ULTRAFILTRI MINIMALI

TEOREMA

Tfae: 1) $\mathcal{U}$ é minimale

2) $\forall A \in \mathcal{U}$ $\hat{A} = \{n : A-n \in \mathcal{U}\}$ é sindetico

3) $\forall \mathcal{V}\ \exists \mathcal{W} : \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$

DIMOSTRAZIONE

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Prendo $L \ni \mathcal{U}$ ideale sx minimale. Allora $\forall \mathcal{V} \in L$ $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} = L$, da cui $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}$ per un opportuno $\mathcal{W}$.

$A \in \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n : A-n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{W}$.

In particolare, $\exists \bar{n} : A-\bar{n} \in \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{V} \in \Theta_{A-\bar{n}}$.

Abbiamo dimostrato che $L \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Theta_{A-m}$. Dato che L é chiuso, quindi cpt, $\exists n_1 \ldots n_k : L \subseteq \Theta_{A-n_1} \cup \ldots \cup \Theta_{A-n_k}$

CLAIM: $(\hat{A}-n_1) \cup \ldots \cup (\hat{A}-n_k) = \mathbb{N}$ (quindi $\hat{A}$ é sindetico)

Prendo $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}_m \oplus \mathcal{U} \in L \Rightarrow \exists i : A-n_i \in \mathcal{U}_m \oplus \mathcal{U} \Rightarrow A-n_i-m \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow n_i + m \in \hat{A} \Rightarrow m \in \hat{A} - n_i$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Per ass. sia $\mathcal{V}$ t.c. $\forall \mathcal{W}$ $\mathcal{U} \neq \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, cioé $\mathcal{U} \notin \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Ma $\beta\mathbb{N} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}) = \mathrm{Im}(\psi_{\mathcal{V}\oplus\mathcal{U}})(\beta\mathbb{N})$ che é cpt, quindi chiuso.

Allora $\exists A \in \mathcal{U} : \Theta_A \cap (\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}) = \emptyset$, cioé $A \notin \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ per nessun $\mathcal{W}$.

Peró $A \in \mathcal{U} \Rightarrow \hat{A}$ sindetico $\Rightarrow (\hat{A}-n_1) \cup \ldots \cup (\hat{A}-n_k) = \mathbb{N}$.

Prendo $\hat{A} - n_i \in \mathcal{V} \Rightarrow \hat{A} \in \mathcal{U}_{n_i} \oplus \mathcal{V} \Rightarrow \{n : A-n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}_{n_i} \oplus \mathcal{V}$ $\Rightarrow A \in \mathcal{U}_{n_i} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \Rightarrow \perp$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Prendo $\mathcal{V}$ minimale, L ideale min. sx cui appartiene.

Allora $\exists \mathcal{W} : \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, $\mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \in L \Rightarrow (\mathcal{W} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{U}$ é minimale

COR: $A \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ minimale $\Rightarrow A$ sindetico a tratti

DIMOSTRAZIONE

Per hp $\exists\, n_1, \dots, n_k : (\hat{A} - n_1) \cup \dots \cup (\hat{A} - n_k) = \mathbb{N}$

TESI: $C = (A - n_1) \cup \dots \cup (A - n_k)$ é spesso.

OSS: C spesso $\Leftrightarrow \{C - m : m \in \mathbb{N}\}$ ha la PIF: $x \in (C-1) \dots (C-k)$

se $x, x+1, \dots, x+k \in C$.

La tesi segue perché $\{C - m : m \in \mathbb{N}\}$ ha la PIF perché ogni $C - m \in \mathcal{U}$. Infatti, per ogni m, $m \in \hat{A} - n_i \Rightarrow m + n_i \in \hat{A}$ $\Rightarrow A - m - n_i \in \mathcal{U}$: $C - m \supseteq (A - n_i) - m \in \mathcal{U}$.

TEOREMA

Se A é sindetico a tratti, $\exists\, \mathcal{U}$ minimale con $A \in \mathcal{U}$.

COR: $\overline{K(\beta \mathbb{N})} = \{\mathcal{U} : \forall A \in \mathcal{U}\ A$ è sindetico a tratti$\}$.

ATTENZIONE: $K(\beta \mathbb{N})$ non é chiuso

DIMOSTRAZIONE TEOREMA

$C = (A - n_1) \cup \dots \cup (A - n_k)$ é spesso per opportuni n_i.

Allora $\{C - m : m \in \mathbb{N}\}$ ha la PIF $\Rightarrow \exists\, \mathcal{V} \supseteq \{C - m : m \in \mathbb{N}\}$

$\beta \mathbb{N} \oplus \mathcal{V} \subseteq \mathcal{O}_C$, cioé $C \in \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}\ \forall \mathcal{W}$. Infatti $\{m : C - m \in \mathcal{V}\} = \mathbb{N} \in$

Prendo $\mathcal{W} \in \beta \mathbb{N} \oplus \mathcal{V}$ minimale, $C \in \mathcal{W} \Rightarrow \exists\, i : A - n_i \in \mathcal{W}$

$\Rightarrow A \in \sqcup_{n_i} \oplus \mathcal{W} \Rightarrow A \in \sqcup_{n_i} \oplus \mathcal{W}$ minimale.

VERSO IL TEOREMA DI JIN

Abbiamo visto $\overline{d}(A)>0 \Rightarrow A-A$ sindetico

(ex) $\exists A,B$ t.c. $\overline{d}(A), \overline{d}(B)>0$, ma $A-B$ non è sindetico

TEOREMA (JIN, 2000)

$\overline{d}(A), \overline{d}(B)>0 \Rightarrow A+B, A-B$ sindetico a tratti.

IDEA: si può dare top. su $^*\mathbb{N}$ dicendo che un aperto U ha la propr. che $\forall \xi \in U, (\xi-n, \xi+n) \subseteq U$ $\forall n$. Chiamiamo questa $\mathbb{N}$-topologia. Si dimostra che A non è sind. a tratti se $^*A$ è "nowhere dense", cioè $\forall$ aperto $\exists$ altro aperto disg. da $^*A$ contenuto nel 1°. In altre parole, A è sind. a tratti se è "somewhere dense".

LEMMA: $B = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ sind. a tratti $\Rightarrow \exists i: C_i$ è sind. tratti

DIMOSTRAZIONE

Basta $r=2$: supp. $A = B \sqcup N$. Per ipotesi $\exists$ intervallo I ∞ su cui $^*A$ ha solo buchi finiti - - - -[- - - - -]$_I$

Se in I N ha buchi limitati, tesi.

