarrow$ tale n va bene.

DIMOSTRAZIONE RAMSEY FINITO CON PRINC. COMPATTEZZA

Siano k, r, m fissati. Scelgo $\mathcal{A}=\{[H]^k : |H|=m\}$; é r-regolare su $[\mathbb{N}]^k$ per Ramsey infinito. Per comp. $\exists Y\subseteq[\mathbb{N}]^k$ finito su cui $\mathcal{A}$ é r-regolare. Sia n t.c. $Y\subseteq[\{1,\dots,n\}]^k$; se $[\{1..n\}]^k=C_1\sqcup\dots$ tesi. (es) $n=\max(\bigcup Y)$

(es) Ramsey finito $\Rightarrow$ Ramsey infinito.

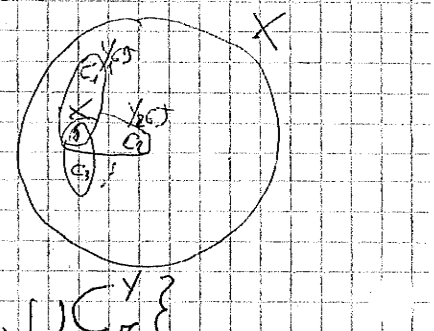
DIMOSTRAZIONE PRINCIPIO COMPATTEZZA I

L'idea é simile a Schur. Per assurdo supponiamo che $\forall Y\subseteq X$ finito $\exists$ r-colorazione di $Y=C_1^Y\sqcup\dots\sqcup C_r^Y$ t.c. $\forall A\in\mathcal{A}$ $\forall i$ $A\not\subseteq C_i^Y$.

Sia $J=\mathrm{Fin}(X)$, $\mathcal{U}$ ultrafiltro definito con: $\forall x\in X$ sia $\hat{x}:=\{Y\in J: x\in Y\}\subseteq\mathrm{Fin}(X)$; $\hat{x}_1\cap\dots\cap\hat{x}_n=\{Y\in J: x_1..x_n\in Y\}\ni\{x_1..x_n\}\Rightarrow$ posso estendere $\{\hat{x}\}_{x\in X}$ a un ultrafiltro su J.

<u>FATTO</u>: nei naturali questa condizione di sopra non é necessaria, perché $\mathbb{N}$ ha ricoprimento fatto di insiemi finiti.

Voglio trovare una r-colorazione su X: per ogni $Y\in J$ con $x\in Y$, ho un colore $\chi_Y(x)\in\{1..r\}$.



Tali Y formano $\hat{x}=\Gamma_1^x\sqcup\dots\sqcup\Gamma_r^x$ con
$\Gamma_i^x=\{Y: x$ ha colore i nella r-col. $Y=C_1^Y\sqcup\dots\sqcup C_r^Y\}$.

Allora $\exists!\,\chi(x)\in\{1,\dots,r\}$ con $\Gamma^x_{\chi(x)}\in\mathcal{U}$.

[illegible] $X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$, mostro che A è [illegible]
di queste famiglie monocromatici: se $\exists i$, $A = \{x_1 \dots x_m\} \subseteq C_i$,
$x_s \in C_i \Longleftrightarrow \{Y : x_s \in C_i^Y\} = \Lambda_s \in M$.
Allora $\bigcap_{s=1}^{m} \Lambda_s = \{Y : \{x_1 \dots x_m\} \subseteq C_i^Y\} \in M$ da cui $A = \{x_1 \dots x_m\}$
sarebbe monocrom. nella r-colorazione $Z = C_1^Z \sqcup \dots \sqcup C_r^Z$ per
$Z \in \bigcap_{s=1}^{m} \Lambda_s$

(ex) Usare il teorema di Tychonoff (cioè $\{1 \dots r\}^X$ cpt) per dimostrare il princ. di compattezza

(ex) Dimostrare principio compattezza II: sia $\mathcal{A}$ famiglia r-regolare di insiemi finiti su un insieme X. Allora $\exists \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ sottofamiglia finita r-regolare su X

<u>LEMMA</u>: sia $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ senza pt fissi. Allora $\exists C_1, C_2, C_3$ t.c.

$$\forall n \quad n \in C_i \Longleftrightarrow f(n) \notin C_i$$

<u>VERSIONE FINITA</u>: $F \subseteq \mathbb{N}$ sottoins. finito. Allora $\exists C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 = F$ t.c. $n \in C_i \Longleftrightarrow f(n) \notin C_i$ se $(n, f(n)) \in F^2$.

