ESERCIZI

ex Verificare che $f_*(\mathcal{U})$ è ultraf. su $\mathbb{N}$

SOLUZIONE

È chiaro che $f_*(\mathcal{U})$ è un filtro per propr. f^{-1}. Resta da provare che $A \notin f_*(\mathcal{U}) \Rightarrow A^c \in f_*(\mathcal{U})$.

$A \notin f_*(\mathcal{U}) \Rightarrow f^{-1}(A) \notin \mathcal{U} \Rightarrow [f^{-1}(A)]^c \in \mathcal{U} \Rightarrow f^{-1}(A^c) \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in f_*(\mathcal{U})$

ex $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$, f iniettiva $\Rightarrow f \equiv_{\mathcal{U}} g$. Vic. $f \equiv_{\mathcal{U}} g \Rightarrow f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$

SOLUZIONE

Facciamo il viceversa: per assurdo $\exists A \in f_*(\mathcal{U}), A \notin g_*(\mathcal{U})$, cioè $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}, g^{-1}(A) \notin \mathcal{U}$ da cui $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}, g^{-1}(A^c) \in \mathcal{U}$.

Pertanto, $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(A^c) \in \mathcal{U}$, cioè $\{i \in \mathbb{N} : f(i) \in A, g(i) \in A^c\} \in \mathcal{U}$, cioè $\{i \in \mathbb{N} : f(i) \neq g(i)\} \in \mathcal{U}$ assurdo perché $f \equiv_u g$

Vediamo ora $\boxed{\Rightarrow}$: WLOG f bigettiva (ci restr. alla sua immagine).

CASO $f(I) = g(I)$: $(f^{-1} \circ g)_*(\mathcal{U}) = f^{-1}_*(g_*(\mathcal{U})) = f^{-1}_*(f_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$

Allora $f^{-1} \circ g \equiv_u Id \Rightarrow f \circ f^{-1} \circ g \equiv_u f \Rightarrow g \equiv_u f$ (f bigettiva).

Perché posso supporre f big? $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$ sse $\forall B \subseteq J$ $f^{-1}(B) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow g^{-1}(B) \in \mathcal{U}$.

Per $B = J - \mathrm{Im}\, f$, $f^{-1}(B) = \emptyset \notin \mathcal{U} \Leftrightarrow g^{-1}(B) \notin \mathcal{U}$ Allora $g \equiv_u h$,

$$h(i) = \begin{cases} f(i_0), & i \notin C \\ g(i), & i \in C \end{cases}$$ per qualche $i_0 \in I, \{i_0\} \notin \mathcal{U}$

ALTERNATIVA

Per inj f, $\exists h$ t.c. $h \circ f = id \Rightarrow h_* f_*(\mathcal{U}) = h_* g_*(\mathcal{U})$ da cui $\mathcal{U} = h_*(f_*(\mathcal{U})) = h_* g_*(\mathcal{U})$

Ora dobbiamo provare che $\{i : h(g(i)) = i\} \in \mathcal{U} \Rightarrow \{i : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$

Basta $\{f^{-1}(g(A)) \cap A\} \in \mathcal{U} : i \in f^{-1}(g(A)) \cap A \Leftrightarrow [f(i) = g(j) \Rightarrow h(f(i)) \underset{i \in A}{=} i = h(g(j)) \underset{j \in A}{=} j$

(ex) $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$ ma $f \not\equiv_{\mathcal{U}} g$

SOLUZIONE

Se $\mathcal{U} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$, $(\pi_1)_*(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) = (\pi_2)_*(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V}$ ma $f \not\equiv_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}} g$.

Se $\mathcal{V}$ non è principale, $\pi_1 \not\equiv_{\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}} \pi_2$, perché $\Delta \notin \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$.

Si dim. analog. che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \geq_{RK} \mathcal{U}$.

FATTO: Ramsey finito $\not\Rightarrow$ Ramsey infinito in modo semplice.
(l'esercizio era sbagliato)

(ex) $\mathcal{V} <_{RK} \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$

SOLUZIONE

Supponiamo per assurdo di avere $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ t.c. $f_*(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V}$.
Allora $(\pi_1)_* f_* \mathcal{V} = (\pi_1)_*(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V} \Rightarrow \pi_1 \circ f \cong id \Rightarrow \pi_1 \circ f = id$ su A, da cui $f(A) \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$. Ma $f(A)$ ha un pt su ogni fibra, da cui l'assurdo.

(ex) $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ non princ. $\Rightarrow \mathcal{U}$ non ha base di intorni numerabile.

SOLUZIONE

Sia $\mathcal{U}$ ultr. con base numerabile di intorni. WLOG la base è fatta di insiemi della forma $\mathcal{O}_{A_i}$, $A_{i+1} \subseteq A_i$.

$\bigcap \mathcal{O}_{A_i} \supseteq$ più di un pt; ogni A_i è ∞, perché A_i hanno FIP.

DEF: dati $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, $B \subseteq^* A_n$ $\forall n$ se $B - A_n$ finito.

PROP: se trovo $B \subseteq^* A_n$, ogni $\mathcal{U} \ni B$ non principale contiene anche $A_n \Rightarrow$ estendo a caso un ultr. contenente B e trovo el. in $\bigcap \mathcal{O}_{A_i}$.

Come trovo B? Un el. in A_1, uno in A_2, ... $\Rightarrow \mathcal{O}_B \subseteq \bigcap \mathcal{O}_{A_i}$

Se A_i non è ∞ per qualche i, $\mathcal{U}$ non è principale.

(ex) TFAE:

1) $\mathcal{U}$ é p-point, cioé $\bigcap_{\mathbb{N}}$ intorni di $\mathcal{U}$ é intorno di $\mathcal{U}$.

2) $\forall\, \mathbb{N} = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \notin \mathcal{U},\ \exists X \in \mathcal{U}$ t.c. $|X \cap A_k| < \infty\ \forall k$

3) $\forall f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, f é costante $\mathcal{U}$-q.o., oppure $f \equiv g$ dove g é finite-to-one ($|g^{-1}(i)| < \infty$).

(ex) $|\beta \mathbb{N}| = 2^c$

SOLUZIONE

Esibiamo 2^c famiglie con la FIP su $\mathcal{P}_{FIN}(\mathbb{Q})$ t.c. $\forall\, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ $\exists A : A \in \mathcal{F},\ A^c \in \mathcal{G}$.

Sia $t \in \mathbb{R}$, $f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$: $A_f^t := \{ Y \in \mathcal{P}_{FIN}(\mathbb{Q}) : |Y \cap (-\infty, t)| \equiv f(t) \bmod 2\}$

Definiamo $\mathcal{F}_f = \{A_f^t : t \in \mathbb{R}\}$.

Se $f(t_0) \neq g(t_0)$, $A_f^{t_0} = (A_g^{t_0})^c \Longrightarrow$ le estensioni di $\mathcal{F}_f$ a ultr. sono tutte distinte.

Dimostriamo la FIP: dati $t_1 < \ldots < t_n$, cerco el. in $A_f^{t_1} \cap \ldots \cap A_f^{t_n}$.
Se $f(t_1) = 1$, aggiungo raz. $< t_1$, se $f(t_2) \neq t_1$, agg. raz. tra t_1 e t_2, ecc.

SOLUZIONE 2

Cerco $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f : \mathcal{A} \longrightarrow \{0,1\}$, $\mathcal{A}^f = \{A \in \mathcal{A} : f(A) = 1\} \cup \{A : A^c \in \mathcal{A}, f(A^c) = 1\}$.
Voglio $|\mathcal{A}| = 2^n$, $\mathcal{A}^f$ con la FIP, cioé $\forall A_1 \ldots A_m \in \mathcal{A}$: voglio $A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}^c \cap \ldots \cap A_m^c$ non vuoto. Cerco in realtà $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$; sia $g : \mathbb{N} \longrightarrow P$ primi,
$A_g := \{$multipli di $g(n)\}$: $A_{g_1} \cap A_{g_2} \neq \emptyset$.
Problema: $A_{g_1} \cap A_{g_2}^c$ può essere vuoto. Definiamo $g_i \sim g_j$ se $g_i \equiv_{\mathcal{U}} g_j$ con $\mathcal{U}$ fissato ultr. non pr. Sia G ins. rapp. classi equivalenza.
prendiamo $\mathcal{A} = \{A_f : f \in G\}$.

allora $A_{f_1} \cap \dots \cap A_{f_k} \cap A_{f_{k+1}} \cap \dots \cap A_{f_m}$ è non vuoto perché ...

