U23

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme di numeri reali $\{s \in \mathbb{R} \mid s > \xi\}$, che è non vuoto in quanto ξ è finito. Tale insieme è inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ e dunque ha senso definire

$$r = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid s > \xi\}.$$

□

Definizione 1.17. Sia $\xi \in \mathbb{F}$ finito. L'unico numero reale infinitamente vicino a ξ si dice *parte standard* di ξ, e lo si denota con $\mathrm{st}(\xi)$.

Se ξ è infinito positivo, si pone per convenzione $\mathrm{st}(\xi) = +\infty$; analogamente, si pone $\mathrm{st}(\xi) = -\infty$ quando ξ è infinito negativo. Nell'analisi nonstandard l'uso delle parti standard rimpiazza completamente l'uso dei limiti. Ad esempio, se ξ e η sono numeri limitati allora

$$\mathrm{st}(\xi + \eta) = \mathrm{st}(\xi) + \mathrm{st}(\eta), \quad \mathrm{st}(\xi\eta) = \mathrm{st}(\xi)\,\mathrm{st}(\eta),$$

e $\mathrm{st}(\xi/\eta) = \mathrm{st}(\xi)/\mathrm{st}(\eta)$ (purché $\mathrm{st}(\eta) \neq 0$).

Proposizione 1.18. *Consideriamo l'ultrapotenza* $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ *per un certo* $\mathcal{U}$ *ultrafiltro non principale, e sia* $\xi = [\sigma] \in {}^*\mathbb{R}$. *Allora:*
(1) $\mathrm{st}(\xi) = \mathcal{U}\text{-}\lim \sigma(n)$;
(2) *se* $\lim \sigma(n) = r$ *allora* $\mathrm{st}([\sigma]) = r$.

Dimostrazione. (1) Innanzitutto se ξ è finito esistono $a, b \in \mathbb{R}$ entrambi positivi o entrambi negativi tali che $a \leq \xi \leq b$. Quindi la successione di reali σ appartiene a un compatto per un insieme di indici in $\mathcal{U}$: dunque esiste ed è unico $y = \mathcal{U}\text{-}\lim \sigma(n)$. Per definizione di $\mathcal{U}$–limite abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\{n \mid |\sigma(n) - y| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$; quindi per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $|\xi - y| < \varepsilon$. Ovvero $\xi \approx y$, che è la tesi.
(2) Sia $\xi = [\sigma]$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo che $|\sigma(n) - r| < \varepsilon$ definitivamente, e dunque ciò avviene per un insieme di indici che sta in $\mathcal{U}$. Così per ogni $\varepsilon > 0$ vale $|\xi - r| < \varepsilon$, ovvero $\xi \approx y$. □

Proposizione 1.19. *Consideriamo l'ultrapotenza* $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ *per un certo* $\mathcal{U}$ *ultrafiltro non principale. Le seguenti due proprietà sono equivalenti:*
(1) *ogni* $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ *infinitesimo è la classe di* $\mathcal{U}$*-equivalenza* $\varepsilon = [\sigma]$ *di una successione infinitesima;*
(2) $\mathcal{U}$ *è un P-point.*

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Sia $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione che determina l'infinitesimo ε. Al variare di $n \in \mathbb{N}$ definiamo $A_n = \{i \in \mathbb{N} \mid |\sigma(i)| < \frac{1}{n}\}$. Poiché ε

infinitesimo, ognuno degli $A_n \in \mathcal{U}$. Senza perdere di generalità supponiamo vuota l'intersezione degli A_n: se appartenesse a $\mathcal{U}$ si avrebbe che $\sigma \equiv_{\mathcal{U}} c_0$ e quindi la tesi, altrimenti lavoriamo sugli $A_n - \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ che hanno effettivamente intersezione vuota.
Consideriamo ora $B_n = A_n - A_{n+1}$. Sicuramente nessuno di essi appartiene a $\mathcal{U}$ poiché $B_n \cap A_{n+1} = \emptyset$. Abbiamo quindi $\mathcal{U} \ni A_1 = \bigcup_{n \in N} B_n$ con $B_n \notin \mathcal{U}$ per ogni n. Per proprietà di P–point, esiste $C \in \mathcal{U}$ con intersezione finita con ogni B_n (se qualcuno dei B_n fosse finito lo si può sostituire con un qualunque $B \notin \mathcal{U}$ e intersecare il selettore ottenuto con A_1). Su C la successione σ è infinitesima, poiché solo su un numero finito di elementi di C essa assume valori in modulo maggiori di $\frac{1}{n}$, per ogni n. Pertanto la funzione $\sigma|_C \cup c_0|_{C^C}$ è la funzione cercata.
($\Longrightarrow$) Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una collezione di sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ e tali che $A_n \notin \mathcal{U}$. Senza perdere di generalità, li possiamo supporre a due a due disgiunti, a meno di considerare gli insiemi $A_n - \bigcup_{i<n} A_i$, i quali sono contenuti negli A_n. Definiamo allora $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(A_n) = \frac{1}{n}$.
Notiamo che σ definisce un infinitesimo: se infatti così non fosse esisterebbe n tale che

$$\{i \in \mathbb{N} \mid \sigma(i) \geq \frac{1}{n}\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U},$$

e di conseguenza esisterebbe $m \leq n$ tale che $A_m \in \mathcal{U}$, contro le ipotesi.
Sia ora $\widetilde{\sigma} \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$ infinitesima. Si ha che $C = \{i \in \mathbb{N} \mid \widetilde{\sigma} = \sigma\} \in \mathcal{U}$ è l'insieme cercato. Infatti esso può avere interezione al più finita con ogni A_n, altrimenti $\widetilde{\sigma}$ non sarebbe infinitesima. □

Proposizione 1.20. *Consideriamo l'ultrapotenza* ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ *per un certo* $\mathcal{U}$ *ultrafiltro non principale. Le seguenti due proprietà sono equivalenti:*
(1) *ogni* $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ *infinitesimo è la classe di* $\mathcal{U}$*–equivalenza* $\varepsilon = [\sigma]$ *di una successione monotona;*
(2) $\mathcal{U}$ *è un selettivo.*

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Sia σ una successione infinitesima che determina l'infinitesimo ε (esiste per la proposizione precedente). Supponiamo, senza perdere di generalità, $\sigma(n) > 0$ per ogni n (il caso in cui σ è nulla è banale, mentre quello in cui è negativa è analogo). Poiché σ tende a 0 si ha che $\operatorname{Im}\sigma$ non può avere punti di accumulazione diversi da 0, e pertanto $\operatorname{Im}\sigma$ con l'ordine inverso di quello indotto da $\mathbb{R}$ è evidentemente un buon ordine isomorfo a $\mathbb{N}$, in quanto privo di minimo e dotato di un unico punto di accumulazione. Consideriamo la composizione di σ con l'isomorfismo di ordini $\varphi : \operatorname{Im}\sigma \to \mathbb{N}$ si ottiene una funzione iniettiva da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Per selettività di $\mathcal{U}$ esiste $\widetilde{\sigma}$ equivalente a $\varphi \circ \sigma$ strettamente crescente. La funzione cercata