DIMOSTRAZIONE

Induzione su $|F| = k$. Se $k = 1$ ok. Prendiamo $k+1$ elementi $\{n_1 \dots n_{k+1}\}$ per princ. cassetti, $\exists n_i$ con al più una controimm. (e un'immagine) in $\{n_1 \dots n_{k+1}\} \Rightarrow$ coloro gli altri $\times$ hp induttiva e poi n_i ha il 3° colore.

(ex) Dimostrare la versione infinita, non estendendo la versione finita.

(ex) Formulare e dim. la versione finita di Van der Waerden e del teorema delle differenze.

DIMOSTRAZIONE PR. COMP. (TOPOL.) 10/10

Sia X insieme, $C := \{1,\dots,r\}^X := \{r\text{-color. di } X\}$, con base di aperti le col. fissati colori di finiti elementi (top. prodotto).

<u>OSS</u>: C cpt per Tychonoff

Sia $\{U_{(A,c)}\}_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ c\in\{1\dots r\}}}$ fam. aperta def. da $f\in U_{(A,c)}$ sse $f(a)=c\ \forall a\in A$

La r-regolarità di $\mathcal{A}$ dice che $\{U_{(A,c)}\}$ è ricoprimento:

$\forall f_0 : X \to \{1,\dots,r\}\ \exists A_0\in\mathcal{A},\ c_0\in\{1\dots r\}\ f_0(a)=c_0\ \forall a\in A_0.$

$\Updownarrow$

$f_0 \in U_{(A_0,c_0)}$

La comp. di C ci dice che $\exists A_1\dots A_n, c_1\dots c_n$ t.c. $\{U_{(A_i,c_i)}\}_{i=1\dots n}$ è ricoprimento. Abbiamo trovato famiglia finita r-regolare, cioè abbiamo dim. la versione 2.

Inoltre, $\mathcal{A}$ è r-regolare su $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

ALTRE NOZIONI SUGLI ULTRAFILTRI

<u>DEF</u>: $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I, $f: I \to J$, si definisce l'ultrafiltro immagine con $A\in f_*(\mathcal{U}) \iff f^{-1}(A)\in\mathcal{U}$

(ex) 1) $f_*(\mathcal{U})$ ultraf. su J

2) $f_*(g_*\mathcal{U}) = (f\circ g)_*\mathcal{U}$

3) $f \equiv_{\mathcal{U}} g \implies f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$

<u>DEF</u>: $f \equiv_{\mathcal{U}} g \iff \{i \mid f(i)=g(i)\}\in\mathcal{U}$

<u>CONG</u>: Vale $\Leftarrow$ nella proprietà 3? PROBLEMA APERTO (in ZF+CH no)

<u>PROP</u>: $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \implies f \equiv_{\mathcal{U}} id$

DIMOSTRAZIONE

Per assurdo no: $\{i : f(i)\neq i\}\in\mathcal{U}$. Sia $g \equiv_{\mathcal{U}} f$ t.c. $g(i)\neq i\ \forall i$.

Per il lemma dei 3 colori $\exists C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 = I : g(C_i)\cap C_i = \emptyset$

... dei tre colori $C_i \in \mathcal{U} \Rightarrow g(C_i) \notin \mathcal{U}$, ma

$g(C_i) \in g_*(\mathcal{U})$ perché $g^{-1}(g(C_i)) \supseteq C_i \in \mathcal{U}$.

Assurdo perché $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

ex $\mathcal{U} \neq \mathcal{V} \Leftrightarrow \exists A \cap B = \emptyset : A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{V}$

DEF: $\mathcal{U}$ ultr. su I, $\mathcal{V}$ ultr. su J. Allora $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ se esiste $\sigma : I \longrightarrow J$ bigettiva con $\sigma_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ (isomorfismo)

ex $\mathcal{U} \cong \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V} \cong \mathcal{U}$

PROP: $f_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{U} : f|_A$ è iniettiva ($f : I \longrightarrow J$) e $|I| = |J|$.

DIMOSTRAZIONE

Per hp ($\Rightarrow$) $\exists \sigma : J \longrightarrow I$ bigettiva con $\sigma_* f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Per la prop. prec. $A := \{i : \sigma(f(i)) = i\} \in \mathcal{U}$. Allora $f|_A$ è ini perché $\sigma \circ f = \mathrm{Id}_A$.