$\bigcap_{1\le i<j\le m} \{f_i \neq f_j\} \in \mathcal{U}$: sia m tale che $m \in \bigcap \{f_i \neq f_j\}$. Per tale indice, la colonna m-esima è non vuota $\Rightarrow$ OK

Chi è $|A|$?

<u>DEF</u>: $\mathcal{U}$ ultr. su $\mathbb{N}$, X insieme. Chiamo ultrapotenza di X l'insieme quoziente $X^* = X^{\mathbb{N}}/_{\equiv_{\mathcal{U}}} =: X^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$

Vogliamo provare $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}| = c$, dimostriamo che $|\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}| = c$.

Fissato $r \in \mathbb{R}$, prendo X_n^r succ. conv. a r: $X_n^r \equiv_{\mathcal{U}} X_n^s \Leftrightarrow r = s$.

SCARICARE DA WWW.DM.UNIPI.IT/~DINASSO/ULTRABIBLIO I FILE.

SOLUZIONE 3 19/10

<u>LEMMA</u>: se $f: \mathbb{N} \to K$, K cpt, T2, ha immagine densa, allora $\overline{f}: \beta\mathbb{N} \to K$ è suriettiva (esiste perché K è cpt, prop. univ.).

DIMOSTRAZIONE

$\overline{f}(\beta\mathbb{N})$ è cpt $\Rightarrow \overline{f}(\beta\mathbb{N})$ chiuso, $\overline{f}(\beta\mathbb{N}) \supseteq \overline{f(\mathbb{N})} = K$.

Considero ora $\Lambda = \{0,1\}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$: cerco spazio num. denso.

Questo spazio è fatto dalle funzioni dalle successioni a valori in $\{0,1\}$ in $\{0,1\}$.

Sia $J \in Fin(\mathbb{N})$ e considero $\{0,1\}^{\{0,1\}^J}$: è finito e si immerge in $\{0,1\}^{(\{0,1\}^{\mathbb{N}})}$ con

$$\underset{\Lambda_J}{\overset{\|}{\{0,1\}^{\{0,1\}^J}}} \qquad \Lambda_J \to \Lambda, \quad g \mapsto \tilde{g}: (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to g(a_j)_{j\in J}$$

Dico che $F: Fin(\mathbb{N}) \Longrightarrow \Lambda$, $J \longmapsto \Lambda_J$ ha imm. densa.

Un aperto base è $A_{I,g} = \{f \in \Lambda : f|_I = g\}$ con $I \in Fin(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$, $g \in \{0,1\}^I$. Allora $I = \{a^1, \dots, a^n\}$: $\forall i \neq k\ \exists \varphi_{ik}: a^i_{\varphi(i,k)} \neq a^k_{\varphi(i,k)}$ (sono succ. diverse $\Rightarrow$ differiscono almeno in un pt ...

Scelgo $J = \{\varphi(i,k),\ i,k \leq n\} : g \in \{0,1\}^J,\ a^i|_J \neq a^k|_J$.
Definisco $\tilde{g}$ con $\tilde{g}(a^i) = g(a^i)$, $\tilde{g}(a) = 0\ \forall a : a|_J \neq a^i|_J\ \forall i$.

IDEA: Λ_J è l'ins. delle succ. che dipendono solo da finiti indici, un aperto base dice qual è il valore su finite successioni.

OSS: funziona anche nel caso generale.

ULTRAFILTRI SELETTIVI

TEOREMA

Le seguenti sono equivalenti:

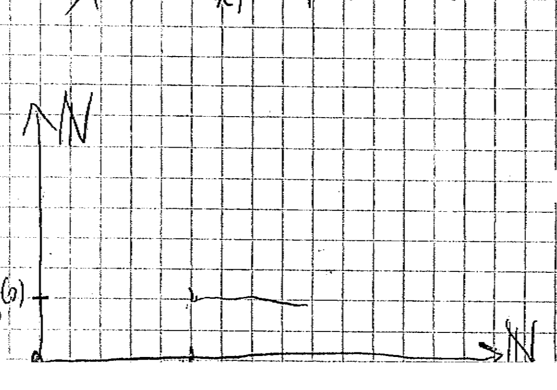
1) Per ogni part. $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, $A_k \neq \emptyset$, $A_k \notin \mathcal{U}$, $\exists X \in \mathcal{U}\ |X \cap A_k| = 1$
2) " " $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f \not\equiv_u \text{cost}$, $f \equiv_u g$, g iniettiva.
3) " " " $f \equiv_u g$, g debl. cresc.
4) $\mathcal{U}$ minimale per $\leq_{RK}$

DIMOSTRAZIONE

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Se $f \not\equiv_u \text{cost}$, $\forall k \in \mathbb{N}\ f^{-1}(k) \notin \mathcal{U}$. Allora $\mathbb{N} = \bigsqcup f^{-1}(k)$, quindi per hp 1 ($f^{-1}(k) \neq \emptyset$ per ∞ indici altr. $\mathbb{N} = \bigsqcup$ fin robe non in $\mathcal{U}$), $\exists X \in \mathcal{U}$ t.c. $|X \cap A_k| = 1$, $f|_X$ iniettiva. Spezzo X in due, una è nell'ultr., nell'altro cambio f (ho abbastanza immagini).

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$; def. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c. $f(A_k) = k$. Per hp 2, $f \equiv_u g$, g iniettiva, $X = \{n : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$, $|X \cap A_k| = 1$ o 0. A meno di aggiungere punti, tesi.

$\boxed{1,2 \Rightarrow 3}$ Ho $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$: $f \equiv_u c \Rightarrow$ prendo $g(n) = c\ \forall c \Rightarrow$ WLOG f iniettiva.
Allora f è def. più grande di $M\ \forall M$.



Prendo $a_0 := g(0)$, A_0 t.c. f è $> a_0$ $\forall n > A_0$.

Sia analog. $a_1 := \max(g([0,A_1]))$, A_1 t.c. f è $> a_1$ $\forall n > A_1$.

Reitero il proc. e ottengo intervalli B_i t.c. $f(B_{k+2}) > \max_{B_0 \cup \dots \cup B_k} f$.

Allora $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \text{ pari}} A_k \sqcup \bigsqcup_{k \text{ disp}} A_k$. Uno dei due (WLOG il primo) è in $\mathcal{U}$,

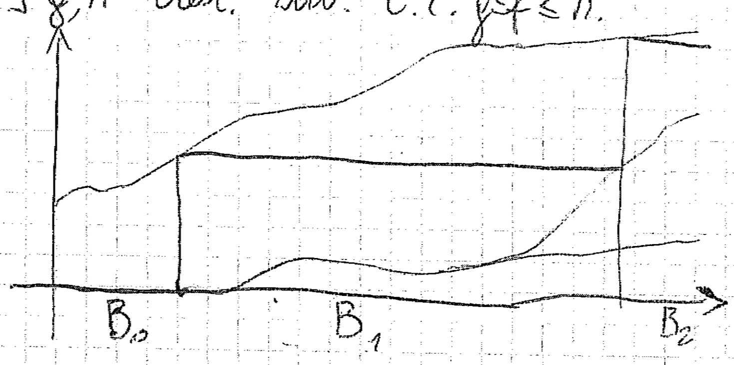
quindi per (1) $\exists X \in \mathcal{U}$ t.c. $|X \cap A_k| = 1$, $X = \{x_{2h}\}$, $x_{2h} \in B_{2h}$ $\forall h$.