U30

sarà quindi $\varphi^{-1} \circ \widetilde{\sigma}$: è ovviamente equivalente a σ sullo stesso A su cui $\widetilde{\sigma}$ è equivalente a $\varphi \circ \sigma$, ed è monotona in quanto $\widetilde{\sigma}$ è strettamente crescente e φ^{-1} preserva (invertendolo) l'ordine.
($\Longrightarrow$) Consideriamo gli A_n come nella dimostrazione precedente, e sia $\widetilde{\sigma} \equiv_{\mathcal{U}} \sigma$ strettamente monotona. Si ha che $C = \{i \in \mathbb{N} \mid \widetilde{\sigma} = \sigma\} \in \mathcal{U}$ è l'insieme cercato. Infatti esso non può intersecare un dato A_n in più di un elemento, altrimenti $\widetilde{\sigma}$ non sarebbe iniettiva. □

1.4 Il principio di transfer

Lo strumento che introduciamo qui è molto generale e permette di semplificare notevolmente la dimostrazione di alcune proprieta di $^*\mathbb{R}$, in particolare di alcune di quelle che già possiede $\mathbb{R}$. Tale strumento è noto come principio di transfer (o *transfer principle*) e si può riassumere come segue:

> **Principio di transfer.** Ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ ed ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si estendono in modo canonico ad un sottoinsieme $^*A \subseteq {^*\mathbb{R}}$ e ad una funzione $^*f : {^*\mathbb{R}} \to {^*\mathbb{R}}$ rispettivamente, in modo che le estensioni soddisfino le stesse "proprietà elementari".

Così come lo abbiamo enunciato il principio di transfer non è preciso, in quanto non abbiamo formalizzato cosa si intende per "proprietà elementari". Queste sono le proprietà esprimibili mediante formule del primo ordine nel linguaggio della teoria che stiamo considerando.

Vediamo adesso i vari passi necessari per comprendere e dimostrare il principio di transfer. Iniziamo da una definizione:

Definizione 1.21. Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ definiamo

$$^*A = A^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} = \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{N} \to A\}.$$

Potendo fare l'ultrapotenza di qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si parla di numeri ipernaturali, iperinteri e iperazionali per indicare le ultrapotenze $^*\mathbb{N}$, $^*\mathbb{Z}$ e $^*\mathbb{Q}$ rispettivamente.

Si vede immediatamente che $A \subseteq {^*A}$, una volta effettuata la solita identificazione tra numeri reali e classi di successioni costanti. Caratterizziamo i casi in cui si ha l'uguaglianza:

Lemma 1.22. *Un insieme A è finito se e solo se $^*A = A$.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sia $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ finito. Presa $[\sigma] \in {^*A}$ definiamo $C_k = \{n \mid \sigma(n) = a_k\}$. Essendo $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ abbiamo che esiste i tale

che $C_i \in \mathcal{U}$. Allora $[\sigma] = [c_{a_i}] \in A$.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo che A sia infinito, e che quindi contenga un insieme numerabile $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$. Allora $[\sigma] \in A^*$, ma σ non può essere $\mathcal{U}$–equivalente ad una costante in A, perché per ogni $a \in A$ si ha $|\{n \mid \sigma_n = a\}| \leq 1$. Quindi $[\sigma] \notin A$, assurdo. □

Lemma 1.23. *Valgono le seguenti proprietà:*
(1) $^*(A \cap B) = {^*A} \cap {^*B}$;
(2) $^*(A \cup B) = {^*A} \cup {^*B}$.
(3) $^*(A - B) = {^*A} - {^*B}$.

Dimostrazione. Dimostriamo a titolo di esempio la (1), tanto le altre proprietà hanno analoga dimostrazione. Siano $[\sigma] \in {^*\mathbb{R}}$ e, per $C \subseteq \mathbb{R}$, sia $I_C = \{n \mid \sigma(n) \in C\}$. Abbiamo che $I_{A\cap B} = I_A \cap I_B$ e inoltre affermiamo

$$I_{A\cap B} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow I_A \in \mathcal{U} \text{ e } I_B \in \mathcal{U}.$$

L'implicazione verso destra si ha perché $\mathcal{U}$ è stabile per sovrainsieme, mentre quella verso sinistra si ha perché $\mathcal{U}$ è stabile per intersezione. In questo modo

$$[\sigma] \in {^*(A \cap B)} \Leftrightarrow I_{A\cap B} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow I_A \in \mathcal{U} \text{ e } I_B \in \mathcal{U} \Leftrightarrow [\sigma] \in {^*A} \cap {^*B},$$

e abbiamo concluso. □

Lemma 1.24. *Ogni $\nu \in {^*\mathbb{N}} - \mathbb{N}$ è infinito, ossia $\nu > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Se $\nu = [\sigma] \in {^*\mathbb{N}} - \mathbb{N}$ non fosse infinito allora esisterebbe $N \in \mathbb{N}$ tale che $\nu \leq N$. Detto $A = \{1, \ldots, N\}$, ciò significa che

$$\{n \mid \sigma(n) \in A\} \in \mathcal{U}.$$

Dunque $[\sigma] \in {^*A}$. Tuttavia A è finito, quindi per il lemma 1.22 abbiamo $\nu = [\sigma] \in A \subseteq \mathbb{N}$, contro la scelta di ν. □

Grazie al principio di trasfer abbiamo detto che alcune formule che sono vere in $\mathbb{R}$, se interpretate in $^*\mathbb{R}$, continuano ad essere vere.[4] Il prossimo esempio dà alcune proprietà di $^*\mathbb{R}$ che non sono altro che l'interpretazione in $^*\mathbb{R}$ di formule vere in $\mathbb{R}$. Nella parte degli esercizi daremo la dimostrazione di queste proprietà.

[4] le formule di cui parla il principio di tansfer sono quelle del primo ordine nel linguaggio dei campi.

U31

Esempio 1.25. (1) Ogni $\nu \in {}^*\mathbb{Z}$ ha un successore, cioè esiste $\eta > \nu$ tale che per ogni $\zeta \in {}^*\mathbb{Z}$ si ha

$$\zeta > \nu \Rightarrow \zeta \geq \eta.$$

(2) Ogni numero iperreale ha una parte iperintera.
(3) Gli insiemi ${}^*\mathbb{Q}$ e ${}^*\mathbb{R} - {}^*\mathbb{Q}$ sono densi in ${}^*\mathbb{R}$.
(4) Si ha ${}^*(a,b) = (a,b)_{{}^*\mathbb{R}}$ e analogamente per gli altri tipi di intervallo.

Adesso vediamo come estendere le funzioni:

Definizione 1.26. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiamo la funzione ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ come

$${}^*f([\sigma]) = [f \circ \sigma].$$

Sfruttando le estensioni di funzioni reali possiamo dimostrare un risultato molto utile:

Lemma 1.27. *Sia* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *una successione reale. Vale che* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *se e solo se per ogni* ν *infinito vale* ${}^*a_\nu \approx l$.