Ora vediamo ($\Leftarrow$): $f|_A$ è ini, dove $A \in \mathcal{U}$.

IPOTESI IN PIÙ: tutti gli insiemi di $\mathcal{U}$ hanno la stessa cardinalità (che coincide con la card. di I).

DEF: un ultraf. con tale propr. è detto uniforme

OSS: se ho ultr. $\mathcal{U}$ non unif., posso prendere un ins. di $\mathcal{U}$ di card. minima: $\mathcal{U}$ è "moralmente" un ultr. uniforme su tale insieme.

Partiziono $A = A_1 \sqcup A_2$, con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $|A_1| = |A_2| = |A|$ $(= |I|)$.

WLOG $A_1 \in \mathcal{U}$, $A_2 \notin \mathcal{U}$. Estendo $f|_{A_1}$ a bigezione $\sigma : I \longrightarrow J$ (uso $\mathcal{U}$ uniforme), perché $|f(A_2)| = |I|$, quindi $|I - A_1| = |J - f(A_1)|$.

Def. $\sigma : I \longrightarrow J$, $\sigma|_{A_1} = f|_{A_1} \Rightarrow \sigma \equiv_{\mathcal{U}} f \Rightarrow \sigma_*(\mathcal{U}) = f_*(\mathcal{U})$

ex Serve davvero $\mathcal{U}$ uniforme?

DEF: pre-ordine di Rudin-Keisler $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ se $\exists f : f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$

OSS: in un certo senso $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ se $\mathcal{U}$ "è più semplice di $\mathcal{V}$".

PROP: $\leq_{RK}$ è ordine parziale sulle classi di isomorfismo, cioè

$$\mathcal{U} \leq \mathcal{V},\ \mathcal{V} \leq \mathcal{U} \iff \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$$

DIMOSTRAZIONE

$\boxed{\Leftarrow}$ OVVIA $\boxed{\Rightarrow}$ Per hp $\exists f, g : f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U},\ g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$, quindi $g_* f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \Rightarrow (g \circ f) \equiv_{\mathcal{V}} Id$, cioè $A = \{i : g(f(i)) = i\} \in \mathcal{V}$.
Allora $f\restriction_A$ è ini $\Rightarrow f_*(\mathcal{V}) \cong \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} \cong \mathcal{V}$

ex $\mathcal{U} <_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ per ogni $\mathcal{U}$ non princ. su $\mathbb{N}$

COR: $\exists \mathcal{U}, \mathcal{V}$ ultr. su $\mathbb{N}$ non isomorfi.

LO SPAZIO $\beta(\mathbb{N})$

DEF: $\beta\mathbb{N} = \{\mathcal{U} \text{ ultrafiltro su } \mathbb{N}\}$, che ha come topologia la compattificazione di Stone-Čech dello spazio discreto $\mathbb{N}$

OSS: $\beta\mathbb{N} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$

PROP: $|\beta\mathbb{N}| = 2^{c}$

Posso pensare $\mathbb{N} \subseteq \beta(\mathbb{N})$ identificando $n \in \mathbb{N}$ con l'ultrafiltro principale $\mathcal{U}_n$.

DEF: $\forall A \subseteq \mathbb{N},\ \mathcal{O}(A) = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}$. La top. su $\beta\mathbb{N}$ è quella avente $\{\mathcal{O}_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ come base di aperti.

PROP: $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_{A \cap B},\ \mathcal{O}_A \cup \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_{A \cup B},\ \mathcal{O}_A^c = \mathcal{O}_{\mathbb{N}-A}$

COR: $\beta\mathbb{N}$ ha base di "clopen" $\Rightarrow$ è totalmente sconnesso e 0-dimensionale

PROP: $\beta\mathbb{N}$ è Hausdorff

DIMOSTRAZIONE

$\mathcal{U} \neq \mathcal{V} \iff \exists A : A \in \mathcal{U}, A \notin \mathcal{V}$, cioè $A^c \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{O}_A,\ \mathcal{V} \in \mathcal{O}_{A^c}$ e $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_{A^c}$

PROP. $\beta\mathbb{N}$ è compatto

DIMOSTRAZIONE

Una delle forme equival. per dire che X è cpt è: se $\{C_i : i \in I\}$ è famiglia di chiusi con la FIP, allora $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.