Ho che $f|_X$ è str. cresc.: lo estendo e diventa deb. crescente.

Inoltre, $g = f$ su X, quindi $g \equiv_{\mathcal{U}} f$.

Posso vis. così: se f è ini, $\exists g, h$ cresc. div. t.c. $g \le f \le h$.

Divido l'insieme $\mathbb{N}$ così:



Ottengo lo stesso caso di prima! Oppure prendo

$\{n \in \mathbb{N} : f$ è sopra scala$\}$ e

$\{n \in \mathbb{N} : f$ è sotto scala$\}$: uno dei due è in $\mathcal{U}$, ...

TEOREMA DI HINDMAN

Diamo una str. alg. a $\beta\mathbb{N}$.

<u>DEF</u>: $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \ni A$ sse $\{n : A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$, dove $A - n = \{m : m + n \in A\}$

<u>OSS</u>: $\text{SOMMA}: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $\text{SOMMA}_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

<u>OSS</u>: dati $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ultra su $\mathbb{N}$, $\{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\} =: \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ è filtro ma non ultra. $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è ultra che lo estende.

ex $\mathcal{U}$ selettivo sse l'! ultra $\supseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ è $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$

ex 1) $\oplus$ è associativo

2) $\oplus$ non è comm.

<u>PROP</u>: $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ è semigruppo topologico destro (cioè è associativo, $\forall \mathcal{V}$ $\psi_{\mathcal{V}} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ def da $\psi_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è continua)

DIMOSTRAZIONE

$\psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\Theta_A) \ni \mathcal{U} \iff \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \Theta_A \iff A \in \Theta_{\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}} \iff \{n : \{m : m+n \in A\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$

$\iff \mathcal{U} \in \Theta_B$ con $B := \{n : \{m : m+n \in A\} \in \mathcal{V}\}$.

OSS: si può fare lo stesso partendo da un semigruppo qualunque.

PROP (Glazer): se $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$, allora vale Hindman

TEOREMA (HINDMAN)

$\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \Rightarrow \exists X$ inf, $\exists i$ t.c. $FS(X) = \{\sum_{x \in F} x : F \in \mathrm{Fin}(X)\} \subseteq C_i$

LEMMA: se $A \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ idempotente, allora A è add. grande, cioè $\exists X$ infinito t.c. $FS(X) \subseteq A$. (Glazer)

LEMMA $\Rightarrow$ HINDMAN

Prendo $\mathcal{U}$ idempotente: $C_i \in \mathcal{U}$ per qualche i e posso applicare il lemma.

DIMOSTRAZIONE LEMMA

$A \in \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \iff \hat{A} = \{n : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$

Sia $B = A \cap \hat{A} \in \mathcal{U}$: sostengo che $\forall b \in B$, $B - b \in \mathcal{U}$ CLAIM

Prendo ora $b_1 \in B$, $b_2 > b_1$, $b_2 \in B \cap (B - b_1)$ (noto che $b_1, b_2, b_1 + b_2 \in B$),

$b_3 > b_2$, $b_3 \in B \cap (B - b_1) \cap (B - b_2) \cap (B - (b_1 + b_2)) \Rightarrow$ ok per b_1, b_2, b_3.

Reitero e ottengo $X = \{b_1 < \ldots\}$ con tutte somme finite in $B \subseteq A$.

DIMOSTRAZIONE CLAIM

$b \in B \Rightarrow b \in \hat{A} \Rightarrow A - b \in \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \Rightarrow \widehat{A - b} \in \mathcal{U} \Rightarrow \hat{A} - b \in \mathcal{U}$

Allora $B - b = (\hat{A} \cap A) - b = (A - b) \cap (\hat{A} - b) \in \mathcal{U}$.

Resta da provare che $\exists$ ultraf. idempotenti.

DIMOSTRAZIONE ∃ IDEMPOTENTI

TEOREMA DI ELLIS

Se $(X,*)$ é semigr. top. cpt destro di Hausdorff, X ha idempotenti.

<u>OSS</u>: abbiamo già provato che $\beta\mathbb{N}$ soddisfa le hp.

<u>DEF</u>: un semigr. top. dx ha propr. associativa + $\psi_y : x \mapsto x*y$ cont.

ex $\Theta_{\mathcal{U}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ non é continua.

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{C} = \{C \subseteq X : C$ chiuso, non vuoto, $C*C \subseteq C\} \neq \emptyset$ perché $X \in \mathcal{C}$.

Se $\{C_i\}_{i\in I}$ é catena in $\mathcal{C}$, $\tilde{C} = \bigcap C_i$ é el. minorante in $(\mathcal{C}, \subseteq)$:

per hp $\{C_i\}$ ha la FIP e per cpt $\bigcap C_i \neq \emptyset$, $\tilde{C}$ é chiuso e

$\tilde{C} * \tilde{C} \subseteq \tilde{C}$. Applichiamo Zorn: $\exists C \in \mathcal{C}$ minimale per $\subseteq$.

Mostriamo che $C = \{x\}$, da cui la tesi: prendiamo $x \in C$ e cons.

$C*x$: 1) É chiuso perché $C*x = \psi_x(C)$ che é cpt, dunque chiuso.

2) $(C*x)*(C*x) \subseteq C*(C*x) \subseteq (C*C)*x \subseteq C*x$

Per minimalità C, $C*x = C$. In part., $D = \{y \in C : y*x = x\} \neq \emptyset$:

$D = \psi_x^{-1}(\{x\})$ é chiuso, $D*D \subseteq D$ perché se $y, y' \in D$,

$y*y' \in D \Longleftrightarrow (y*y')*x = y*(y'*x) = y*x = x \in D$ OK.

Per min., $D = C$ e $x*x = x \Rightarrow C = \{x\}$.

<u>OSS</u>: per noi $0 \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ l'ultr. idemp. non é principale.

ex $\oplus$ estende la usuale somma: $\mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}_m = \mathcal{U}_{n+m}$

ex *Il centro di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ é formato solo da ultr. principali.

ex $A \in \mathcal{U}, B \in \mathcal{V} \Rightarrow A+B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

ex 1) $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \Rightarrow \forall K \;\; K\cdot\mathbb{N} = \{Kn : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{U}$

2)

GENERALIZZAZIONE HINDMAN

DEF: $A \subseteq \mathbb{N}$ é additiv. grande (A-large) se $\exists X$ infinito t.c. $FS(X) \subseteq A$

TEOREMA (HINDMAN FORTE)

Se $A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ é A-large, allora C_i é A-large

DIMOSTRAZIONE

Prendo $X = \{x_1 < \ldots\}$ inf. t.c. $FS(X) \subseteq A$, $Y_k = FS(\{x_j\}_{j \geq k})$.

Sia $K := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Theta_{Y_k}$: vogliamo provare che é cpt Haus chiuso x somme, per applico Ellis.

1) K chiuso $\neq \emptyset$: é $\bigcap$ chiusi con la FIP in spazio cpt, oppure dico che Y_k hanno la FIP.

2) $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in K \Rightarrow \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in K$.

LEMMA: $FS(Z) \in \mathcal{U}$, $FS\{z_i : i \geq k\} \in \mathcal{V}$ $\forall k \Rightarrow FS(Z) \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$

DIMOSTRAZIONE

$FS(Z) \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n : FS(Z) - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$

Dico che $FS(Z) \subseteq \{n : FS(Z) - n \in \mathcal{V}\}$. Infatti, se $n = z_{i_1} + \ldots + z_{i_k}$,

$FS(\{z_j\}_{j > i_k}) \subseteq FS(Z) - n \Rightarrow FS(Z) - n \in \mathcal{V}$ per hp su $\mathcal{V}$.

Segue 2: fissato k, si applichi il lemma con $Z = Y_k$.