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sia $\varepsilon > 0$, allora esiste n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$. Sia $\nu = [\sigma] \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, quindi $\nu \geq n_\varepsilon$, ossia

$$\{n \mid \sigma(n) \geq n_\varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Così $\{n \mid |a_{\sigma(n)} - l| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Essendo $a_\nu = [a_{\sigma(n)}] \in {}^*\mathbb{R}$ ricaviamo $|a_\nu - l| < \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo dunque $a_\nu \approx l$.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo di avere una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ con $n_k \to \infty$ e di avere $\varepsilon > 0$ tale che $\{k \mid |a_{n_k} - l| < \varepsilon\} = \emptyset$. Prendiamo $\nu = [n_k] \in {}^*\mathbb{N}$. Dato che $n_k \to \infty$ abbiamo ν infinito, quindi $\nu \approx l$, e dunque l'insieme $\{k \mid |a_{n_k} - l| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$, assurdo. □

Esempio 1.28. Vediamo adesso un'applicazione del lemma precedente: dimostriamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Prendiamo ν infinito. Per il principio di transfer abbiamo $\sqrt[\nu]{\nu} \geq 1$, dato che questa proprietà vale per $\mathbb{N}$. Così possiamo scrivere $\sqrt[\nu]{\nu} = 1 + \delta$ con $\delta > 0$: per concludere è sufficiente mostrare che δ è infinitesimo. Si ha

$$\nu = (1+\delta)^\nu = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \delta^i \geq \frac{\nu(\nu-1)}{2}\delta^2,$$

ossia

$$0 < \delta \leq \sqrt{\frac{2}{\nu - 1}}.$$

Ora $\nu - 1$ è infinito, il suo reciproco è infinitesimo e dunque δ è esso stesso infinitesimo.

1.5 Analisi non standard

Dopo aver acquisito familiarità con l'algebra dei numeri infinitesimi ed infiniti, si può passare subito a trattare la nozione di continuità (in analisi nonstandard non c'è bisogno di premettere lo studio delle successioni e la teoria dei limiti).

Definizione 1.29. Sia f una funzione reale. Diciamo che f è *continua in* x_0 se per ogni $\varepsilon \approx 0$ si ha ${}^*f(x_0+\varepsilon) \approx {}^*f(x_0)$.

Il contenuto intuitivo di questa definizione è evidente. Una funzione f è continua nel punto x_0 se i punti "vicini" a x_0 hanno una immagine "vicina" a $f(x_0)$. Analogamente si può dare la definizione di uniforme continuità, concetto centrale in analisi:

Definizione 1.30. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che f è *uniformemente continua* se per ogni $\xi \approx \eta$ si ha ${}^*f(\xi) \approx {}^*f(\eta)$.

Mentre nella definizione di continuità la coppia di punti considerati contiene un numero reale x_0, per l'uniforme continuità occorre considerare tutte le coppie di numeri iperreali (quindi anche le coppie di punti entrambi infinitesimi o infiniti). Ovviamente ogni funzione uniformemente continua su I è necessariamente continua in ogni punto di I, ma il viceversa non vale, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.31. Consideriamo $f(x) = x^2$. La funzione è ovviamente continua in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$: infatti per ogni $\varepsilon \approx 0$ si ha

$$ {}^*f(x_0+\varepsilon) = (x_0+\varepsilon)^2 = x_0^2 + 2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 = x_0^2 + \varepsilon(2x_0+\varepsilon) \approx x_0^2 = {}^*f(x_0), $$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che $\varepsilon(2x_0+\varepsilon)$ è infinitesimo in quanto prodotto di un infinitesimo per un numero finito. La funzione f, però, non è uniformemente continua. Infatti se prendiamo $\xi = \Omega$ infinito e $\eta = \Omega + \frac{1}{\Omega}$ abbiamo chiaramente che $\xi \approx \eta$; ma

$$ {}^*f(\xi) = \Omega^2 \quad \text{e} \quad {}^*f(\eta) = \Omega^2 + \frac{1}{\Omega^2} + 2, $$

e dunque ${}^*f(\eta) - {}^*f(\xi) = \frac{1}{\Omega^2} + 2$, che non è infinitesimo.

Dimostriamo adesso con metodi non standard un risultato classico dell'analisi:

Teorema 1.32 (di Heine–Cantor). *Se f è continua su $[a,b]$ allora f è uniformemente continua.*

U32

Dimostrazione. Siano $\xi \approx \eta$ in ${}^*[a,b]$. Sia $x = \mathrm{st}(\xi) = \mathrm{st}(\eta)$, che esistono in quanto ξ ed η sono finiti (l'intervallo è limitato). Inoltre, dato che l'intervallo in questione $[a,b]$ è chiuso, abbiamo che $x \in [a,b]$. Per continuità si ha

$$^*f(\xi) \approx f(x),$$

e simmetricamente abbiamo anche $^*f(\eta) \approx f(x)$. □

Lemma 1.33. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se $l = \sup A$ allora esiste $\alpha \in {}^*A$ tale che* $\mathrm{st}(\alpha) = l$.

Dimostrazione. Dalla definizione di estremo superiore si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $a_n \in A$ tale che $a_n > l - \frac{1}{n}$. Dato che l è un maggiorante di A si ha anche

$$\forall n \in \mathbb{N}\; l - \frac{1}{n} < a_n < l.$$

Definiamo $\sigma : \mathbb{N} \to A$ tale che $\sigma(n) = a_n$ e $\alpha = [\sigma] \in {}^*A$. Dato che la successione σ ha limite in senso classico e tale limite è l (per il teorema di confronto), segue che $\mathrm{st}(\alpha) = l$. □

Teorema 1.34 (Weierstrass). *Ogni funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. È sufficiente provare che la funzione f ha un massimo: infatti per dimostrare che f ha minimo è sufficiente applicare il ragionamento alla funzione $-f$.
Sia $l = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Posto $A = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ abbiamo

$$^*A = \{f(x) \mid x \in [a,b]_{^*\mathbb{R}}\},$$

così per il lemma precedente esiste $\xi \in [a,b]_{^*\mathbb{R}}$ tale che $l = \mathrm{st}(f(\xi_0))$. Detta $x_0 = \mathrm{st}(\xi_0)$ abbiamo che $x_0 \in [a,b]$ perché l'intervallo è chiuso. Sfruttando la continuità si ha

$$f(x_0) \approx f(\xi_0) \approx l.$$

Ma due numeri reali sono infinitamente vicini solo se coincidono, quindi $f(x_0) = l$ è il punto di massimo cercato. □

Teorema 1.35 (del valore intermedio). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo $x_n, y_n \in [a,b]$ tali che

$$f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \quad \text{e} \quad 0 < y_n - x_n \leq \frac{1}{n}.$$

Un modo per costruire questi punti è il seguente: dato n, si suddivide l'intervallo $[a,b]$ in n parti uguali e si prende come x_n il massimo elemento della partizione finita effettuata sul quale f è negativa. Essendo più formali prendiamo la partizione $\mathscr{P}_n = \{a + i(b-a)/n \mid i = 0, \ldots, n\}$ e definiamo

$$x_n = \max\{r \in \mathscr{P}_n \mid f(r) < 0\} \quad \text{e} \quad y_n = x_n + \frac{b-a}{n}.$$

Consideriamo $(x_\nu)_{\nu \in {}^*\mathbb{N}}$ e $(y_\nu)_{\nu \in {}^*\mathbb{N}}$, le estensioni non standard delle due successioni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appena costruite. Fissiamo inoltre un N ipernaturale infinito. Per il principio di transfer abbiamo che $x_N, y_N \in [a,b]_{^*\mathbb{R}}$ e

$$f(x_N) < 0, \quad f(y_N) > 0 \quad \text{e} \quad 0 < y_N - x_N \leq \frac{1}{N}.$$