Altrimenti, $\exists J$ int. infinito senza neri (in N) $\Rightarrow B \cap J = A \cap J \Rightarrow B$ ha buchi finiti su J.

Per dimostrarlo, ho usato A interno (per gli interni, ogni intervallo è $[\xi, \eta]$).

DEF: la densità di Banach $BD(A)$ è $BD(A) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A\cap[x,x+n)|}{n}$

OSS: $BD(A) \geq \overline{d}(A)$

(ex) Esistono insiemi A con $\overline{d}(A) < BD(A)$

(ex) A spesso se $BD(A)=1$.

(ex) Trovare A t.c. $d(A)=0 \wedge BD(A)=1$

<u>PROP</u>: $\exists$ sempre $BD(A)$.

DIMOSTRAZIONE

<u>LEMMA</u> (Fekete): se $\{a_n\}$ é succ. non-negativa e subadditiva
$(a_{n+m} \leq a_n + a_m)$, allora $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$

Se chiamo $a_n := \max_{x\in\mathbb{Z}} |A \cap [x, x+n)|$ é chiaro che $a_{n+m} \leq a_n + a_m$.

DIMOSTRAZIONE LEMMA

Sia $l := \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$: voglio provare che $\forall \nu$ infinito $l \approx \frac{a_\nu}{\nu}$.
Fissato $k\in\mathbb{N}$, $\nu = \mu k + i$, $0 \leq i < k$. Allora $\frac{a_\nu}{\nu} = \frac{a_{\mu k + i}}{\mu k + i} \leq$
$\leq \frac{a_{\mu k} + a_i}{\mu k + i} \leq \frac{\mu a_k + a_i}{\mu k + i} \leq \frac{\mu a_k}{\mu k} + \frac{k}{\mu k} = \frac{a_k}{k} + \frac{1}{\nu} \approx \frac{a_k}{k}$.
Allora $st\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right) \leq \frac{a_k}{k}$ $\forall k \Rightarrow st\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right) \leq \inf \frac{a_k}{k}$. L'altra diseg. é banale.

(ex) $BD(A) \geq \alpha \Leftrightarrow \forall \nu$ inf. $\exists |I| = \nu$ con $\frac{|{}^*A \cap I|}{\nu} \gtrsim \alpha$
$\Leftrightarrow \exists I$ inf. con $\frac{|{}^*A \cap I|}{\nu} = \alpha$

(ex) A é k-sindetico a tratti (cioé k trasl. di A coprono uno spesso) $\Rightarrow BD(A) \geq \frac{1}{k}$

(ex) $* \; \forall\, 0 \leq r < 1 \; \exists A$ non sind. a tratti con $BD(A) > r$.

(ex) $BD(A) = \alpha > 0 \Rightarrow (A-A) \cap (X-X) \neq \emptyset$ per ogni $|X| \geq \left[\frac{1}{\alpha}\right]$

(ex) $* \; BD(A) > 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} BD(A + [-k,k]) = 1$

(ex) $* \; BD(A) + BD(B) > 1 \Rightarrow A+B, A-B$ spessi.

ESERCIZI

<u>DEF</u>: A é Δ-set se $\exists X \subseteq \mathbb{N}$, X inf. t.c. $X - X \subseteq A$

<u>DEF</u>: A é Δ_f-set se $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists X \subseteq \mathbb{N}$, $|X| = n$ t.c. $X - X \subseteq A$.

ex) Trovare Δ_f-set che non é Δ-set

SOLUZIONE

Scelgo $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ succ. e cons. $A_1 = \{a_1\}, A_2 = \{a_2, a_3\}, A_3 = \{a_4, a_5, a_6\}, \dots$

Consideriamo $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} FD(A_n)$ con $FD(X) = \bigcup X_n$, $X_{n+1} = X_n \cup (X_n - X_n)$.

Scelgo $a_n = 10^n$: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} FD(A_n)$ é Δ_f-set perché $FD(A_n)$ é chiuso per diff. finite e ha card. almeno n.

Supponiamo che $\exists X$ infinito con $X - X \subseteq FD(A_n)$, $X \subseteq F$. ERRORE SUO!

Dato che X é infinito, $\exists x_i, x_j$ t.c. $x_i \in A_i, x_j \in A_j$. Allora $x_j - x_i \notin A$, perché se $i > j$, $FD(A_i) \cap FD(A_j) = \emptyset$ perché $\min FD(A_i) = MCD(A_i) > \max A_j$

Inoltre, per $x_i \in A_i$, $x_j \in A_j$, $x_i < MCD(A_j)$, quindi $x_j - x_i \notin A_j$ ed é $> \max A_{j-1}$.

Per la dim. $\forall X$, se X é infinito, in $X - X$ esistono infiniti elementi a distanza $x_2 - x_1$ (cioé $(x_i - x_2, x_i - x_1)$). Dato che le dist. tra due el. di A crescono, A non ha questa proprietà.

DENSITA DI BANACH

(ex) A spesso $\iff BD(A) = 1$ (vedi miei appunti).

<u>DEF</u>: $\sigma(A) := \inf_n \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$ dens. di

<u>OSS</u>: $\sigma(A) = 1 \iff A = \mathbb{N}$

(ex) A k-sind. a tratti $\Rightarrow BD(A) \geq \frac{1}{k}$ (vedi miei appunti).

<u>OSS</u>: se $\underline{BD}(A) = \lim_{n\to\infty} \min_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x, x+n]|}{n}$ uguale al prec. si

dimostra che A k-sind. $\Rightarrow \underline{BD}(A) \geq \frac{1}{k}$.

(ex) $\exists A, B : \overline{d}(A), \overline{d}(B) > 0$, $A-B$ non sind.

SOLUZIONE

$A = \bigcup_i [3 \cdot 4^i, 4^{i+1}]$

$B = \bigcup_i [4^{i+1}, 5 \cdot 4^i]$

Allora $\overline{d}(A) \geq \frac{1}{4}$, $\overline{d}(B) \geq \frac{1}{5}$

Inoltre, $(5 \cdot 4^i, 3 \cdot 4^{i+1}) \in (A-B)^c$, quindi $(A-B)^c$ è spesso $\Rightarrow$ TESI.

Infatti, se $x \in (5 \cdot 4^i, 3 \cdot 4^{i+1})$, $x = a - b$; $a > \ldots$

<u>OSS</u>: A, B spessi

U45

Densità di Banach

Michele Borassi

7 dicembre 2012

Esercizio 1. *Un insieme A è spesso se e solo se* $\mathrm{BD}(A) = 1$.