Allora $(K, \oplus)$ é semigr. top. dx cpt Haus $\Rightarrow$ per Ellis $\exists \mathcal{U}$ idempotente. Prendo i t.c. $C_i \in \mathcal{U}$ ($A \in \mathcal{U}$ perché $FS(\{x_i\}) \in \mathcal{U}$).

$\Rightarrow C_i$ é A-grande.

OSS: abbiamo provato che $\forall A$ A-large, $\exists \mathcal{U}$ idempotente con $A \in \mathcal{U}$.

ESERCIZI

(ex) I clopen di $\beta\mathbb{N}$ sono tutti e soli Θ_A

SOLUZIONE

$C = \Theta_A \Rightarrow C$ clopen (ovvio).

Se C è clopen, dato che C è aperto, $C = \bigcup_{i\in I} \Theta_{A_i} \overset{\text{cpt}}{\supseteq} \bigcup_{i\leq k} \Theta_{A_i} = \Theta_{A_1 \cup \dots \cup A_k}$.

(ex) U aperto $\Rightarrow \overline{U} = \Theta_{U\cap\mathbb{N}}$

SOLUZIONE

Chiuso: ovvio, $U \subseteq \Theta_{U\cap\mathbb{N}}$ perché se $\mathcal{U} \in U$, $U = \bigcup \Theta_{A_i} \Rightarrow \mathcal{U} \in \Theta_{A_i} \Rightarrow$ $A_i \in \mathcal{U}$. Proviamo che $A_i \subseteq U\cap\mathbb{N}$: $n \in A_i \Rightarrow A_i \in \mathcal{U}_n \Rightarrow n \in U\cap\mathbb{N}$.

Resta da provare che $C \supseteq U \Rightarrow C \supseteq \Theta_{U\cap\mathbb{N}}$. Ma $C = \bigcap_{j\in J} \Theta_{B_j}$: proviamo che $\forall j$ $\Theta_{U\cap\mathbb{N}} \subseteq \Theta_{B_j}$, cioè $U\cap\mathbb{N} \subseteq B_j$.

Per assurdo $n \in (U\cap\mathbb{N}) - B_j$, $\mathcal{U}_n \in U - B_j \Rightarrow \mathcal{U}_n \notin C$ assurdo.

(ex) $U \in I(\mathcal{U}) \Rightarrow U\cap\mathbb{N} \in \mathcal{U}$, ma non vale il viceversa.

SOLUZIONE

$\mathcal{U} \in U \subseteq \Theta_{U\cap\mathbb{N}} \Rightarrow U\cap\mathbb{N} \in \mathcal{U}$.

Per il vic., $\mathcal{U}$ ultr. non princ., $\mathcal{U}\cap\mathbb{N} = \mathbb{N}$ ...

P-POINT

Sono equivalenti:

1) $\mathcal{U}$ è P-point in $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$ ($\{\Theta_{B_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ fam. intorni $\Rightarrow \bigcap \Theta_{B_i}$ intorno)
2) $\forall \mathbb{N} = \bigcup A_k$, $A_k \notin \mathcal{U}$ $\exists X \in \mathcal{U}$: $|X \cap A_k| < \infty$.
3) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-q.o. costante o $f \equiv_{\mathcal{U}} g$ con $|g^{-1}(a)| < \infty$ $\forall a$.

SOLUZIONE

$\boxed{2 \Leftrightarrow 3}$ Come nei selettivi.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $\mathbb{N} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup \ldots$, $\mathbb{N} - A_i \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \in \bigcap \Theta_{\mathbb{N}-A_i}$. Per propr. P-point $\exists B \in \mathcal{U}$ t.c. $\mathcal{U} \in \Theta_B \subseteq \bigcap_i \Theta_{\mathbb{N}-A_i}$.

Se $B \cap A_i$ fosse ∞, $\exists \mathcal{V}$ ultr. non pr. con $B \cap A_i \in \mathcal{V} \Rightarrow A_i \in \mathcal{V}$, $B \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathbb{N} - A_i \in \mathcal{V}$.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Siano Θ_{B_i} intorni di $\mathcal{U}$, e supp. $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ WLOG per propr. int. finite. Sia f t.c. $f(B_{i-1} - B_i) = i$. Se $\bigcap B_i \in \mathcal{U}$, ho già la tesi, altr. posso mod. f su $\bigcap B_i$ senza fare nulla.

Se f fosse $\mathcal{U}$-q.o. costante, $f(\overset{\mathcal{U}}{B}) = i \Rightarrow B \cap B_i = \emptyset \Rightarrow \perp B_i \in \mathcal{U}$.

Allora $f \equiv_{\mathcal{U}} g$, g finite-to-one: sia B l'ins. su cui $f = g$.

Dimostr. che Θ_B sodd. 1: $B \in \mathcal{U}$ in modo ovvio.

Inoltre, $B \in \mathcal{V} \Rightarrow B_i \in \mathcal{V}\ \forall i$: per ass. $B_i^c \in \mathcal{V} \Rightarrow B \cap B_i^c \in \mathcal{V}$.

Ma $B \cap B_i^c \subseteq g^{-1}([0, i-1])$ che è finito $\perp$.

(ex) Propr. Ramsey per ultr. selettivi: $[\mathbb{N}]^2 = \bigsqcup_{k=1}^{n} C_k$, $\mathcal{U}$ selettivo $\Rightarrow \exists X \in \mathcal{U} : [X]^2 \subseteq C_i$

SOLUZIONE

Vediamo prima il viceversa: se $\mathcal{U}$ ha propr. Ramsey, coloro le coppie $\{i, j\}$, $i < j$ con colore C_1 se $f(i) \leq f(j)$, con C_2 se $f(i) > f(j)$.

~~Dato che le funz. non può essere decr. su un ∞~~ $f \equiv_{\mathcal{U}} g$ ~~con g non de~~

Sgonfino(?)

<u>LEMMA</u>: $\mathcal{U}$ selettivo, $A_k \in \mathcal{U}$, $A_1 \supseteq \dots$, allora $\exists X = \{x_1 < x_2 \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ t.c. $x_1 \in A_1$, $x_{k+1} \in A_{x_k}$, $X \in \mathcal{U}$

LEMMA $\Rightarrow$ RAMSEY

Prendiamo colorazione $[X]^2 = C_1 \sqcup C_2$; $\mathbb{N} - \{1\} = \{y : (1,y) \in C_1\} \cup \{y : (1,y) \in C_2\}$: uno dei due insiemi è in $\mathcal{U}$: sia A_1 tale ins., z_1 = colore scelto.

Ora, $A_1 - \{2\} = \{y : \{2,y\} \in C_1\} \cup \{y : \{2,y\} \in C_2\}$. trovo A_2 come l'! dei due che sta nell'ultra. Reiterando, si ottiene la tesi, usando il lemma sugli A_i.

DIMOSTRAZIONE LEMMA

Posso supporre $\bigcap A_k \notin \mathcal{U}$, altrimenti prendo lui. Allora supponiamo anche $\bigcap A_k = \emptyset$ (a meno di togliere $\bigcap A_k$ da ogni A_k.

Definiamo $f(i) := \max\{k : i \in A_k\}$. Usando hp selettivo, $\exists S$ t.c. $f|_S$ è str. cresc. (se $f|_S = \text{cost}$, $A_{k+1}^c \supseteq f^{-1}(k)$ assurdo.