L'ultima condizione ci dice che $y_N - x_N \approx 0$, e quindi $\mathrm{st}(x_N) = \mathrm{st}(y_N) = c \in [a,b]$ in quanto l'intervallo è chiuso. Ma allora $f(c) \approx f(x_N)$ e $f(c) \approx f(y_N)$. Dato che $f(c)$ è reale ed è infinitamente vicino sia ad un numero negativo che ad un numero positivo, si ha necessariamente che $f(c) = 0$ e dunque che in realtà $c \in (a,b)$. □

Andiamo adesso alla nozione di derivabilità in un punto:

Definizione 1.36. Sia f una funzione reale. Diciamo che f è *derivabile in* x_0 se per ogni $\varepsilon \approx 0$ non nullo esiste un numero reale $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{{}^*f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \approx f'(x_0).$$

A titolo di esempio, per mostrare le potenzialità dell'analisi non standard, diamo una dimostrazione della regola della catena:

Proposizione 1.37 (regola della catena). *Sia f una funzione derivabile in x_0 e sia g derivabile in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon \approx$ con $\varepsilon \neq 0$. Allora

$$\frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0))}{\varepsilon} = \frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0))}{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$

U33

Per continuità della funzione f in x_0 si ha $f(x_0+\varepsilon) = f(x_0)+\eta$, con η infinitesimo. Allora si ha

$$\frac{g(f(x_0+\varepsilon))-g(f(x_0))}{\varepsilon} = \frac{g(f(x_0)+\eta)-g(f(x_0))}{\eta}\frac{f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)}{\varepsilon} \approx$$
$$\approx g'(f(x_0))f'(x_0),$$

che è la tesi. □

1.6 Insiemi interni

Adesso individuiamo alcuni speciali sottoinsiemi di $^*\mathbb{R}$, e vedremo che essi godono di proprietà molto importanti. Iniziamo dalla defizione:

Definizione 1.38. Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Diciamo che A è *interno* se esiste una successione $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che

$$[\varphi] \in A \iff \{n \mid \varphi(n) \in A_n\} \in \mathcal{U}.$$

Esempio 1.39. Se $X \subseteq \mathbb{R}$ allora $^*X$ è interno. Infatti per definizione di $\star X$ abbiamo

$$[\varphi] \in {}^*X \iff \{n \mid \varphi(n) \in X\},$$

e quindi la successione di insiemi da cui provieme $^*X$ altro non è la successione costantemente uguale a X.

La prima proprietà degli insiemi interni che esaminiamo è la seguente:

Proposizione 1.40. *Ogni $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ non vuoto e interno ammette minimo.*

Dimostrazione. Sia $\{A_n\}$ la successione di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ associata ad A. Definiamo

$$\nu = [\varphi],$$

dove $\varphi(n) = \min A_n$; allora affermiamo che ν è il minimo di A cercato. Infatti $\nu \in A$ poiché $\{n \mid \varphi(n) \in A_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, ed inoltre si verifica facilmente che se $\nu' \leq \nu$ e $\nu' \in A$ allora $\nu' = \nu$. □

Osservazione 1.41. Come conseguenza della proposizione precedente abbiamo subito un esempio di insieme non interno. L'insieme $\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ degli ipernaturali infiniti non è interno proprio perché non ha minimo.

Per capire a prima vista se un certo insieme è interno si può ricorrere ad un principio informale, che spesso instrada sulla via giusta. Questo principio dice che gli insiemi interni sono quelli "definibili" a partire da certi parametri anch'essi interni. Vediamo un esempio:

Esempio 1.42. Siano $\xi, \eta \in {}^*\mathbb{R}$ con $\xi < \eta$ e consideriamo $A = (\xi, \eta)_{^*\mathbb{R}}$. Ci chiediamo se A è interno o no: secondo il principio informale appena enunciato la risposta è sì in quanto

$$(\xi, \eta)_{^*\mathbb{R}} = \{\zeta \in {}^*\mathbb{R} \mid \xi < \zeta < \eta\}.$$

Verifichiamo adesso formalmente che A è interno. Siano $\xi = [\varphi]$ e $\eta = [\psi]$ e definiamo gli intervalli

$$A_n = (\varphi(n), \psi(n)).^5$$

Allora vale che $(\xi, \eta)_{^*\mathbb{R}} = \{[\tau] \mid \tau(n) \in A_n\}$.

Per finire, non è difficile verificare che se A e B sono interni, allora sono interni anche $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $A \times B$.

Definizione 1.43. Un insieme interno si dice *iperfinito* se gli A_n sono tutti finiti.

La cardinalità interna di un iperfinito è l'ipernaturale dato dalla successione $(|A_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

QUALCHE ESERCIZIO

Esercizio 1.44. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = p/q \in \mathbb{Q},\ (p,q) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dimostrare che f è continua in ogni $x \notin \mathbb{Q}$ e discontinua in ogni $x \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 1.45. La *S–topologia* su ${}^*\mathbb{N}$ è quella che ha come base di aperti $\{{}^*A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. La S–topologia è di Hausdorff se e solo se $\mathcal{U}$ è di Hausdorff.

Esercizio 1.46. Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Allora $\mathbb{F}$ è isomorfo a $\mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\xi \in {}^*\mathbb{F}$ finito esiste $x \in \mathbb{F}$ tale che $x \approx \xi$.

Esercizio 1.47. Dimostrare che $\mathrm{cof}({}^*\mathbb{N}) > \aleph_0$. Ossia non esistono sottoinsieme illimitati numerabili di ${}^*\mathbb{N}$.

[5] non è detto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $\varphi(n) < \psi(n)$; ciò che è vero è che tale condizione avviene per un insieme di indici n che appartiene a $\mathcal{U}$.

U34

Esercizio 1.48. Dimostrare che Coin($^*\mathbb{N}$) $> \aleph_0$. Ossia non esistono sottoinsiemi numerabili illimitati verso il basso di ipernaturali infiniti.

LEZIONE

Osservazione 1.49. L'insieme degli infinitesimi non è interno in $^*\mathbb{R}$. Anche $^*\mathbb{R}_{fin}$ non è interno.

Esempio 1.50. Gli intervalli sono interni (anche in $^*\mathbb{N}$).

Proposizione 1.51 (principio di overspill). *Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ un insieme interno. Se A contiene numeri finiti arbitrariamente grandi allora esiste ν infinito tale che $\nu \in A$.*

Dimostrazione. Per assurdo, sia A un insieme interno tale che $A \cap \mathbb{N}$ è infinito ma A non contiene numeri infiniti. Consideriamo

$$B = \{\xi \in {}^*\mathbb{N} \mid \exists a \in A \ \xi \leq a\} = \bigcup_{a \in A} [0, a].$$

Si vede applicando la definizione che B è interno. Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione da cui proviene A; allora B proviene da $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove $B_n = \bigcup_{a\in A_n}[0, a]$. Ma $B = \mathbb{N}$. $\square$

Osservazione 1.52. Segue anche dall'esercizio sulle cardinalità.

Proposizione 1.53 (principio di underspill). *Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ un insieme interno. Se A contiene numeri infiniti arbitrariamente piccoli allora A contiene anche numeri finiti.*

Esercizio 1.54. (1) Sia A un insieme interno e $N \subseteq A$. Allora esiste ν infinito tale che $[0, \nu] \subseteq A$.
(2) Sia A un insieme interno. Se $[\nu, \infty)_{^*\mathbb{N}} \subseteq A$ per ogni ν infinito allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $[n, \infty) \subseteq A$.