Soluzione. Supponiamo che A sia spesso: in tal caso, per ogni n esiste x_0 tale che $[x_0, x_0 + n) \subseteq A$, quindi

$$\forall n \ \max_{x \in \mathbb{Z}} |A \cap [x, x+n)| = n.$$

In particolare, $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A\cap[x,x+n)|}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Viceversa, supponiamo che $BD(A) = 1$. In tal caso, sia $\varepsilon > 0$ e siano x, n tali che $\frac{|A\cap[x,x+n)|}{n} > 1 - \varepsilon$. In particolare, $|A \cap [x, x+n)| > n - \varepsilon n$, cioè $|[x, x+n) - A| < \varepsilon n$, da cui segue che $A \cap [x, x+n)$ contiene un intervallo lungo almeno $\lfloor \frac{n}{\varepsilon n} \rfloor = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$. Questo dimostra che A contiene intervalli arbitrariamente lunghi. OPPURE ALESSIO DICE $\lim_{n\to\infty} = \inf$, da cui segue la tesi direttamente! □

Esercizio 2. *Esiste un insieme A tale che* $\overline{\mathrm{d}}(A) = 0$ *ma* $\mathrm{BD}(A) = 1$.

Dimostrazione. Cerchiamo un insieme A spesso di densità superiore 0. Scegliamo $A := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (2^k - k, 2^k]$, e proviamo che verifica le ipotesi. Sicuramente è spesso perché per ogni k l'intervallo $(2^k - k, 2^k]$ è lungo k.

Inoltre, ha densità superiore nulla perché, dati n e $k(n)$ tale che $n \in (2^k, 2^{k+1}]$, $|A \cap [1, n]| \leq \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ e $n > 2^k$, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1, n]|}{n} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+1}} = 0.$$

□

Corollario 1. *Esistono insiemi A con* $\overline{\mathrm{d}}(A) < \mathrm{BD}(A)$.

Esercizio 3. *Le seguenti sono equivalenti:*

1. $\mathrm{BD}(A) \geq \alpha$;
2. $\forall \nu$ *infinito* $\exists I : |I| = \nu \wedge \frac{|{}^*A\cap I|}{\nu} \gtrsim \alpha$;
3. $\exists I$ *infinito con* $\frac{|{}^*A\cap I|}{|I|} \gtrsim \alpha$.

Soluzione. ($1 \Rightarrow 2$) Definiamo una funzione x_n in modo che, dato un numero $n \in \mathbb{N}$, $|A \cap [x_n, x_n + n)| \geq \sup_{y \in \mathbb{N}} |A \cap [y, y+n)| - \frac{1}{n}$.

Sia ν infinito, $\nu = [\varphi]$. Definisco $I_n = [x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} + \varphi(n)]$, $I = [I_n]$: chiaramente $|I| = \nu$.

Inoltre, dato che ν è infinito, $|{}^*A \cap I| = [|A \cap I_n|]$ e $|A \cap I_n| \geq \sup_{y \in \mathbb{N}} |A \cap [y, y + \varphi(n))| - \frac{1}{\varphi(n)}$ da cui $|{}^*A \cap I| \gtrsim [\sup_{y \in \mathbb{N}} |A \cap [y, y+\varphi(n))|]$.

Dato che $\sup_{y \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [y, y+\varphi(n))|}{n}$ tende a $\beta \geq \alpha$, $[|{}^*A \cap I|] \gtrsim [\sup_{y \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [y, y+\varphi(n))|}{n}] \approx \beta \geq \alpha$.

($2 \Rightarrow 3$) Immediato.

($3 \Rightarrow 1$) Supponiamo $I = [\mu, \nu]$ e sia $\mu = [\varphi]$, $\nu = [\psi]$. Considero $I_n := [\varphi(n), \psi(n)]$: per ogni ε, $\{n \in \mathbb{N} : |A \cap I_n| > \alpha - \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. In particolare, esiste una successione n_k crescente tale che $\lim_{k \to \infty} \frac{|A \cap I_{n_k}|}{n_k} \geq \alpha$, da cui $\mathrm{BD}(A) \geq \alpha$. □

Esercizio 4. *Se A è k-sindetico a tratti,* $\mathrm{BD}(A) \geq \frac{1}{k}$.

Dimostrazione. Dato che A è k-sindetico a tratti, esistono $n_1, \ldots, n_k$ tali che $B := (A + n_1) \cup \cdots \cup (A + n_k)$ è spesso. Pertanto, ${}^*B$ contiene un intervallo infinito $[\mu, \nu]$. Vogliamo provare che

$$\frac{|A \cap [\mu, \nu]|}{\nu - \mu} \gtrsim \frac{1}{k}.$$

Infatti, $\nu - \mu = |\bigcup_{i=1}^{k} (A + n_i) \cap [\mu, \nu]| \leq \sum_{i=1}^{k} |(A + n_i) \cap [\mu, \nu]| \leq k|A \cap [\mu, \nu]| + N$ per qualche $N \in \mathbb{N}$ (per esempio $N = \sum_i n_i$).

Pertanto, leggendo al contrario la catena di disuguaglianze precedenti,

$$k \frac{|A \cap [\mu, \nu]| + N}{\nu - \mu} \geq 1.$$

cioè $\frac{|A \cap [\mu, \nu]|}{\nu - \mu} \gtrsim \frac{1}{k}$, che è la tesi. □

Esercizio 5. *Per ogni $0 \leq r < 1$, esiste un insieme B che non è sindetico a tratti ma verifica* $\mathrm{BD}(B) > r$.

Dimostrazione. Partiamo dall'insieme $\mathbb{N}$, fissiamo una successione a_n e sia $A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} (ka_n, ka_n + n]$, $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dimostriamo che per ogni scelta di a_n l'insieme $B := \mathbb{N} - A$ non è sindetico a tratti.

Infatti, supponiamo che $B \cup (B+1) \cup \cdots \cup (B + n - 1)$ sia spesso: in particolare esso conterrà un intervallo più lungo di $a_n + n + 1$. Per ipotesi, questo intervallo contiene un punto della forma $ka_n + n$: questo implica che $ka_n + n \in B + i$ per qualche $i < n$, cioè $ka_n + n - i \in B$, il che è assurdo perché $ka_n + n - i \in (ka_n, ka_n + n] \subseteq A_n \subseteq A$.