Ordiniamo $S = \{y_1 < \dots\}$: $y_k \in A_{y_j}$ se $f(y_k) > y_j$. Costruisco $z_1 := y_1$, $z_{i+1} = \min\{y_k > z_i : f(y_k) \geq z_i\}$. Presi questi z_i, per selettività $\exists$ $w_k \in (z_k, z_{k+1}]$, $\{w_k\} \in \mathcal{U}$, $w_k \in S$

Spezzo $\{w_k\}$ in $\{w_{2k}\}$ e $\{w_{2k+1}\}$: uno dei due è in $\mathcal{U}$ e verifica le condizioni richieste: $f(w_{2k+2}) \geq f(z_{2k+2}) \geq z_{2k+1} \geq w_{2k}$

ex Sono equivalenti: 20/10

1) $\exists\, \mathcal{W} : \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{U}$

2) $\forall A \in \mathcal{U}\ \exists n : A - n \in \mathcal{U}$

ex Sono equivalenti:

1) $\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$

2) $\forall A \in \mathcal{U}\ \exists a \in A : A - a \in \mathcal{U}$.

ex * Sono: 1) Hindman

2) Hindman forte

3) $\mathrm{Fin}(\mathbb{N}) = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$. Allora $\exists\, \mathcal{F} = \{F_1 < F_2 < \dots\} \subseteq \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ con $F_i < F_{i+1}$ che significa $\max F_i < \min F_{i+1}$ t.c. $\exists i$ t.c. $FU(\mathcal{F}) = \{F_{n_1} \cup \dots \cup F_{n_k} : n_1 < \dots < n_k\} \subseteq C_i$

HINT: $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$.

ULTRAFILTRI DI HINDMAN

DEF: $\mathcal{H} = \{\mathcal{U} : \forall A \in \mathcal{U}, A$ é add. grande$\}$ (ultr. di Hindman).

OSS: il teorema di Glazer dice $\mathrm{Idem} \subseteq \mathcal{H}$

PROP: $\mathcal{H}$ é chiuso in $\beta\mathbb{N}$ (topol.)

DIMOSTRAZIONE

$\mathcal{V} \notin \mathcal{H} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{V}$ non add grande $\Rightarrow \mathcal{O}_A \cap \mathcal{H} = \emptyset$

COR: $\overline{\mathrm{Idem}} \subseteq \mathcal{H}$

PROP: $\overline{\mathrm{Idem}} = \mathcal{H}$

DIMOSTRAZIONE

Sia $\mathcal{U} \in \mathcal{H}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$: A é A-large, quindi $\exists\, \mathcal{V}$ idem, $\mathcal{V} \ni A$ (vedi dim. Hindman forte). Allora $\mathcal{V} \in \mathrm{Idem} \cap \mathcal{O}_A$ TESI.

ex ** (anche arg x seminario): esistono ultr. di Hindman non idempot.

ex ** $\mathcal{H}$ non é chiuso per somme

STRUTTURA MOLTIPLICATIVA $\beta\mathbb{N}$

DEF: $A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V} \iff \{n : A/_n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ con $A/_n = \{m : mn \in A\}$.

OSS: $\mathcal{U} \odot \mathcal{V} = P_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$ dove $P(n,m) = nm$

OSS: è associativa

OSS: $\varphi_{\mathcal{V}} : \mathcal{U} \longmapsto \mathcal{U} \odot \mathcal{V}$ è cont. $\forall \mathcal{V}$

COR: $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ è semigr. top. dx (cpt).

COR: Ellis dimostra che esistono $\mathcal{U} = \mathcal{U} \odot \mathcal{U}$

Come nel caso additivo, $\mathcal{U} = \mathcal{U} \odot \mathcal{U} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{U}\ \exists X$ infinito t.c.

$FP(X) = \{\prod F : \emptyset \neq F \subseteq X \text{ finito}\} \subseteq A$

TEOREMA (HINDMAN MOLT)

$\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \Rightarrow \exists i, \exists X$ inf. con $FP(X) \subseteq C_i$

OSS: si può dim. che ZF + tutti ass. dei costr. $\vdash \varphi \Rightarrow ZF \vdash \varphi$ per alcuni tipi di φ, tra cui l'enunciato di Hindman.

(ex) Dimostrare Hindman molt. forte

(ex) ** $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \odot \mathcal{U} \iff \mathcal{U} = \sqcup_2$

Il teo Schur dice che $x + y = z$ ha sol. in ogni col. di $\mathbb{N}$.

Si può dim. che ciò vale $\forall$ eq. diof. lin. con somme di alcuni coeff. nulle.

(ex) * $\mathcal{U}$ idempot, $2\mathcal{U} = \sqcup_2 \odot \mathcal{U}$, $A \in 2\mathcal{U} \iff A/_2 \in \mathcal{U}$.

Se $A \in \mathcal{V} = (2\mathcal{U}) \oplus \mathcal{U}$, $\exists a, a+d, a+2d \in A$

(ex) Dimostrare VdW lungo 3 in modo elem.

TEOREMA HINDMAN ADD-MOLT

$\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r\ \exists i, X, Y$ infiniti t.c. $FS(X), FP(Y) \subseteq C_i$

ATTENZIONE: non si richiede $X = Y$ (è probl. aperto se $\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$

t.c. $\exists a,b,c$, $\exists i$ t.c. $a,b,c,a+b,a+c,b+c,ab,bc,ac \in C_i$

<u>FATTO</u>: $\forall$ col. fin. di $\mathbb{N}$ $\exists$ $a,b,a+b,ab$ dello stesso colore.

DIMOSTRAZIONE HINDMAN

$\mathcal{H}$ é un "ideale moltiplicativo sinistro", cioé $\forall \mathcal{V}\in\mathcal{H}$ $\forall \mathcal{U}$ $\mathcal{U}\odot\mathcal{V}\in\mathcal{H}$ $(\beta\mathbb{N}\odot\mathcal{H}\subseteq\mathcal{H})$

(ex) ** $\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}\oplus\mathcal{U}=\mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}=\mathcal{U}$

Infatti, se $A\in\mathcal{U}\odot\mathcal{V}$, $\{n : A/_n \in\mathcal{V}\}\in\mathcal{U}$.

Prendo k t.c. $A/_k\in\mathcal{V}\in\mathcal{H} \Rightarrow \exists X$ infinito con $FS(X)\subseteq A/_k$
$\Rightarrow FS(kX)\subseteq A$ con $kX=\{kx : x\in X\}$.

Allora $(\mathcal{H},\odot)$ é semigr. top. dx, dunque $\mathcal{H}$ é a.c. rispetto a $\odot$.

Per Ellis, $\exists\mathcal{V}\in\mathcal{H}$ idempotente $(\mathcal{V}\odot\mathcal{V}=\mathcal{V})$.

Preso $\mathbb{N}=C_1\sqcup\ldots\sqcup C_r \Rightarrow \exists i$ t.c. $C_i\in\mathcal{V}$ siccome $\mathcal{V}=\mathcal{V}\odot\mathcal{V}$,
$\exists Y$ inf. t.c. $FP(Y)\subseteq C_i$, siccome $\mathcal{H}\ni\mathcal{V}\ni C_i$, C_i é add. grande.

TEOREMA DI VAN DER WAERDEN 31/10

$\forall\, \mathbb{N}=C_1\sqcup\ldots\sqcup C_r$ $\exists i$ t.c. C_i é AP-rich, cioé contiene pr. ar. arbitrariamente lunghe.

Cerchiamo ultra $\mathcal{U}$ t.c. $\forall A\in\mathcal{U}$ A é AP-rich.

<u>DEF</u>: I é ideale sinistro in $(X,*)$ se $X*I\subseteq I$, cioé se $\forall x\in X$, $\forall i\in I$, $x*i\in I$

(es) $\mathcal{H}=\{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ di Hindman$\}$ é ideale sinistro in $\beta\mathbb{N},\odot$

<u>OSS</u>: $\forall x\in X$, $I*x=\{y*x : y\in I\}$ é ideale sinistro.

<u>PROP</u>: sia I ideale sx. Allora tfae:
1) I minimale
2) $\forall x\in I$ $X*x=I$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $X * x$ é ideale $\subseteq I \Rightarrow$ é minimale

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Sia $J \subsetneq I$: $\forall j \in J$, $X * j \subseteq J \subsetneq I$ assurdo.

NOTA BENE: non vale in generale $y \in X * y$.

COR: I ideale sx minimale $\Rightarrow I$ cpt

DIMOSTRAZIONE

$I = X * x \ \forall x \in I \Rightarrow I$ é imm. di cpt secondo funz cont.