Nel nostro caso, C_i chiuso $\iff \exists J_i$ con $C = \bigcap_{A \in J_i} \Theta_A$, quindi $\bigcap_{i\in I} C_i = \bigcap_{A\in J} \Theta_A$ con $J = \bigcup_{i \in I} J_i$.

Supponiamo quindi che $\{\Theta_A : A \in J\}$ ha la FIP (segue da $\{C_i\}$ ha la FIP): $\Theta_{A_1} \cap \ldots \cap \Theta_{A_m} = \Theta_{A_1 \cap \ldots \cap A_m} = \emptyset \iff A_1 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$. Allora J ha la FIP. Allora $\exists\, \mathcal{U}$ ultrafiltro che estende J, da cui $\mathcal{U} \in \bigcap_{A\in J} \Theta_A = \bigcap_{i \in I} C_i$. $\mathcal{U} \in \Theta_A \iff A \in \mathcal{U}$.

PROP. vale la propr. universale: $\forall K$ cpt Hausdorff, $\forall f : \mathbb{N} \to K$,
$\exists! \hat{f} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow K$ estensione continua di f

(ex) Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ $\overline{A} = \Theta_A$ 12/10

(ex) $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$ è discreto e denso.

DIMOSTRAZIONE

$\Theta_{\{n\}} = \{\mathcal{U}_n$ ultr. princ. su $n\}$ contiene n e nessun altro naturale quindi $\mathbb{N}$ è discr. È denso perché $\overline{\mathbb{N}} = \Theta_{\mathbb{N}} = \beta\mathbb{N}$.

(ex) • Gli insiemi Θ_A sono tutti e soli i clopen di $\beta\mathbb{N}$

• U aperto di $\beta\mathbb{N} \Rightarrow \overline{U} = \Theta_{U \cap \mathbb{N}}$ (in particolare $\nexists$ aperti $\emptyset \neq U \subseteq \beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$, cioè $\mathbb{N}$ è denso).

• U intorno di $\mathcal{U} \Rightarrow U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, ma non vale il viceversa.

(ex) Nessun ultrafiltro non principale ha base di intorni numerabile, quindi $\beta\mathbb{N}$ non è metrizzabile.

(ex) * Dimostrare che $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$: immergiamo $\{\mathbb{1}_A : A \in \mathbb{R}\}$ in $\beta\mathbb{N}$

COR: $\exists$ almeno 2^c classi di isom. in $\beta\mathbb{N}$: $|\{\mathcal{V}\in\beta\mathbb{N} : \mathcal{V}\cong\mathcal{U}\}|\leq c$.

DOMANDA: $\exists\,\mathcal{U},\mathcal{V}: \mathcal{U}\not\leq_{RK}\mathcal{V},\ \mathcal{V}\not\leq_{RK}\mathcal{U}$? Sì, ma è difficile da dimostrare. Shelah ha dimostrato che sono 2^c.

(ex) $f_*(\mathcal{U})\cong\mathcal{U} \iff \exists A\in\mathcal{U} : f|_A$ è 1-1 (GIÀ FATTO).

(ex) $f_*(\mathcal{U})=g_*(\mathcal{U})$, f iniettiva $\Rightarrow f\equiv_{\mathcal{U}} g$.

TEOREMA

$\forall f: I\longrightarrow I$ t.c. $f(i)\neq i\ \forall i\in I$, $\exists\, I=C_1\sqcup\ldots\sqcup C_3$ t.c. $f(i)\in C_j \iff i\notin C_j$

DIMOSTRAZIONE

Partiamo dalla versione finita. Sappiamo che $\forall Y\in\mathrm{Fin}(I)\ \exists$ $Y=C_1^Y\sqcup C_2^Y\sqcup C_3^Y$ che sodd. la tesi. Sia $\mathcal{U}$ ultr. su $\mathrm{Fin}(I)$ che estende $\{\hat{i} : i\in I\}$, $\hat{i}=\{Y\in\mathrm{Fin}(X) : i\in Y\}$.

Fissato i, $\Gamma_j(i)=\{Y : i\in C_1^Y\}$, $\Gamma_1(i)\sqcup\Gamma_2(i)\sqcup\Gamma_3(i)=\hat{i}\in\mathcal{W}$, quindi $\exists!\,\Gamma_s(i)\in\mathcal{W}$ e dà il colore s a i, dunque $i\in C_s\iff\Gamma_s(i)\in\mathcal{W}$

Prendo $i\in I$, $f(i)$: se $i, f(i)$ hanno colori s,t, $Y\in\Gamma_s(i)\cap\Gamma_t(f(i))$ che è $\neq\emptyset$ perché entrambi sono in $\mathcal{U}$ $\Rightarrow s\neq t$ per hp.