Dimostriamo ora che possiamo scegliere la successione a_n in modo che $\underline{d}(B) > r$, il che implica $\mathrm{BD}(B) \geq \overline{d}(B) \geq \underline{d}(B) > r$. Dato che $|B \cap [1, N]| = N - |A \cap [1, N]|$, stimiamo quest'ultimo insieme:

$$|A \cap [1, N]| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n \cap [1, N]| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n \lfloor \frac{N}{a_n} \rfloor \leq N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n}.$$

U46

Scelti $a_n := \frac{\varepsilon}{n*2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_n} \leq \varepsilon$, quindi:

$$|B \cap [1,N]| = N - |A \cap [1,N]| \geq N - N\varepsilon$$

Questo implica che per ogni N, $\frac{|B\cap[1,N]|}{N} \geq 1 - \varepsilon$, da cui la tesi scegliendo ε abbastanza piccolo. □

Esercizio 6. *Un insieme A ha densità di Banach positiva se e solo se $\lim_{k\to\infty} \mathrm{BD}(A + [-k,k]) = 1$.*

Soluzione. ($\Leftarrow$): dimostriamo che $\mathrm{BD}(A \cup B) \leq \mathrm{BD}(A) + \mathrm{BD}(B)$, da cui se $\mathrm{BD}(A) = 0$, anche $\mathrm{BD}(A + [-k,k] = \mathrm{BD}(\cup_{i=-k}^{k} A + i = 0$.

$$\mathrm{BD}(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cup B \cap [x,x+n)|}{n} \leq \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x,x+n)|}{n} + \frac{|B \cap [x,x+n)|}{n} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x,x+n)|}{n} + \max_{y\in\mathbb{Z}} \frac{|B \cap [y,y+n)|}{n} = \mathrm{BD}(A) + \mathrm{BD}(B).$$

($\Rightarrow$): supponiamo che $\mathrm{BD}(A) = \delta > 0$. Sia N tale che $\frac{|A\cap[x,x+n)|}{n} < \delta + \varepsilon$ per ogni x e per ogni $n > N$.

Proviamo che la densità di Banach di $A + (-N,N) >?$. Sia $M = kN$ e x tale che $|A \cap [x,x+M)| \geq \delta M - \varepsilon$. Ciò significa che ???

□

Esercizio 7. *Se* $\mathrm{BD}(A) + \mathrm{BD}(B) > 1$, *allora $A + B$ e $A - B$ sono spessi.*

Dimostrazione. Basta provare che $A - B$ è spesso, dato che $\mathrm{BD}(B) = \mathrm{BD}(-B)$.

Siano $I = [i - N, i + N]$, $J = [j - N, j + N]$ intervalli di lunghezza N tali che $|A \cap I| + |B \cap J| > (2N+1)(1+\varepsilon)$ per qualche ε positivo non dipendente da N. Definiti $A' := A - i$ e $B' := B - j$, sappiamo che $|A' \cap [-N,N]| + |B' \cap [-N,N]| > (2N+1)(1+\varepsilon)$. Dimostriamo che $A' - B'$ contiene $(-2N\varepsilon, 2N\varepsilon)$, da cui segue che anche $A - B$ contiene un intervallo di lunghezza $4N\varepsilon$ (questo implica che $A - B$ è spesso).

Usiamo il principio del pigeonhole: $|A' \cap [-N,N]| + |(B'+k) \cap [-N,N]| \geq (2N+1)(1+\varepsilon) - |k|$: se $|k| < \varepsilon(2N+1)$, $|A' \cap [-N,N]| + |(B'+k) \cap [-N,N]| > 2N+1$, cioè esistono $a \in A', b \in B'$ tali che $a = b + k$, cioè $a - b = k$ e $k \in A' - B'$. Questo conclude la dimostrazione. □

TEOREMA DI JIN

DEF: X è finitamente immergibile in Y ($X \trianglelefteq Y$) se $\forall F \subseteq X$ finito $\exists z$ t.c. $z+F \subseteq Y$ (ovviamente $X, Y \subseteq \mathbb{N}$).
In altre parole, tutte le "configurazioni finite di X" si trovano anche in Y a meno di traslazioni.

OSS: gli insiemi $\trianglelefteq$ massimali sono gli spessi.

(ex) 1) Se $X \trianglelefteq Y$, X è AP-rich, allora Y è AP-rich

2) Se X è sindetico a tratti, $X \trianglelefteq Y$, allora Y è sind. a tratti

3) X sind., $X \trianglelefteq Y \not\Rightarrow Y$ sindetico.

4) $BD(X) \leq BD(Y)$ se $X \trianglelefteq Y$.

PROP: $X \trianglelefteq Y \iff \exists \xi \in {}^*\mathbb{Z} : \xi + X \subseteq {}^*Y$

(ex) Dimostrarla.

TEOREMA DI JIN (2000)

$BD(A), BD(B) > 0 \Rightarrow A+B$ sind. a tratti.

TEOREMA (PIÙ FORTE)

$A, B \subseteq \mathbb{Z}$, $BD(A), BD(B) > 0 \Rightarrow \exists F : |F| \leq \frac{1}{\alpha\beta} : (A-B)+F$ è spesso

DIMOSTRAZIONE

Abbiamo già visto che $E-E$ è sindetico $\forall E : BD(E) > 0$.

LEMMA 1: sia $N \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, $E \subseteq [1, N]$ interno t.c. $\frac{|E|}{N} \approx \delta > 0$.
Allora $\exists |F| \leq \frac{1}{\delta}$ t.c. $\mathbb{Z} \subseteq (E-E)+F$, $F \subseteq \mathbb{Z}$.

COR: $A \subseteq \mathbb{Z}$ $BD(A) > 0$. Allora $\exists |F| \leq \frac{1}{\delta}$ t.c. $\mathbb{Z} = (A-A)+F$

DIMOSTRAZIONE

Prendo un intervallo infinito tale che $\frac{|{}^*A \cap [\Omega+1, \Omega+N]|}{N} \approx \delta$.
$E := ({}^*A - \Omega) \cap [1, N]$. Per il lemma, $\mathbb{Z} \subseteq E-E+F \subseteq [({}^*A-\Omega)-({}^*A-\Omega)]+F =$

$= ({}^*A - {}^*A) + F = {}^*((A-A)+F)$.

Ma $\mathbb{Z} \subseteq {}^*B \iff B = \mathbb{Z}$ (altr. $\exists\, n \in \mathbb{Z} - B \Rightarrow n \in \mathbb{Z} - {}^*B$).

DIMOSTRAZIONE LEMMA 1

Definisco induttivamente gli elementi di F: $x_1 \dots x_m$.

1) $x_1 \in \mathbb{Z}$ a caso. Se $\mathbb{Z} \subseteq (E-E)+x_1$, allora $F = \{x_1\}$.