PROP: $\forall J$ ideale sinistro $\exists I \subseteq J$ ideale sx minimale

DIMOSTRAZIONE

Considero $\mathcal{I} = \{I \subseteq J ; I \neq \emptyset$ é ideale sx chiuso$\}$.

$\mathcal{I} \neq \emptyset$: $X * j \in \mathcal{I} \ \forall j \in J$, in $(\mathcal{I}, \supseteq)$ ogni catena disc. ha minorante l'$\bigcap$ che é $\neq \emptyset$ perché ogni el. catena é cpt. Inoltre, $\bigcap$ ideali sx é ideale sx. Applico Zorn $\Rightarrow$ vittoria!

PROP: I ideale minimale. Allora J é minimale sx $\exists x$ t.c. $J = I * x$

DIMOSTRAZIONE

$\boxed{\Rightarrow}$ Sia $x \in J$; $I * x$ é ideale $\subseteq J \Rightarrow I * x = J$

$\boxed{\Leftarrow}$ Devo vedere che $I * x$ é minimale. Supp $L \subseteq I * x$: considero $\Gamma = \{y \in I ; y * x \in L\} \neq \emptyset$: Γ é id. sx perché se $y \in I, \forall z$
$z * y \in \Gamma \Leftrightarrow z * y * x \in L$, ok perché $y * x \in L$.

Per min. $\Gamma = I \Rightarrow I * x \subseteq L$.

PROP: se I é id. sx min, J bilatero $\Rightarrow I \subseteq J$.

DIMOSTRAZIONE

$I \cap J \subseteq I$; é id. sx se é $\neq \emptyset$. Proviamo $I \cap J \neq \emptyset$: così $I \cap J = I \Rightarrow I \subseteq J$.
Ma $J * I \subseteq I \cap J \Rightarrow$ tesi.

Sia $y \in J$, $x \in I$: $y * x \in I$ perché I id. sx, $y * x \in J$ perché J ideale dx.

<u>PROP</u>: $\exists K$, il più piccolo ideale bilatero, precisamente $K = \bigcup_{I \text{ sx min}} I$.

DIMOSTRAZIONE

Vediamo che K è ideale bilatero: è sx perché $\bigcup$ id. sx., è dx perché se $x \in K$, y qualunque, $x * y \in K$. Ma se $x \in I$ minimale, $I * y$ è minimale $\Rightarrow x * y \in I * y \subseteq K$.

(ex) $* K(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ non è chiuso.

(ex) 1) Esistono ultra idemp. minimali, cioè $\mathcal{U} \in K, \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$

2) Sia $\mathcal{U}$ min. Allora $K = \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U} \oplus \beta\mathbb{N}$, cioè tutti e soli i minimali hanno la forma $\mathcal{W} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$

TEOREMA

$\forall \mathcal{U} \in K(\beta\mathbb{N}, \oplus), \forall A \in \mathcal{U}$, A è AP-rich.

DIMOSTRAZIONE

Se $A \in \mathcal{U}$, fisso k e cerco progr. ar. lunga k.

Considero $(\beta\mathbb{N})^k$ prodotto top.: è gr. top. dx. con $\vec{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k)$, $\vec{\mathcal{V}} = (\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k) \Rightarrow \vec{\mathcal{U}} \oplus_k \vec{\mathcal{V}} := (\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{U}_k \oplus \mathcal{V}_k)$. (ex) Verifiche.

La tesi dice che se $\mathcal{V} \in K$, allora $\mathcal{V}^k = (\mathcal{V} \ldots \mathcal{V}) \in \overline{AP_k}$, dove $AP_k = \{(a, a+d, \ldots, a+(k-1)d) : a \in \mathbb{N}_0, d \geq 1\}$ (con $\mathbb{N}_0$ denoto $\mathbb{N} \cup \{0\}$), $AP_k \subseteq \mathbb{N}^k \subseteq \beta\mathbb{N}^k$

Infatti, se $A \in \mathcal{V}$, $\mathcal{V}^k = (\mathcal{V}, \ldots, \mathcal{V}) \in \mathcal{O}_A \times \ldots \times \mathcal{O}_A \Rightarrow \mathcal{O}_A \times \ldots \times \mathcal{O}_A \cap AP_k \neq \emptyset$

Viceversa, $\exists a, \exists \lambda \geq 1$ $(\mathcal{U}_a, \ldots, \mathcal{U}_{a+(k-1)d}) \in \mathcal{O}_A \times \ldots \times \mathcal{O}_A$ sse $a \ldots a+(k-1)d \in A$.

(ex) Ogni ultra $\mathcal{U}$ verifica $\mathcal{U}^* = (\mathcal{U}, \ldots, \mathcal{U}) \in \overline{\Delta}$, $\Delta = \{(a \ldots a) : a \in \mathbb{N}\}$

Sia $E := \{(a, a+d, \ldots, a+(k-1)d) : a, d \in \mathbb{N}_0\} \supseteq \Delta$. Consideriamo lo spazio $\overline{E}$ e il suo sottosp. $\overline{AP_k}$.

(ex) $\overline{E}$ è un sottosemigruppo di $((\beta\mathbb{N}_0)^k, \oplus_k)$.

(ex) $\overline{AP_k}$ è un ideale bilatero di $\overline{E}$

$\mathcal{V}^k = (\mathcal{V} \ldots \mathcal{V}) \in \overline{\Delta} \subseteq \overline{E}$. Proviamo che $\mathcal{V}^k$ è minimale in $\overline{E}$, poi segue la tesi perché $\mathcal{V}^k$ min $\Rightarrow \mathcal{V}^k \in$ ogni id. bilatero $\Rightarrow \mathcal{V}^k \in \overline{AP_k}$, che è la tesi.

Vediamo la min considero l'ideale $\overline{E} \oplus_k \mathcal{V}^k$. Esiste $\tilde{I} \subseteq \overline{E} \oplus_k \mathcal{V}^k$ ideale sx min. Prendo $\vec{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}_1 \ldots \mathcal{U}_k) \in \tilde{I}$ idempot.

Allora $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{W}} \oplus_k \mathcal{V}^k$: I min $\Rightarrow \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U} = I \Rightarrow \mathcal{U}_i = \mathcal{W}_i \oplus \mathcal{V} \in I$

Ma $\mathcal{U}_i \in I \Rightarrow \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U}_i = I$ Dunque $\mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{U}_i = \mathcal{V}$ per qualche $\mathcal{Z}_i$, da cui $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}_i = (\mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{U}_i) \oplus \mathcal{U}_i = \mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{U}_i = \mathcal{V}$, da cui $\mathcal{V}^k \oplus \vec{\mathcal{U}} = \mathcal{V}^k$.

Ma $\mathcal{U} \in \tilde{I}$ ideale sx min, da cui $\mathcal{V}^k \in \tilde{I}$ e $\mathcal{V}^k$ è min.

(ex) Dimostrare VdW senza ultrafiltri (anche caso 3 e basta).

TEOREMA * (BERGDSON-HINDMAN).

$\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \; \exists i$ t.c. C_i contiene pr. ar. e pr. geom. arb. lunghe.

(ex) * dimostr.

(ex) Trovare un ins add. grande che NON include nemmeno 3-AP.

U26

Capitolo 1

L'analisi non standard

Nell'analisi infinitesimale contemporanea, i numeri infinitesimi non esistono. Storicamente non sempre è stato così. Prima della ricerca fondazionale che portò alla attuale formalizzazione del concetto di numero reale alla fine del XIX secolo, l'uso diretto di quantità infinitesime è stato pratica comune per secoli. Anzi, fu proprio grazie alla manipolazione di quelle "quantità evanescenti" che vennero scoperti molti teoremi fondamentali dell'analisi.
Recentemente, all'inizio degli anni Sessanta, il logico matematico Abraham Robinson ha introdotto l'analisi nonstandard. Facendo uso della teoria dei modelli, Robinson è riuscito a porre su basi rigorose l'uso dei numeri infinitesimi, dando così una possibile soluzione ad un problema storico. L'analisi nonstandard ha interessanti conseguenze in diversi ambiti. Essa consente di rileggere sotto una nuova prospettiva alcuni aspetti della storia del calcolo, spesso presentati assumendo come necessariamente contraddittorio l'uso delle quantità infinitesime. Nella ricerca, i metodi nonstandard sono stati usati in diverse aree della matematica pura e applicata, portando ad interessanti risultati.