ESERCIZI

(ex) $\mathbb{F}$ superreale è iperreale $\iff \mathbb{F} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{I}$, con $I \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ id. mass.

<u>DEF</u>: $\mathbb{F}$ superr. se $\mathbb{F}$ campo ord $\supsetneq \mathbb{R}$

$\mathbb{F}$ iperr. se $\mathbb{F} \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{U}} =: {}^{*}\mathbb{R}$

(ex) $Q^{*}/_{\approx} \cong \mathbb{R}$

SOLUZIONE 1

$\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{U}}$ è omom. di anelli, perché sia a sx che a dx le op. sono definite componentwise. Prendo $\mathrm{Ker}(\pi)$ e tesi.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sappiamo che $\exists\, \varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{F}$ hom surg. Sia $M := \mathrm{Ker}\,\varphi$: scelgo $\mathcal{U}_m = \{A \subseteq \mathbb{N} : \exists\, a \in M : A = a^{-1}[\{0\}]\}$, a succ. reale.

Verifiche: <u>$\emptyset \notin \mathcal{U}$</u>: $a^{-1}[0] = \emptyset \iff \forall i\ a(i) \neq 0 \iff a^{-1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Rightarrow a \notin M$

<u>$\mathbb{N} \in \mathcal{U}$</u>: $\forall M\ 0 \in M \Rightarrow a^{-1}[0] = \mathbb{N} \in \mathcal{U}_m$

$A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$: sia $a \in M$, $A = a^{-1}[0] \Rightarrow I_{A^c} \in M$

$I_{A^c} \cdot a = a$, viceversa $a \in M \Rightarrow a \cdot b \in M$ con $b = \frac{1}{a(i)}$, $a(i) \neq 0$, 0 altr.

Sappiamo che $I_{A^c}, I_{B^c} \in M \Rightarrow I_{A^c} + I_{B^c} \in M$ perché $(I_{A^c} + I_{B^c})(n) = 0$ se $n \in A \cap B$.

<u>$A \in \mathcal{U}, B \supseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{U}$</u>: $I_{A^c} \in M, I_{B^c} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \Rightarrow I_{A^c} \cdot I_{B^c} \in M$

$(I_{A^c} \cdot I_{B^c})(x) = 0 \iff x \in A \cup B$ ok.

Ci serve M mass. per provare che $\mathcal{U}$ è ultra. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e proviamo che $A \in \mathcal{U}$ o $A^c \in \mathcal{U}$. Dato che $I_A \cdot I_{A^c} = 0 \in M$, dato che M è primo, $I_A \in M \vee I_{A^c} \in M$ tesi.

Ora proviamo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{M} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/_{\mathcal{U}}$: per le operazioni ok x teo hom: verifichiamo che $a \equiv_m b$ sse $a \equiv_{\mathcal{U}} b$: $a \equiv_m b \iff a - b \in M \iff (a-b)^{-1}(0) \in \mathcal{U}$ $\iff \{i \in \mathbb{N} : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U} \iff a \equiv_{\mathcal{U}} b$. Allora, tesi!

COR: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ha ogni id. primo massimale (è 0-dim).

SOLUZIONE 2

$^*\mathbb{Q}_{FIN}/_{\approx} \cong \mathbb{R}$ con $a \approx b \Leftrightarrow a-b$ è infinitesimo.

Sia $L: {}^*\mathbb{Q}_{FIN} \longrightarrow \mathbb{R}$
$[\sigma] \longmapsto \lim_{u} \sigma$

1) È ben definita: ho succ. limitata, quindi OK.

2) È hom perché il lim si comporta bene con $+$ e $\cdot$.

3) $\operatorname{Ker} L = \{[\sigma] \in {}^*\mathbb{Q}_{FIN} : \lim_u \sigma = 0\}$

Ma se $\lim_u \sigma = 0$, $\forall n$ $\{i \in \mathbb{N} : \sigma(i) < \frac{1}{n}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow [\sigma]$ infinitesimo.

Allora $\operatorname{Ker} L = \{a \in {}^*\mathbb{Q}_{FIN} : a \text{ infinitesimo}\}$.

4) È chiaramente surg.

ANALISI NON STANDARD

16/11

DEF: f è continua in x_0 se $\forall \varepsilon \approx 0$ $^*f(x_0+\varepsilon) \approx {}^*f(x_0)$

(ex) Verificare che è equivalente alla def. standard.

DEF: $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è unif. cont. se $\forall \xi \approx \eta$ in A^*, $^*f(\xi) \approx {}^*f(\eta)$

OSS: unif. cont. richiede $\forall \xi, \eta$ senza che questi siano reali.

(es) $f(x) = x^2$ è cont in ogni pt: $^*f(x_0+\varepsilon) = x_0^2 + \underbrace{2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2}_{\text{INFINITESIMO}}$, ma non è unif. cont.: se Ω è inf., $\eta = \Omega + \frac{1}{\Omega}$, $\xi = \Omega$,
$\Omega^2 + \frac{1}{\Omega^2} + 2 \not\approx \Omega^2$.

(ex) f loc. limitata in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|x-x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| <$
Provare $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ loc. lim se $\forall \xi$ fin. $^*f(\xi)$ è finito

TEOREMA DI CANTOR

Se f è cont su $[a,b]$, allora f è unif. cont.

Prendiamo $\xi \approx \eta$ in ${}^*[a,b]$: $st(\xi) = x = st(\eta)$ (ho usato che l'int. é limitato). Inoltre, $x \in [a,b]$, perché $[a,b]$ é chiuso.
Per cont. in x, ${}^*f(\xi) \approx f(x) \approx {}^*f(\eta)$, da cui la tesi.

(es) Teo Weierstrass: $\forall f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ cont ha massimo e minimo

(es) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora $\sup A = l \iff \forall a \in A \ a < l \wedge \exists \alpha \in {}^*A : st(\alpha) = l$

<u>DEF</u>: f é der. in x_0 se $\forall$ inf. non nullo, $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\forall \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0, \ \frac{{}^*f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \approx f'(x_0) \quad \text{sse} \quad \forall \varepsilon \approx 0 \ \exists \tau \approx 0$$

$${}^*f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + \varepsilon f'(x_0) + \varepsilon \tau$$

REGOLA LEIBNIZ

f der. in x_0, g der in $f(x_0)$: trovare $(g \circ f)'(x_0)$.

$$\frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0))}{\varepsilon} = \underbrace{\frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0))}{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}}_{\overset{ss}{\approx}\, g'(f(x_0))} \ \underbrace{\frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}}_{\overset{ss}{\approx}\, f'(x_0)}$$

INSIEMI INTERNI

<u>DEF</u>: $A \subseteq {}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ é interno se $\exists$ succ. di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ $\langle A_n, n \in \mathbb{N} \rangle$ t.c. $[\varphi] \in A \iff \{n : \varphi(n) \in A_n\} \in \mathcal{U}$.

(es) Se $A_n = [0, \frac{1}{n}]$, "$\xi \in_{\mathcal{U}} \{A_n\}$" se $[\varphi] = \xi$ e $\varphi(n) \in A_n$ q.o.