2) Altrimenti, $\exists\, x_2 \in \mathbb{Z}$ t.c. $x_2 \notin (E-E)+x_1 \iff \forall e, e' \in E\ x_2 \neq e - e' + x_1$
$\iff \forall e, e' \in E\ e' + x_2 \neq e + x_1 \iff (E+x_2) \cap (E+x_1) = \emptyset$.

3) Se $\mathbb{Z} \subseteq (E-E)+x_1 \cup \dots \cup (E-E)+x_k$, $F = \{x_1 \dots x_k\}$ e ok. Altr., prendo $x_{k+1} \in \mathbb{Z} - \bigcup_i (E-E)+x_i$; se $x_{k+1} \notin \bigcup_i (E-E)+x_i$, allora $\forall i\ (E+x_{k+1}) \cap (E+x_i) = \emptyset\ \forall i$.

Allora in un numero di passi al più $\frac{1}{\delta}$ devo fermarmi, altr. avrei famiglia $\{E+x_i : i = 1 \dots m+1\}$ fam. disg. con $m+1 > \frac{1}{\delta}$.

$\left|\bigcup_i (E+x_i)\right| = \sum_{i=1}^{m+1} |E+x_i| \geq \sum_{i=1}^{m+1} |E| - x_i \Rightarrow \frac{1}{N}\left|\bigcup_i (E+x_i)\right| \gtrsim \frac{(m+1)|E|}{N} \approx (m+1)\delta$, da cui $m+1 \leq \frac{1}{\delta}$, assurdo perché $m \geq \frac{1}{\delta}$.

IDEA DIMOSTR. TEO: esiste un traslato ∞ di ${}^*A$ che interseca ${}^*B$ in modo da avere densità relativa $\geq \alpha\beta$ su un intervallo infinito ($\alpha = BD(A)$, $\beta = BD(B)$).

CONTINUA...

(ex) $\mathcal{F}$ famiglia di ins. finiti chiusa per trasl. ($\forall F \in \mathcal{F}, \forall x\ F+x \in \mathcal{F}$),

DEF $\mathcal{F}$ è debolm. regolare per part. se $\forall N = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r\ \exists i, \exists F \in \mathcal{F}, F \subseteq C_i$.

Dimostr. che $\mathcal{F}$ è deb. regolare per partizione se $\forall A$ sind a tratti $\exists F \in \mathcal{F}$ t.c. $F \subseteq A$.

(ex) $\mathcal{D} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : \forall A \in \mathcal{U}\ BD(A) > 0\}$. Provare che $\mathcal{D} \neq \emptyset$, $\mathcal{D}$ è chiuso ed è ideale dx di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ e $(\beta\mathbb{N}, \odot)$. È ideale dx?

(ex) $\mathcal{D}' = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} - \mathbb{N} : \mathcal{U} \in \mathcal{D}\}$ è ideale ... di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ e di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ ...

DEF: una proprietà espressa in forma elementare relativa ad $A_1 \dots A_k$ è una proprietà espressa da una ε-formula al primo ordine $\varphi(A_1 \dots A_k)$ con parametri $A_1 \dots A_k$.

Come costruisco le formule? Ho un alfabeto con $\mathbb{N}$ variabili, $\wedge, \vee, \neg,), (, \forall, \exists, =, \in$. Costruisco formule indutt. a partire dalle atomiche. Definisco induttivamente chi sono le variabili libere VL.

In particolare, dico che se φ è formula dove x è libera e y non è legata, $\forall x \in y\, \varphi$, $\exists x \in y\, \varphi$ sono formule, mentre $\forall x \varphi$ no.

(non è legata $\equiv$ o compare libera o non compare).

DEF: le propr. elementari sono quelle scrivibili nella forma $\varphi(A_1 \dots A_k)$ dove alla variabile libera x_i si sostituisce A_i.

(es) X è una coppia ordinata di reali $\forall x$ "$\exists a, b \in \mathbb{R}: X = \{\{a\}, \{a, b\}\}$"

(es) "$A = \mathcal{P}(B)$" è propr. elem. di A e di $\mathcal{P}(B)$, ma non è pr. elementare di A, B.

(es) La propr. di completezza di $\mathbb{R}$ non è propr. elementare di $\mathbb{R}$, ma è propr. elem. di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(es) La propr. di Archimede è elementare di $(\mathbb{R}, \mathbb{N})$, ma non di $\mathbb{R}$.

PRINCIPIO TRANSFER

Data formula $\varphi(A_1 \dots A_n)$, vale $\varphi(A_1 \dots A_n) \Longleftrightarrow \varphi({}^*A_1, \dots, {}^*A_n)$.

(es) $\forall A \subseteq \mathbb{N}, A \neq \emptyset$ A ha minimo, ma NON VALE $\forall A \subseteq {}^*\mathbb{N}, A \neq \emptyset$ A ha minimo. $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ vuol dire $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, quindi vale che $\forall A \in {}^*(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $A \neq \emptyset$, A ha minimo.

OSS: $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $X \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow \forall X \in {}^*\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ${}^*X \subseteq {}^*\mathbb{N}$, cioè ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}({}^*\mathbb{N})$

Non vale il viceversa: $^*\wp(\mathbb{N})$ è fatto solo dagli insiemi interni.

FINE DIMOSTRAZIONE JIN

14/12

<u>LEMMA 2</u>: $C \subseteq [1,n]$, $D \subseteq [1,m]$ (idea $n >> m$) $\Rightarrow \exists \bar{x}$ t.c.

$$\frac{|(C-x)\cap D|}{m} \geq \frac{|C|}{n} \cdot \frac{|D|}{m} - \frac{|D|}{n}$$ (nella dim. $n = N$, $m = \nu$).

Prendo N, ν infiniti t.c. $\frac{\nu}{N} \approx 0$. Se $BD(A) = \alpha$, detto $a_n := \max_{x \in \mathbb{Z}} |A \cap [x, x+n)|$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$, cioè $\forall \mu$ infinito, $\frac{a_\mu}{\mu} \approx \alpha$.

Abbiamo provato che $BD(A) = \alpha \Longleftrightarrow \forall M$ inf. $\exists |I| = M$ $\frac{|^*A \cap I|}{M} \approx \alpha$.

Se $BD(A) = \alpha > 0$, $\exists [\Omega+1, \Omega+N]$ t.c. $\frac{|^*A \cap [\Omega+1, \Omega+N]|}{N} \approx \alpha$.

Idem per B: $\exists [\Xi+1, \Xi+\nu]$ t.c. $\frac{|^*B \cap [\Xi+1, \Xi+\nu]|}{\nu} \approx \beta$.