1.1 Costruzione delle ultrapotenze

La costruzione dei numeri iperreali che daremo qui è fatta grazie agli ultrafiltri e mediante una costruzione fondamentale in quest'ambito: l'ultrapotenza.

Consideriamo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$, ossia l'insieme delle successioni reali e costruiamo il quoziente

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{Fr},$$

dove $\mathfrak{Fr}$ è il filtro di Frechet su $\mathbb{N}$. Per definizione di equivalenza secondo un filtro si ha $\sigma \equiv_{\mathfrak{Fr}} \tau$ se e solo se $\{n \mid \sigma(n) = \tau(n)\} \in \mathfrak{Fr}$, ossia se e solo se

$$\exists k \text{ t.c. } \forall n \geq k \;\; \sigma(n) = \tau(n).$$

Si può dimostrare che tale insieme, con le operazioni di somma e prodotto definiti in modo naturale, è un anello commutativo parzialmente ordinato dalla relazione

$$[\sigma] \leq [\tau] \Leftrightarrow \{n \mid \sigma(n) \leq \tau(n)\} \in \mathfrak{Fr}.$$

Putroppo questo anello non ha delle "buone proprietà", ad esempio vale il seguente:

Lemma 1.1. *L'anello $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathfrak{Fr}$ non è un dominio di integrità.*

Dimostrazione. Supponiamo che $[\sigma][\tau] = 0$, allora dobbiamo far vedere che in generale questo non implica che $[\sigma] = 0$ o $[\tau] = 0$. Prendiamo come σ e τ le funzioni caratteristiche dei pari e dei dispari rispettivamente. Allora per queste successioni $\{n \mid \sigma(n)\tau(n) = 0\} = \mathbb{N} \in \mathfrak{Fr}$, ossia $[\sigma][\tau] = 0$; però

$$\{n \mid \sigma(n) = 0\} \notin \mathfrak{Fr} \quad \text{e} \quad \{n \mid \tau(n) = 0\} \notin \mathfrak{Fr}.$$

Questo vuol dire che né $[\sigma] = 0$ né $[\tau] = 0$. □

La costruzione appena effettuata non è quella che effettivamente vogliamo; in effetti ciò dipende dall'aver effettuato il quoziente per un filtro. Se al posto di un filtro si utilizza un ultrafiltro la costruzione invece si arricchisce:

Definizione 1.2. Chiamiamo *ultrapotenza* di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ il quoziente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ per un certo ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Teorema 1.3. *L'ultrapotenza $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ è un campo ordinato.*

Dimostrazione. Il fatto che ogni elemento non nullo possegga un inverso rispetto alla moltiplicazione è molto semplice da vedere ed è lasciato per esercizio. Occupiamoci invece dell'ordine sul campo: ricordiamo che un campo $\mathbb{F}$ è ordinato se e solo se esiste $\mathbb{F}^+ \subseteq \mathbb{F}$ tale che è chiuso per somma e per prodotto e tale che $\mathbb{F} = \mathbb{F}^+ \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{F}^-$, dove $\mathbb{F}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{F}^+\}$. Nel nostro caso definiamo $\star\mathbb{R}^+ = \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+\}$. Il fatto che tale insieme è chiuso per somma e per prodotto è immediato, come è immediato vedere che gli insiemi $^*\mathbb{R}^+$, $\{[0]\}$ e $^*\mathbb{R}^-$ sono a due a due disgiunti. L'ultima cosa che resta da vedere è che ogni $[\sigma] \in {}^*\mathbb{R}$ sta in uno dei tre sottoinsiemi definiti. Data $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ consideriamo la partizione $\mathbb{N} = A_\sigma \sqcup B_\sigma \sqcup C_\sigma$, dove

$$A_\sigma = \{n \mid \sigma(n) > 0\}, \ B_\sigma = \{n \mid \sigma(n) = 0\}, \ C_\sigma = \{n \mid \sigma(n) < 0\}.$$

Per le proprietà di ultrafiltro uno (e uno solo) dei tre insiemi sta in $\mathcal{U}$, e a seconda di quale esso sia avremo rispettivamente che $[\sigma]$ sta in $^*\mathbb{R}^+$, $\{[0]\}$ o in $^*\mathbb{R}^-$. □

U27

Per ogni numero reale $r \in \mathbb{R}$ idetifichiamo r con $[c_r]$, dove c_r è la successione costante ad r. Dunque possiamo immergere $\mathbb{R}$ in modo canonico in $^*\mathbb{R}$ con la mappa

$$r \mapsto [c_r].$$

Dunque $^*\mathbb{R}$ può essere considerato un sovracampo ordinato di $\mathbb{R}$.

Lemma 1.4. *L'ultrafiltro $\mathcal{U}$ è principale se e solo se $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} = \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Per ipotesi abbiamo che $\mathcal{U} = \mathfrak{U}_a$, e allora $\sigma \equiv_{\mathfrak{U}_a} c_{\sigma(a)}$ in quanto l'insieme $\{n \mid \sigma(n) = c_{\sigma(a)}\} \supseteq \{a\} \in \mathcal{U}$.
($\Longleftarrow$) Supponiamo $\mathcal{U}$ non principale e consideriamo un elemento $A \in \mathcal{U}$. Definiamo la successione $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come

$$\sigma(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \in A \\ 0 & \text{se } n \notin A \end{cases}.$$

Ovviamente $\sigma \not\equiv_{\mathcal{U}} c_0$ in quanto $\{n \mid \sigma(n) = 0\} = A^C \notin \mathcal{U}$ perché $\mathcal{U}$ è un filtro e $A \in \mathcal{U}$. Del resto per ogni $k \neq 0$ si ha anche $\sigma \not\equiv_{\mathcal{U}} c_k$, in quanto se $k-1 \in A$ allora $\{n \mid \sigma(n) = k\} = \{k-1\} \notin \mathcal{U}$ in quanto $\mathcal{U}$ non è principale, mentre se $k-1 \notin A$ allora $\{n \mid \sigma(n) = k\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$ perché $\mathcal{U}$ è un filtro. □

Il lemma precedente, dunque, ci dice che quando costruiamo l'ultrapotenza $^*\mathbb{R}$ con un ultrafiltro non principale otteniamo un sovracampo ordinato di $\mathbb{R}$ che è proprio. Queste costruzioni sono molto importanti e meritano una definizione:

Definizione 1.5. Chiamiamo *campo superreale* un qualsiasi sovracampo ordinato proprio di $\mathbb{R}$.

Così ogni ultrapotenza $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ con $\mathcal{U}$ non principale risulta essere un campo superreale, che chiameremo campo dei *numeri iperreali*.

1.2 Campi superreali, archimedeità e completezza

In questo paragrafo lavoreremo genericamente con un campo ordinato $\mathbb{F}$ qualsiasi. Diamo alcune definizioni importanti:

Definizione 1.6. Un campo ordinato $\mathbb{F}$ si dice *archimedeo* se per ogni $x, y \in \mathbb{F}$ con $0 < x < y$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \cdot n > y$.[1]

Definizione 1.7. Un campo ordinato $\mathbb{F}$ si dice *completo* se ogni suo sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente ammette un estremo superiore.

[1] osserviamo da un punto di vista logico che la formula scritta non è una formula del linguaggio dei campi, perché in tale linguaggio il simbolo "$\mathbb{N}$" non c'è.