<u>PROP</u>: $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ interno ha minimo, ma non vale che $\forall A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ ha minimo

DIMOSTRAZIONE

$A \sim \langle A_n, n \in \mathbb{N} \rangle$: $\min(A) = [\varphi]$ con $\varphi(n) := \min(A_n)$. Però l'ins. degli infiniti ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ non ha minimo $\Rightarrow {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ non interno.

<u>IDEA</u>: gli ins interni sono quelli "definibili".

Sia $\xi < \eta$ in ${}^*\mathbb{R}$, $(\xi, \eta)_{{}^*\mathbb{R}} := \{\varsigma \in \mathbb{R} : \xi < \varsigma < \eta\} \subseteq {}^*\mathbb{R}$. É interno: prendo

$\xi = [\varphi]$, $\eta = [\psi]$ e suppongo $\varphi(n) < \psi(n)$. Chiamo $A_n = (\varphi(n), \psi(n))$.
Allora $(\xi, \eta) = \{[\tau] : \varphi(n) < \tau(n) < \psi(n)$ q.o.$\}$, $\tau(n) \in A_n$.

(ex) Se A, B sono interni, allora sono interni $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $A \times B$ (ma NON $\mathcal{P}(A)$...)

(ex) Se $A \subseteq \mathbb{R}$, ${}^*A$ è interno (proviene da $A_n = A$).

<u>OSS</u>: se $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ${}^*A = \{([\varphi], [\psi]) : (\varphi(n), \psi(n)) \in A$ q.o.$\}$.

(ex) $({}^*\mathbb{R}) \times ({}^*\mathbb{R}) = {}^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

COMPLETEZZA ${}^*\mathbb{Q}_{fin}$

Sia $\mathbb{F} = {}^*\mathbb{Q}_{fin} / {}^*\mathbb{Q}$ infinitesimo: dimostriamo che ogni insieme inf. lim. ha inf.

A meno di shift, $Y \subseteq \mathbb{F}^+$.

Sia $\xi > 0$: dato che ${}^*\mathbb{Q}_{fin} / {}^*\mathbb{Q}_{inf}$ è archimedeo, $\exists n : \xi \cdot n > y \in Y$.

Fisso $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$: $\exists\, n_m$ minimo t.c. $\frac{n_m}{m} > Y$ e prendo classe $\left[\frac{n_m}{m}\right]$:
sostengo $\inf Y = \left[\frac{n_m - 1}{m}\right] = \sigma$. Sicuramente σ è minorante, perché se $Y = [(y_m)]$, $\sigma = \left[\frac{n_m - 1}{m}\right]$, $y_m \geqslant \frac{n_m - 1}{m}$ OK.

Poi, σ è il max dei minoranti: σ' altro minorante, quindi $\sigma' = [\varphi']$, $\sigma = [\varphi]$, su un ins. di $\mathcal{U}$ $\varphi'_i < y < \varphi_i + \frac{1}{i}$, da cui $\varphi'_i - \varphi_i < \frac{1}{i} \Rightarrow \varphi' - \varphi$ è infinitesimo o minore $\Rightarrow [\varphi' - \varphi] \leq 0$.

<u>DEF</u>: un insieme iperfinito è un ins. che "proviene" da succ. ins. fin.

(es) $[1, \nu]_{{}^*\mathbb{N}}$ iperfin.

<u>DEF</u>: la card. interna di A iperf. è $|A| = [\{|A_n|\}] \in {}^*\mathbb{N}$

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$, $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ inf. $m_\nu(A) := st\left(\frac{|{}^*A \cap [1, \nu]_{{}^*\mathbb{N}}|}{\nu}\right) \in [0, 1]_{\mathbb{R}}$ MANCA 21/11

<u>OSS</u>: sott. interni possono non essere int.

(ex) ${}^*A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ iperf. Allora A è

(ex) $m_\nu(A \cup B) = m_\nu(A) + m_\nu(B)$ se $A \cap B = \emptyset$ ...

U37

Capitolo 1

Definizione 1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$$

tale limite è detto *densità asintotica* di A. Se il limite non esiste si definisce *densità asintotica superiore* la quantità

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}.$$

Lemma 1.2. *La densità asintotica superiore $\overline{d}$ è invariante per traslazione.*

Dimostrazione. □

Un altro tipo di proprietà su cui ci potremmo soffermare è l'additività. Ovviamente se A o B hanno densità asintotica allora se $A \cap B = \emptyset$ allora $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$. In generale questo non è vero e ciò che vale è il seguente:

Lemma 1.3. *Se $A \cap B = \emptyset$ allora $\overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$.*

Dimostrazione. □

Definizione 1.4. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Diciamo che A è *sindetico* se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha $[x, x+k) \cap A = \emptyset$.

La definizione precedente ci dice in sostanza che esiste un certo k in modo che ogni intervallo lungo k interseca l'insieme. Si dice in modo informale che A ha "buchi limitati".[1]

Definizione 1.5. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Diciamo che A è *spesso* se include intervalli arbitrariamente lunghi.

[1] o anche *buonded gaps*, all'inglese.

Quella di insieme spesso è la nozione duale della nozione di insieme sindetico. In modo più preciso, dalle definizioni segue che

$$A \text{ sindetico} \Longleftrightarrow A^C \text{ non spesso.}$$

Esercizio 1.6. Sia A un insieme spesso. Dimostrare che A è additivamente grande ed è anche AP–rich.[2]

Esercizio 1.7. Sia A un insieme sindetico. Allora A è AP–rich.

Definizione 1.8. Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice insieme Δ^* se interseca ogni Δ–set.

La definizione precedente si può anche esprimere dicendo che A è un Δ^* se per ogni X infinito si ha $A \cap (X - X) \neq \emptyset$.

Teorema 1.9. *Se $\overline{d}(A) > 0$ allora $A - A$ è un insieme Δ^*.*

Dimostrazione. Prendiamo un insieme infinito $X = \{x_1 < x_2 < \cdots\}$ e facciamo vedere che $(A - A) \cap (X - X)$ è non vuota. Se $\overline{d}(A) = \alpha > 0$ allora esiste N infinito con

$$a_N = \frac{|{}^*A \cap [1, N]|}{N} \approx \alpha.$$

Ma per ogni i si ha

$$\frac{|({}^*A + x_i) \cap [1, N]|}{N} \approx \alpha.$$

Scegliamo adesso k in modo che

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{|{}^*A + x_i|}{N} \approx k\alpha > 1.$$

LA FINE? □

Esercizio 1.10. $\limsup a_n = \alpha$ se e solo se $\alpha = \max\{\mathrm{st}(a_\nu) \mid \nu \in {\star}\mathbb{N} \text{ infinito}\}$.

Esercizio 1.11. Se A è un insieme Δ^* allora A è sindetico. (Segue dal fatto che C è spesso allora C è Δ–set)

Esercizio 1.12. Esistono insiemi A con densità inferiore nulla e densità superiore 1.

Esercizio 1.13. Se A è sindetico allora $\overline{d}(A) > 0$. Il viceversa è falso.

[2] questa proprietà non è banale, dato che avevamo visto che le due nozioni sono scollegate: infatti esistono insiemi additivamente grandi che non contengono neanche 3–progressioni aritmetiche.