Oppure uso princ. compattezza prendendo $\{(i,f(i)) : i\neq f(i)\}$

(ex) Ramsey $\infty\Rightarrow$ Ramsey fin

Ramsey fin $\Rightarrow$ Ramsey ∞

SOLUZIONE

2) Altrimenti $\exists\,[\mathbb{N}]^k=C_1\sqcup\ldots\sqcup C_r$ che non ha omogenei infiniti. Si ricomincia...

(ex) * Sia $\mathcal{U}$ ultr. su $\mathbb{N}$ non princ. Sono equivalenti:

- $\mathcal{U}$ è RK-minimale tra i non principali
- $\mathcal{U}$ è selettivo: $\forall\,\mathbb{N}=\bigsqcup^{\infty} X_n$, $X_n\in\mathcal{U}^c$ $\exists A\in\mathcal{U}$ "selettore" cioè $|A\cap X_n|=1$

FATTO: ... RK-minimale e ... ZFC, ma si può dimostrare

(ex) * Dimostrare che $\mathcal{U}$ è RK-minimale sse $\forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ f è $\mathcal{U}$-q.o. costante oppure f è $\mathcal{U}$-q.o. iniettiva sse $\forall f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\exists g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non-decrescente t.c. $f =_{\mathcal{U}} g$

(ex) ** Ramsey: se $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$ $\exists A \in \mathcal{U} : [A]^2 \subseteq C_i$ sse $\mathcal{U}$ è RK-minimale (questa sembra la prop. più forte).

DIMOSTRAZIONE PROPRIETÀ UNIVERSALE $\beta\mathbb{N}$

$\forall f: \mathbb{N} \to K$ con K cpt Hausdorff (continua ← inutile) $\exists$ estensione continua $\bar{f}: \beta\mathbb{N} \to K$.

<u>OSS</u>: $\bar{f}$ è ! perché $\mathbb{N}$ è denso in $\beta\mathbb{N}$

Definiamo $\bar{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$-limite di $f(n) \in K$ ($\exists!$: già visto).

È un'estensione? Immediato: $\bar{f}(\mathcal{U}_k) = \mathcal{U}_k\text{-}\lim f(n) = f(k)$.

È continua? Ho U intorno di $\bar{f}(\mathcal{U})$: cerco $B \subseteq \mathbb{N}$: $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$ e $\bar{f}(\mathcal{O}_B) \subseteq U$

<u>OSS</u>: K cpt Hausdorff $\Rightarrow$ K regolare (ogni pt ha base intorni chiusi).

Prendo V intorno di $\bar{f}(\mathcal{U})$: $\overline{V} \subseteq U$

<u>CLAIM</u>: $B = f^{-1}(V)$ soddisfa le prop. richieste.

1) $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B$: V è intorno di $\bar{f}(\mathcal{U}) := \mathcal{U}$-limite $f(n) \overset{\text{DEF } \mathcal{U}\text{-LIM}}{\Longrightarrow}$ $\{n : f(n) \in V\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \mathcal{O}_{f^{-1}(V)}$

2) $\bar{f}(\mathcal{O}_{f^{-1}(V)}) \subseteq \bar{f}(\mathcal{O}_{f^{-1}(\overline{V})}) \overset{\text{HOPE}}{\subseteq} \overline{V} \subseteq U$.

Resta da provare l'hope: $\bar{f}(\mathcal{O}_{f^{-1}(C)}) \subseteq C$ $\forall C$ chiuso. Se $\bar{f}(\mathcal{W}) \notin C$, cioè $\mathcal{W}\lim f(n) \in C^c$, allora $\{n : f(n) \in C^c\} \in \mathcal{W}$, da cui $[f^{-1}(C)]^c \in \mathcal{W} \Rightarrow f^{-1}(C) \notin \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{W} \notin \mathcal{O}_{f^{-1}(C)}$. (ex) Questa propr. caratterizza $\beta\mathbb{N}$.

FATTO: la comp. Stone-Čech $\exists$ sse si separano pt da chiusi