Definizione 1.8. Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Un elemento $a \in \mathbb{F}$ è detto
(1) *infinitesimo* se $|a| < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
(2) *infinito* se il suo inverso è infinitesimo;
(3) *finito* se non è infinito.[2]

Osservazione 1.9. Vale banalmente che 0 è un numero infinitesimo in ogni campo ordinato $\mathbb{F}$.

Innanzitutto non è detto che elementi con le proprietà (1) (apparte lo 0) o (2) della precedente definizione esistano. Anzi, vediamo subito che se un campo ordinato possiede la proprietà di Archimede allora non ci sono altri infinitesimi oltre allo 0 (e dunque non ci sono neanche infiniti):

Proposizione 1.10. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*
(1) *$\mathbb{F}$ è archimedeo;*
(2) *l'unico numero infinitesimo di $\mathbb{F}$ è 0;*
(3) *$\mathbb{N}$ è illimitato in $\mathbb{F}$;*
(4) *$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{F}$.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Supponiamo per assurdo che esista un elemento $\varepsilon \neq 0$ infinitesimo. Senza perdere di generalità possiamo supporre $\varepsilon > 0$ e infinitesimo. Ciò significa che $\varepsilon < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo un certo $n \in \mathbb{N}$: per l'ipotesi (1) esiste un m tale che

$$m\varepsilon > \frac{1}{n},$$

e allora $\varepsilon > \frac{1}{mn}$, assurdo perché ε è infinitesimo.
((2) $\Longrightarrow$ (3)) Dobbiamo mostrare che per ogni $x \in \mathbb{F}$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Se $x \leq 0$ allora abbiamo concluso in quanto $n = 1$ dà la tesi. Se invece $x > 0$ allora $x^{-1} \in \mathbb{F}$ e dunque per la proprietà (2) non può essere infinitesemo: esiste così un n tale che

$$x^{-1} > \frac{1}{n},$$

ovvero tale che $n > x$.
((3) $\Longrightarrow$ (1)) Prendiamo $x > y > 0$ in $\mathbb{F}$ e prendiamo n tale che $n > \frac{x}{y}$ dato dalla (3). Allora

$$ny > \frac{x}{y} \cdot y = x.$$

[2] non abbiamo definito una funzione valore assoluto su $\mathbb{F}$, ma con la scrittura $|a| < \frac{1}{n}$ stiamo abbreviando la scrittura $-\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$, che invece ha perfettamente senso.

V28

((3) $\Longrightarrow$ (4)) Dobbiamo mostrare che per ogni $x > y$ in $\mathcal{F}$ esiste un razionale q tale che $y < q < x$. Se $x - y \geq 1$ allora la tesi si ha facilmente.[3] Supponiamo dunque $x - y < 1$, allora per la proprietà di Archimede (che tanto è equivalente alla (3)) esiste n tale che

$$n(x-y) > 1. \tag{1.1}$$

Consideriamo ora l'insieme $\{k \in \mathbb{N} \mid k > ny\} \subseteq \mathbb{N}$: questo insieme è non vuoto per la proprietà (3) e dunque ammette un minimo m. Tale minimo soddisfa dunque

$$m - 1 \leq ny < m. \tag{1.2}$$

Combinando le due equazioni si ha

$$y \overset{(2)}{<} \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \overset{(2)}{\leq} y + \frac{1}{n} \overset{(1)}{<} y + (x-y) = x.$$

((4) $\Longrightarrow$ (3)) Sia $x \in \mathbb{F}$, allora per la densità di $\mathbb{Q}$ esiste un razionale $\frac{m}{n}$ tale che $x < \frac{m}{n}$. Allora $m > nx \geq x$. □

Osservazione 1.11. La proposizione precedente, essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, si può applicare anche al campo ordinato $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: pertanto esso risulta archimedeo. Ovviamente lo stesso si può dire per $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Il seguente lemma, invece, mostra il legame che c'è tra archimedeità e completezza di un campo ordinato:

Lemma 1.12. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Se $\mathbb{F}$ non è archimedeo allora $\mathbb{F}$ non è completo.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{F}$ non è archimedeo allora esistono degli infinitesimi non nulli. Sia $I = \{\varepsilon > 0 \mid \varepsilon \text{ è infinitesimo}\}$: per concludere è sufficiente dimostrare che non esiste l'estremo superiore di I. Supponiamo per assurdo che esista $\sup I$. Per definizione di infinitesimo abbiamo che l'insieme M_I dei maggioranti di I

$$M_I \supseteq A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Per definizione $\sup I = \min M_I$ e certamente il minimo di M_I non può essere un elemento di A (in quanto A non ha minimo). Pertanto $\sup I$ è esso stesso un infinitesimo $\varepsilon > 0$ e dunque $\varepsilon = \max I$. Del resto ciò è assurdo in quanto $\varepsilon + \varepsilon > \varepsilon$ ed è ancora un infinitesimo. □

[3] per esempio possiamo predere $N = \max\{n \mid n < y\}$ e si ha che $y \leq N+1 \leq N+x-y < y+x-y = x$. Se $y < N+1 < x$ abbiamo finito; altrimenti se $y = N+1$ sicuramente $y < N + \frac{3}{2} < x$.

Proposizione 1.13. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Allora $\mathbb{F}$ è archimedeo se e solo se è isomorfo ad un sottocampo di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Supponiamo che $\mathbb{F}$ sia isomorfo ad un sottocampo di $\mathbb{R}$, diciamo $\mathbb{F} \simeq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$. Ovviamente $\mathbb{K}$ è archimedeo in quanto lo è $\mathbb{R}$ e dunque $\mathbb{F}$ è esso stesso archimedeo.
($\Longrightarrow$) Se $\mathbb{F}$ è archimedeo allora ha come sottoinsieme denso $\mathbb{Q}$. Per ogni $x \in \mathbb{F}$ sia $\{q_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di razionali tale che $q_n^x - x < \frac{1}{2^n}$ per ogni n. Allora si considera l'applicazione

$$x \mapsto \lim_{n\to\infty} q_n^x,$$

e questa risulta avere le proprietà richieste. □

Proposizione 1.14. *Indichiamo con $\mathbb{F}_{finiti}$ l'insieme dei numeri finiti di $\mathbb{F}$. Allora valgono le seguenti proprietà:*
(1) *$\mathbb{F}_{finiti}$ è un sottoanello ordinato di $\mathbb{F}$;*
(2) *l'insieme I degli infinitesimi è l'unico ideale massimale di $\mathbb{F}_{finiti}$;*
(3) *$\mathbb{F}_{finiti}/I = \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. (1) La dimostrazione di questa proprietà consiste di alcune semplice verifiche, pertanto è lasciata come esercizio.
(2) Per mostrare che I è l'unico ideale massimale è sufficiente far vedere che ogni elemento $x \notin I$ è invertibile: ma questo è ovvio perché se x è finito e non infinitesimo, allora lo possiamo invertire e rimane ancora un numero finito.
(3) □

1.3 Qualche proprietà ulteriore delle ultrapotenze

In questo paragrafo $\mathbb{F}$ sarà sempre un campo superreale, salvo dove diversamente specificato. Dunque per la proposizione 1.13 tale campo non sarà archimedeo: così da un lato $\mathbb{F}$ non è neanche completo (lemma 1.12) e dall'altro in $\mathbb{F}$ troviamo infinitesimi non nulli e dunque anche numeri infiniti (i loro inversi in $\mathbb{F}$). Le ultrapotenze $^*\mathbb{R}$ fatte con ultrafiltri non principali, essendo campi superreali, verificano le proprietà appena scritte.

Definizione 1.15. Due elementi ξ e η si dicono *infinitamente vicini* se e solo se $\eta - \xi$ è infinitesimo. In tal caso scriveremo $\xi \approx \eta$.

Proposizione 1.16. *Per ogni $\xi \in \mathbb{F}$ finito esiste un unico numero reale r tale che $r \approx \xi$.*