U38

Esercizio 1.14. Se A ha densità inferiore α allora esiste $B \subseteq A$ tale che $d(B) = \alpha$.

Esercizio 1.15. Gli spessi e i sindetici non sono regolari per partizioni.

Esercizio 1.16. * I sindetici a tratti sono regolari per partizioni.

ESERCIZI 23/11 U39

(ex) $\mathrm{cof}({}^*\mathbb{N}) > \aleph_0$

SOLUZIONE

Per assurdo no. Allora $\exists\, \varphi_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ t.c. $[\varphi_n] <_{\mathcal{U}} [\varphi_{n+1}]$ (φ_n) illimitato. Posso supp. ind. che $\varphi_n < \varphi_{n+1}$ su ogni comp (modifico φ_{n+1} ind. dove $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$).

Definiamo $\psi(n) := \varphi_n(n)$ e proviamo $[\psi(n)] > [\varphi_k(n)]$.

Infatti, $\psi(n) = \varphi_n(n) > \varphi_k(n)$ $\forall n > k \Rightarrow [\psi] >_{\mathcal{U}} [\varphi_k]$.

Oppure def. $\psi(n) := \max\{\varphi_1(n), \dots, \varphi_n(n)\} + 1$

(ex) La S-topologia (di ${}^*\mathbb{N}$) è di Hausdorff $\Leftrightarrow \mathcal{U}$ è di Hausdorff.

SOLUZIONE

FATTO: $\exists$ ultr. Hausdorff segue da hp continuo, ma non si sa se questi si costr. anche senza.

$\boxed{\Leftarrow}$ Siano $a = [\varphi], b = [\psi] \in {}^*\mathbb{N}$. La S-top. è T2 $\Leftrightarrow \exists$ int. disg. di a, b $\forall$ tali $a, b \Leftrightarrow \exists A, B \subseteq \mathbb{N} : a \in {}^*A, b \in {}^*B, {}^*A \cap {}^*B = {}^*(A \cap B) = \emptyset$.

$a \in {}^*A \Leftrightarrow \{n : \varphi(n) \in A\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A \in \varphi(\mathcal{U})$

Un esercizio ci dice che $\exists A, B$ disg. $: A \in \varphi(\mathcal{U}), B \in \psi(\mathcal{U})$ se $\varphi(\mathcal{U}) \neq \psi(\mathcal{U})$, quindi resta da provare che $\varphi(\mathcal{U}) \neq \psi(\mathcal{U})$ $\forall \varphi \neq_{\mathcal{U}} \psi$: questo vale se $\mathcal{U}$ è di Hausdorff.

(ex) Trovare ins. spesso con compl. spesso $\Rightarrow \exists$ ins. non sind. con compl. non sindetico.

SOLUZIONE

$X := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} [2^{2^{2n}}, 2^{2^{2n+1}}]$.

(es) Provare che X ha $\overline{d}(X) = 1$, $\underline{d}(X) = 0$.

SOLUZIONE

$$\frac{2^{2^{2n+1}} - 2^{2^{2n}}}{2^{2^{2n}}} = 2^{2^{2n+1} - 2^{2n}} - 1 \text{ che tende a } +\infty$$

DEF: A sindetico se $\exists K : \forall |I| = K \ \ I \cap A \neq \emptyset$ (se e solo se) $\exists F$ finito t.c. $A + F = \mathbb{Z}$.

FATTO: i K minimi non sono uguali.

ex) Se A è K-sindetico (nella 2ª def.), ha dens. inf. $\geq \frac{1}{K}$.

ex) I sindetici a tratti sono regolari per partizioni (cioè se $A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$ è sind. a tratti, allora A_i è sind. a tratti.

SOLUZIONE

Proviamo che $\forall A, B \subseteq \mathbb{N}$, $A \cap B = \emptyset$ $\underline{d}(A \sqcup B) \geq \underline{d}(A) + \underline{d}(B)$

$$d(A \sqcup B) \approx \frac{|{}^*(A \cup B) \cap [1, N]|}{N} = \frac{|{}^*A \cap [1,N]|}{N} + \frac{|{}^*B \cap [1,N]|}{N} \gtrsim \frac{|{}^*A \cap [1, N_A]|}{N_A} + \frac{|{}^*A \cap [1, N_B]|}{N_B} \gtrsim \underline{d}(A) + \underline{d}(B)$$

Scelgo quindi $F = \{n_1, \ldots, n_k\} : \{A + n_1\} \cup \ldots \cup \{A + n_k\} \supseteq [N, +\infty)$.

Sia $B_i := (A + n_i) - \bigcup_{j=1}^{i-1} B_j : \sqcup B_i \supseteq [N, +\infty)$ da cui $\sum \underline{d}(B_i) \leq 1$.

Non funziona!!!

Sia N inf. t.c. $\frac{|A \cap [1,N]|}{N} \approx \underline{d}(A)$: $\frac{|(A + n_k) \cap [1,N]|}{N} \approx \underline{d}(A + n_k)$ e

$$1 = \underline{d}\left(\bigcup (A + n_i)\right) \approx \sum \frac{|{}^*A \cap [1,N]|}{N} = K \underline{d}(A).$$

INSIEMI SINDETICI E SPESSI [illegible]

Supponiamo che $\{A_n\}$ sia famiglia sottoinsiemi con la PIF.

Allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} {}^*A_n \neq \emptyset$

"DIMOSTRAZIONE 1 (OVERSPILL)"

Prendo $\varphi : n \mapsto A_1 \cap \ldots \cap A_n$, $\Gamma = \{\xi \in {}^*\mathbb{N} : {}^*\varphi(\xi) \neq \emptyset\}$ che è interno.

So che $\mathbb{N} \subseteq \Gamma$ per hp, perché ${}^*\varphi(n) = {}^*[\varphi(n)] = {}^*(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq \emptyset$

Allora per OVERSPILL $\exists \nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty : {}^*\varphi(\nu) \neq \emptyset$

FATTO in generale, se $\psi : X \longrightarrow Y$, ${}^*\psi : {}^*X \longrightarrow {}^*Y$ è t.c. ${}^*\psi({}^*X) = {}^*[\psi(X)]$

Si conclude perché $\emptyset \neq {}^*\varphi(\nu) = \bigcap_{i=1}^{\nu} {}^*\varphi(i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} {}^*\varphi(i) = \bigcap_{n=1}^{\infty} {}^*A_n$

OSS bisognerebbe definire un po' di cose, tra cui ${}^*\varphi$

DIMOSTRAZIONE 2 (VERA)

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, prendo $\sigma(n) \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Prendo $\xi = [\sigma]_{\mathcal{U}} \in {}^*\mathbb{R}$.

Allora $\forall k$, $\xi \in {}^*A_k$ perché $\sigma(n) \in A_k \ \forall n \geq k$. Dato che $\xi \in {}^*A_k \forall k$, $\xi \in \bigcap {}^*A_k = {}^*(\bigcap A_k)$.

(ex) * Se $\{B_n\}$ è famiglia di sott. interni di ${}^*\mathbb{R}$ con la FIP, allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$. (saturazione numerabile).

(ex) Se $A \cap B = \emptyset$, allora:

$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \overline{d}(B) \leq \overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B)$.