Prendo $C := (^*A - \Omega) \cap [1,N] \subseteq [1,N]$, $D = (^*B - \Xi) \cap [1,\nu]$.

Applico lemma 2 e transfer: $\exists \xi$: $\frac{|(C-\xi)\cap D|}{\nu} \geq \frac{|C|}{N} \cdot \frac{|D|}{\nu} - \frac{|D|}{N} \approx$
$\approx \alpha \cdot \beta$ perché $\frac{|D|}{N} \leq \frac{\nu}{N} \approx 0$.

Sia $Z := (C-\xi) \cap D \subseteq [1,\nu]$, $\frac{|Z|}{\nu} \gtrsim \alpha\beta$.

Per lemma 1 $\exists |F| \leq \frac{1}{\alpha\beta}$, $F \subseteq \mathbb{Z}$: $\mathbb{Z} \subseteq (Z-Z)+F$

$Z - Z \subseteq (C-\xi) - D \subseteq (^*A - \Omega - \xi) - (^*B - \Xi) = {}^*A - {}^*B - \mu$, da cui $\mathbb{Z} \subseteq (^*A - {}^*B) + F - \mu \Longleftrightarrow \mu + \mathbb{Z} \subseteq {}^*(A-B+F)$.

Allora $^*(A+B-F)$ contiene intervallo $\infty \Rightarrow A-B+F$ è spesso.

DIMOSTRAZIONE LEMMA 2

$\chi_C : [1,N] \longrightarrow \{0,1\}$ funz. car. di C. $\forall d \in D$, $\sum_{x=1}^{N} \chi_C(x+d) = |[d+1, d+N] \cap C| =$
$= |(C-d) \cap [1,N]| = |C| + e(d)$ con $e(d)$ errore, $e(d) \leq d$

$$\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} \frac{1}{\nu}\sum_{d\in D} \chi_C(x+d) = \frac{1}{N\nu}\sum_{d \in D}\sum_{x=1}^{N} \chi_C(x+d) = \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D} |C| + e(d) =$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{d\in D}\frac{|C|}{N} + e \quad \text{con } |e| = \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D} e(D) \leq \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D} d \leq \frac{1}{N\nu}\sum_{d\in D}\nu = \frac{|D|}{N}$$

$$= \frac{|C|}{N}\frac{|D|}{\nu} + e \geq \frac{|C|}{N}\frac{|D|}{\nu} - \frac{|D|}{N}$$

dovremo provare che $\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N}\frac{1}{\nu}\sum_{d\in D}\chi_C(x+d)\geq\frac{|C|}{N}\frac{|D|}{\nu}-\frac{|D|}{N}$

Dato che la media è $\geq$ RHS, esiste almeno un elemento $\bar{x}$ tale che $\frac{1}{\nu}\sum_{d\in D}\chi_C(\bar{x}+d)\geq\frac{|C|}{N}\frac{|D|}{\nu}-\frac{|D|}{N}$

$\frac{|(D+\bar{x})\cap C|}{\nu}$ che è la tesi!!!

ESERCIZI

DEF: $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{N})$ debolm. reg. per part. se $\forall\ \mathbb{N}=C_1\sqcup\ldots\sqcup C_r$ $\exists i: C_i\in\mathcal{S}$

DEF: $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}(\mathbb{N})$ regolare per part. se $C_1\sqcup\ldots\sqcup C_r\in\mathcal{S}\Rightarrow\exists i\ C_i\in\mathcal{S}$

(ex) TFAE: 1) $\mathcal{S}$ è debolm. reg. per part.

2) $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}=\{A\subseteq\mathbb{N}: A^c\notin\mathcal{S}\}$ ha la FIP

3) $\exists\ \mathcal{U}\subseteq\mathcal{S}$ ultrafiltro

(ex) TFAE: 1) $\mathcal{S}$ è reg. per part. ed è chiuso per sopransiemi

2) $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ è filtro

3) $\mathcal{S}$ è unione di ultrafiltri, precisamente $\mathcal{S}=\bigcup\{\mathcal{U}:\mathcal{U}\supseteq\mathcal{F}_{\mathcal{S}}\}$

(es) Insiemi infiniti, $\{A\subseteq\mathbb{N}: \bar{d}(A)>0\}$

OSS: questo dimostra che $\exists$ ultrafiltri fatti di ins. di densità >0.

(ex) Se $\mathcal{S}$ è reg. per part. e chiuso per soprains., $\bigcap_{B\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}}\mathcal{O}_B=$ $=\bigcap_{A\notin\mathcal{S}}\mathcal{O}_{A^c}$ che è chiuso: chi è? Sarà $\{\mathcal{U}\supseteq\mathcal{F}_{\mathcal{S}}\}$

(ex) Non si sa se è facile, a lui piacerebbe risolverlo: I interv. infinito, $\mathcal{D}_I=\{\mathcal{U}:\forall A\in\mathcal{U}\ \frac{|^*A\cap I|}{|I|}>0\}\subseteq\mathcal{D}=\{\mathcal{U}:\forall A\in\mathcal{U}\ BD(A)>0\}$

È vero che $\mathcal{D}=\bigcup_I\mathcal{D}_I$?

In altre parole, è vero che $\forall\,\mathcal{U}\in\mathcal{D}\ \exists I$ infinito t.c. $\forall A\in\mathcal{U}$ $\frac{|^*A\cap I|}{|I|}\not\approx 0$?

(ex) $\mathcal{S}$ famiglia debol. reg. per part., $\overline{\mathcal{S}} :=$ la più grande sottofamiglia di $\mathcal{S}$ che è P.R., cioè $\overline{\mathcal{S}} = \bigcup \{\mathcal{U} \text{ ultra}: \mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}\}$

1) $\overline{\text{Schur}} \neq \{\text{addit. grandi}\}$ Questo equivale a trovare A non add. grande t.c. $\forall A = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \ \exists C_i \in \text{Schur}$

2) APERTO: $\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \exists a \neq b \ \ a, b, a+b, ab \in A\}$ è deb. P.R.?

3) $\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \exists X \text{ infinito} : X \underline{+} X \subseteq A\}$ è debo. reg. per part., non è reg. per part. APERTO: $\overline{\mathcal{S}} = \{\text{add. grandi}\}$?

4) APERTO: $x^2 + y^2 = z^2$ è WP R.? Cioè, $\forall \mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \ \exists x, y, z$ che la risolvono?

risolto nel 2011 da Hindman. Il proble. aperto è con 3 elementi a, b, c.