In particolare, se esistono $d(A), d(B)$, allora $d(A \cup B)$ esiste ed è $d(A) + d(B)$

(ex) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < \infty \Rightarrow A = \{a_1 < \ldots < a_n < \ldots\}$ ha densità $= 0$.

Non vale $\Leftarrow$.

OSS $\lim_{n \to \infty} \frac{|P \cap [1,n]|}{n/\log n} = 1$ (P ins. n primi) $\Rightarrow P$ ha dens. 0. Però $\sum_{p \in P} \frac{1}{p} = +\infty$.

CONG: se $\sum_{n=1} \frac{1}{a_n} = +\infty$, A é AP-rich (non lo si sa risolvere neanche per progr. lunghe 3). (Erdős).

FATTO (Szemerédi): insiemi di dens. >0 sono AP-rich.

(ex) $\forall X$ infinito, $\exists [N]^2 = C_1 \sqcup C_2$ t.c. ogni insieme H omogeneo ha dens. nulla relativamente a X, cioé $\lim_{n\to\infty} \frac{|H\cap[1,n]|}{|X\cap[1,n]|} = 0$ (caso particolare: per $X = \mathbb{N}$ H ha densitá 0). Si può anche imporre $H \subseteq X$.

ALCUNI FATTI

A spesso $\overset{DEF}{\iff}$ A cont. interv. arbitrariamente lunghi $\iff$ *A include $[\mu,\nu]$ infinito

A sindetico $\overset{DEF}{\iff}$ $\exists k$ t.c. ogni int. lungo k interseca A $\iff$ $\exists F$ finito t.c. $A + F = [n, +\infty)$ $\iff$ *A non ha buchi infiniti.

A sindetico $\iff$ A^c non é spesso.

A sind. a tratti $\iff$ $A = B \cap C$ con B spesso, C sindetico $\iff$ $\exists k, \exists I$ int. arb. lunghi t.c. $I \cap A$ ha buchi $\leq k$ $\iff$ esiste un intervallo inf. J t.c. $^*A \cap J$ ha solo buchi finiti $\iff$ lo stesso con buchi limitati.

(ex) $B = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ sind. a tratti $\Rightarrow \exists C_i$ sind. tratti.

OBIETTIVO: TEOREMA JIN

$\overline{d}(A), \overline{d}(B) > 0 \Rightarrow A + B$ sindetico a tratti.

ESERCIZI

(ex) $A = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$, A sind. tratti $\Rightarrow C_i$ sind. tratti $\forall i$

SOLUZIONE

Se $\mathcal{U} \in L$ ideale sx minimale (cioè $\mathcal{U} \in$ più piccolo ideale bil.), $\forall A \in \mathcal{U}$ A è sindetico a tratti.

Questo fatto implica la tesi: se $A \in \mathcal{W}$, $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{W}$ è ideale sx.

SI INCASINA

DOMANDA: dato A sind. a tratti, $\exists \mathcal{U} \in L$, $A \in \mathcal{U}$? Se sì, la propr. implica la tesi: $C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r \in L \Rightarrow C_i \in L$ per qualche i.

OSS: se $\{A - kn\}$ ha la PIF, $A \in \mathcal{U} \in L$: sia $\mathcal{W} \supseteq \{A - kn\}$; $\{n : B - kn \in \mathcal{W}\} \in A$ SI INCASINA DI NUOVO.

OSS: la propr. della domanda è ver. se $A = \mathbb{N}$.

Prendiamo $\mathcal{U} \in L$, $A \in \mathcal{U}$ voglio A sind. tratti. So che $\bigcup \mathcal{O}_{A-n} \supseteq L$, perché se L è min, $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} = L$ $\forall \mathcal{V} \in L \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \ni A$ da cui $\emptyset \neq \{n : A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W} \Rightarrow \exists n : A - n \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V} \in \mathcal{O}_{A-n}$.

Ma L è chiuso in $\beta\mathbb{N}$ che è cpt $\Rightarrow L \subseteq \bigcup_{n<N} \mathcal{O}_{A-n} = \mathcal{O}_{A-1 \cup \dots \cup A-N}$

Dimostriamo che $A-1 \cup \dots \cup A-N = B$ è spesso: $\forall \mathcal{V} \in L$, $B \in \mathcal{V}$ e $L = \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U} \ni \mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U}$ $\forall n$ ($\mathcal{U}_n$ ultr. princ.)

$\Rightarrow B \in \mathcal{U}_n \oplus \mathcal{U} \Rightarrow B - n \in \mathcal{U}$ da cui $\{B - n\}$ ha la PIF. In altre parole, $\forall M \in \mathbb{N}$ $(B-1) \cap \dots \cap (B-M) \neq \emptyset \Rightarrow t \in (B-1) \cap \dots \cap (B-M) \Rightarrow$ $[t+1, t+M] \subseteq B$

(ex) B spesso $\Leftrightarrow \{B - n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha la PIF.

(ex) $\forall A$ sind. tratti $\exists \mathcal{U} \in L$, $A \in \mathcal{U}$. (in altre parole $\bigcup K = \{$sind. tratti$\}$).

OSS: questo esercizio implica il precedente.

IDEA: se B è spesso, $\exists\, \mathcal{U}$ ultra, $B - n \in \mathcal{U}$ $\forall n$. Allora $\forall \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U}$,
$B - n \in \mathcal{V}$ ...

COR: se $B = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ è ind. tr., allora $\exists i : C_i$ ind. tr.

DIMOSTRAZIONE

Prendo $\mathcal{U} \in K$ t.c. $B \in \mathcal{U}$. Allora $\exists i$ t.c. $C_i \in \mathcal{U} \Rightarrow C_i$ è indistr. a tratti

OSS: questo dà caratt. propr. fortem. e debolm. regolari per partizioni.

ex) A interno infinito $\Rightarrow |A| \geq c$.

ex) A interno inf. $\Rightarrow \exists \nu \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, $\exists \varphi : [1, \nu] \to A$ iniettiva.

ex) $|[1, \nu]| \geq c$ se ν è ∞.

SOLUZIONE

$\nu = [\sigma]$ con $\sigma(n) \in \mathbb{N}$ $\forall n$, $\forall m \in \mathbb{N}$ $\{n : \sigma(n) > m\} \in \mathcal{U}$.
Immergiamo $\{[0,1]\}^{\mathbb{N}}$ in $[1, \nu]$: $\forall k \in \mathbb{N}$ $Y_k = \{n : \sigma(n) \geq 2^k\} \in \mathcal{U}$. Se $n \in Y_k - Y_{k+1}$, $\sigma(n) \in [2^k, 2^{k+1})$. Mando $\eta \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ in $\bar{\eta}$ con $\bar{\eta}(n) = \sum_{i=1}^{k} \eta(i) \cdot 2^{i-1}$, con k t.c. $n \in Y_k - Y_{k+1}$. Chiaramente $\bar{\eta}(n) \leq \sigma(n)$, da cui $[\bar{\eta}] \in [1, \nu]$, $\bar{\eta}$ è b. d. perché $\bar{\eta}(n)$ è def. su $Y_1 \in \mathcal{U}$.

Supp. ora $\theta \neq \eta$: $\exists n$ t.c. $\eta(n) \neq \theta(n)$. Allora su $Y_{n+1} \in \mathcal{U}$ $\bar{\eta} \neq \bar{\theta}$.