LEGAME TRA $\beta\mathbb{N}$ E $^*\mathbb{N}$ 19/12 USO

<u>DEF</u>: $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$: $\mathcal{U}_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} : \alpha \in {}^*A\}$

<u>PROP</u>: $\mathcal{U}_\alpha$ é ultra, é princ $\iff \alpha = n \in \mathbb{N}$.

<u>COR</u>: esiste $\Psi : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$
$\alpha \longmapsto \mathcal{U}_\alpha$

<u>DEF</u>: la proprietà di "C^+-enlargement" é verificata se $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con la PIF, $|\mathcal{F}| \leq c$, allora $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} {}^*A \neq \emptyset$

<u>OSS</u>: se $|\mathcal{F}| = \aleph_0$, la propr. vale (già visto).

(ex) L'insieme degli ultra $\{\mathcal{U}_\alpha : \alpha \in {}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}\}$ é esattamente $\{\mathcal{V} : \mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}\}$

<u>COR</u>: se ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, Ψ non é suriettiva.

<u>PROP</u>: esiste ultra $\mathcal{W}$ su $|I| = c$ t.c. su ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^I/\mathcal{W}$ vale la propr. di C^+-enlargement.

DIMOSTRAZIONE

$I = \mathcal{F}in(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, che ha card. c. $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ sia $\tilde{A} := \{i \in I : A \in i\}$.
$\{\tilde{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$ ha la PIF perché $i = \{A_1 \dots A_m\} \in \tilde{A}_1 \cap \dots \cap \tilde{A}_m$.
Prendo $\mathcal{W}$ ultra che estende $\{\tilde{A} : A \subseteq \mathbb{N}\}$, ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^I/\mathcal{W}$.
Se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ha la PIF, definisco $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{N}$ indicizzando $\mathcal{F} = \{X_A : A \subseteq \mathbb{N}\}$ e ponendo $\varphi(i) \in X_{A_1} \cap \dots \cap X_{A_m}$ con $i = \{A_1 \dots A_m\}$.
Costringo che $[\varphi] \in {}^*X_A$ per ogni A: $\{i \in I : \varphi(i) \in X_A\} \supseteq \{i \in I : A \in i\} = \tilde{A} \in \mathcal{W}$.
Da qui in poi ${}^*\mathbb{N}$ soddisfa C^+-enlargement.
Allora $\Psi : {}^*\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ é suriettiva.
É iniettiva?

(ex) Supp. ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$. Allora Ψ é ini $\iff \mathcal{U}$ é Hausdorff (ex) Se Ψ è suriettiva, allora non è iniettiva.

<u>DEF</u>: $\alpha \sim_u \beta \iff \mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{U}_\beta \overset{(ex)}{\iff} \forall A \subseteq \mathbb{N} \ \alpha \in {}^*A \leftrightarrow \beta \in {}^*A$.

<u>OSS</u>: $\alpha \neq \beta$, $\alpha \sim_u \beta \Rightarrow |\beta - \alpha|$ è infinita. Se $\alpha < \beta$, $n \mid \beta - \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONE

$\beta \equiv i \mod n \Rightarrow \beta \in {}^*\{K : K \equiv i \mod n\} \Rightarrow \alpha \in {}^*\{K : K \equiv i \mod n\}$.

(ex) 1) $f(\mathfrak{U}_\alpha) = \mathfrak{U}_{{}^*f(\alpha)}$

2) $\alpha \sim_u \beta \Rightarrow {}^*f(\alpha) \sim_u {}^*f(\beta)$

3)* ${}^*f(\alpha) \sim_u \alpha \Rightarrow {}^*f(\alpha) = \alpha$ <u>HINT</u>: $f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \Rightarrow f \equiv_u Id$.

(es) $A \in \mathfrak{U}_\gamma \oplus \mathfrak{U}_\delta \iff \{n : A - n \in \mathfrak{U}_\delta\} \in \mathfrak{U}_\gamma \iff \{n : \delta \in {}^*(A - n) = {}^*A - n\}$

$\iff \gamma \in {}^*\{n : \delta + n \in {}^*A\} \iff A_\delta\{n : \delta + n \in {}^*A\} \in \mathfrak{U}_\gamma$.

<u>OSS</u>: $A_\delta = ({}^*A - \delta) \cap \mathbb{N}$

(es) $\mathbb{D} = \{\mathcal{U} : \forall A \in \mathcal{U} \ BD(A) > 0\}$ è ideale bilatero di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$.

Si vede facilmente che è ideale sx: prendo $B \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \iff$ $\{n : B - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$, quindi $\exists \bar{n} : B - \bar{n} \in \mathcal{U}$, cioè $BD(B - \bar{n}) > 0 \Rightarrow$ $BD(B) > 0$.

Vediamo che è ideale dx: $\mathcal{U} = \mathfrak{U}_\alpha$, $\mathcal{V} = \mathfrak{U}_\beta$, $\mathcal{U} \in \mathbb{D}$.

$B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \iff A_\beta := \{n : \beta + n \in {}^*B\} \in \mathfrak{U}_\alpha = \mathcal{U} \Rightarrow BD(A_\beta) > 0$. Ma $\beta + A_\beta \subseteq {}^*B$, cioè $A_\beta \trianglelefteq B \Rightarrow 0 < BD(A_\beta) \leq BD(B)$.

(es) Centro$(\beta\mathbb{N}, \oplus) = \mathbb{N}$

<u>PROP</u>: sia $\{x_n\}$ succ. crescente di naturali t.c. $\lim_{n \to \infty} x_{n+1} - x_n = +\infty$.
Sia $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_{2n}, x_{2n+1})$, $A^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_{2n-1}, x_{2n})$. Allora $\forall \mathcal{U}$ non princ. $\exists \mathcal{V}$ non pr. t.c. $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \iff A \notin \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}=\mathcal{U}_\alpha$ $^*A$ e $^*A^c$ sono fatti di intervalli ∞

<u>CASO 1</u>: $\alpha+n \in {}^*A$ definitivamente

<u>CASO 2</u>: $\alpha+n \in {}^*A^c$ "

Vediamo il caso 1: $\alpha+n \in [x_{2\nu}, x_{2\nu+1}]$ defin. scelgo $\mathcal{V}=\mathcal{U}_{x_{2\nu+1}}=\mathcal{U}_\beta$

$A \in \mathcal{U}_\alpha \oplus \mathcal{U}_\beta \Leftrightarrow \{n : \beta+n \in {}^*A\} \in \mathcal{U}_\alpha \Leftrightarrow$ FALSE perché

$\emptyset = \{n : \beta+n \in {}^*A\}$.

$A \in \mathcal{U}_\beta \oplus \mathcal{U}_\alpha \Leftrightarrow \overbrace{\{n : \alpha+n \in {}^*A\}}^{\text{COFINITO}} \in \mathcal{U}_\beta$, dunque $A \in \mathcal{U}_\beta \oplus \mathcal{U}_\alpha$.

ULTRAFILTRI E SISTEMI DINAMICI

<u>DEF</u>: un sistema dinamico topologico è $(X, \{T_i\}_{i\in I})$ con X sp. top. cpt, $T_i : X \to X$ continue, $\{T_i\}$ chiuso per composiz.

<u>DEF</u>: un s.d.t. è discreto se $\{T_i\}_{i\in I} = \{T^i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

<u>DEF</u>: $x\in X$ si dice pt di ricorrenza se $\forall U$ intorno di x $\exists$ $n>0$ t.c. $T^n x \in \mathcal{U}$ (equiv: $x \in \overline{Orb(x)}$ con $Orb(X)=\{T^n x\}$).

<u>DEF</u>: $x\in X$ è uniformemente ricorrente se $\forall U$ intorno di x $\exists K$ t.c. $\forall n$ $T^{n+i} x \in U$ per qualche $i \leq K$, cioè se $\{n : T^n x \in U\}$ è sindetico.

<u>OSS</u>: sono equivalenti: 1) $\forall x \in X$ $Orb(x)$ è denso in X

2) (X,T) min, cioè $\forall Y \subseteq X$ chiuso e T-inv., $Y=X$.

DIMOSTRAZIONE

$\boxed{1\Rightarrow 2}$ $Y \subseteq X$ T-inv.: $\forall y \in Y$ $Orb(y) \subseteq Y \Rightarrow \overline{Orb(y)} = X \subseteq \overline{Y} = Y$.

$\boxed{2\Rightarrow 1}$ $\overline{Orb(x)}=Y$ è cpt, $TY \subseteq Y$ per cont. $T \Rightarrow Y=X$.

TEOREMA

1) (X,T) minimale $\Rightarrow$ ogni $x\in X$ è unif. ricorrente

2) Se $x \in X$ è unif. ric., $(\overline{Orb(x)}, i)$ è minimale

DIMOSTRAZIONE

1) Prendo $x \in X$, U int. aperto di x

<u>LEMMA</u>: $X_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}U = X$

Per il lemma, $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}U \Rightarrow X = \bigcup_{n=0}^{K} T^{-n}U \Rightarrow \forall n \; T^n x \in U$ o $T^n(x) \in T^{-1}U$ o ... o $T^n x \in T^{-K}U \Rightarrow T^n x \in U$ o ... o $T^{n+K} x \in U$

DIMOSTRAZIONE LEMMA

$Ty \in X_\infty \Rightarrow y \in X_\infty$ (X_∞ chiuso per T^{-1}).

Se per assurdo $X_\infty \neq X$, se $y \notin X_\infty$, $Orb(y) \in X_\infty$, cioè X_∞^c è T-invariante e chiuso $\Rightarrow$ assurdo per minimalità.

2) Esercizio.

TEOREMA BIRKHOFF

Ogni sistema (X, T) ha punti uniformemente ricorrenti (Zorn per trovare $Y \subseteq X$ chiuso T-inv. minimale).

Ora considero SHIFT $\sigma : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{U} \oplus 1$, che è continua, $(\beta\mathbb{N}, \sigma)$ sist. din.

<u>PROP</u>: sono equivalenti: 1) I ideale sx chiuso di $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$
2) I σ-invariante chiuso.

DIMOSTRAZIONE

$\forall \mathcal{U} \in I$, $\mathbb{N} \oplus \mathcal{U} \subseteq I \Rightarrow \overline{\mathbb{N} \oplus \mathcal{U}} \subseteq I \Rightarrow \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U} \subseteq I$.

<u>COR</u>: $\mathcal{U}$ minimale $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ pt unif. ricorr. in $(\beta\mathbb{N}, \sigma)$

Sappiamo che $\mathcal{U}$ è min. se $\forall A \in \mathcal{U}$ $\hat{A} := \{n : A - n \in \mathcal{U}\}$ è sindetico, ma $\hat{A} = \{n : \sigma^n(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}_A\}$ che è def. pt uniforme ricorrenza.

ex) $^*\mathbb{N}$ con la S-top. è spazio cpt perché ammisero $\mathfrak{c}^+$-enlarg.

Infatti siano $\{C_i \; i \in I\}$ famiglia di chiusi con la FIP, wlog C_i della base $\Rightarrow \bigcap C_i \neq \emptyset$

Vediamo: $^*\mathbb{N}$ non è Hausdorff. (neanche T_2).

<u>FATTO</u>: si possono però separare pt da chiusi, cioè $^*\mathbb{N}$ è regolare.
Questo basta per dare tutte le <u>definizioni precedenti</u>.
Abbiamo usato reg. per provare che $(\overline{Orb(x)}, T)$ è minimale.
Ma $^*\mathbb{N}/_{\sim_u} = \beta\mathbb{N}$ ha senso considerare il s.d.t. $(^*\mathbb{N}, S)$ con $S(\xi) = \xi + 1$.

TEOREMA
I punti unif. ric. di $(^*\mathbb{N}, S)$ sono i pt α t.c. $\mathcal{U}_\alpha$ è minimale.

<u>OSS</u>: dato $\alpha \in {}^*A$, $\mathcal{U}_\alpha$ è minimale se $\forall A \in \mathcal{U}_\alpha$, $\{n : \alpha + n \in {}^*A\} = A_\alpha$ è sindetico.

$\alpha + A_\alpha \subseteq {}^*A \Rightarrow A_\alpha \trianglelefteq A \Rightarrow A$ sindetico a tratti.

<u>FATTO</u>: $(^*\mathbb{N}, S)$ è <u>universale</u>, cioè al suo interno contiene tutti i sistemi dinamici

Cioè $\forall x \in X$, (X, T) sist. din., $\exists\, \varphi_x : {}^*\mathbb{N} \to X$ dove $\varphi_x(\nu) = st({}^*T^\nu(x))$

Più in generale, X cpt $\Leftrightarrow \forall \xi \in {}^*X$ $\xi \approx x \in X$, cioè $\xi \in \bigcap_{U \text{ int } x} {}^*U$.

<u>FATTO</u>: $\forall x \in X$ il diagr. commuta
$$\begin{tikzcd} {}^*\mathbb{N} \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\varphi_x"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\varphi_x"] \\ X \arrow[r, "T"] & X \end{tikzcd}$$

VEDERE www.dm.unipi.it/~dinasso/ULTRABIBLIO

VENERDÌ 9,30 AULA M1