ULTRAFILTRI E METODI NONSTANDARD
IN TEORIA COMBINATORIA DEI NUMERI

MAURO DI NASSO

1. Filtri e ultrafiltri

Iniziamo introducendo le fondamentali nozioni di filtro e ultrafiltro.

Definizione 1.1. Un *filtro* $\mathcal{F}$ su un insieme I una famiglia di sottoinsiemi di I tale che:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $I \in \mathcal{F}$;
(2) Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B$ allora $B \in \mathcal{F}$;
(3) Se $A, B \in \mathcal{F}$ allora $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Ricordiamo che una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* (in breve FIP, cioè "finite intersection property") se ogni intersezione finita di elementi in $\mathcal{F}$ è non vuota:

$$\forall\ A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \quad A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset.$$

Dunque un filtro è una famiglia non vuota di insiemi che soddisfa la FIP ed è chiusa per soprainsieme. Se $\mathcal{G}$ è una famiglia (non vuota) con la FIP, allora

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \{B \mid \exists\, G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}\ \textit{t.c.}\ B \supseteq G_1 \cap \ldots \cap G_n\}$$

è un filtro, che si dice *filtro generato* da $\mathcal{G}$.

Esempio 1.2. Per ogni sottoinsieme $X \subseteq I$, la famiglia

$$\mathcal{F}_X = \{A \subseteq I \mid X \subseteq A\}$$

è un filtro, detto *filtro principale* generato da X.

Un esempio molto importante di filtro è il seguente.

Esempio 1.3. Il *filtro di Frechet* su un insieme infinito I è il filtro costituito da tutti gli insiemi *cofiniti*, cioè dagli insiemi con complementare finito:

$$\mathrm{Fr}(I) = \{A \subseteq I \mid A^c\ \textit{è finito}\}.$$

Notiamo che $\mathrm{Fr}(I)$ è non principale.

Intuitivamente, un filtro $\mathcal{F}$ potrebbe essere pensato come una famiglia di insiemi "grandi" rispetto ad una opportuna nozione di grandezza stabile per intersezioni finite. Per questo talvolta diremo che un insieme A è "$\mathcal{F}$-grande" per intendere che $A \in \mathcal{F}$. Tuttavia, questa interpretazione può essere fuorviante. Infatti, dato un qualunque insieme infinito $X \subseteq I$ "piccolo" rispetto ad I quanto si vuole, si possono prendere filtri non principali $\mathcal{F}$ su I che contengano X. Chiaramente, X sarebbe allora "$\mathcal{F}$-grande" mentre il complementare X^c non lo sarebbe. Per questo, sembra più appropriato pensare agli insiemi di un filtro come agli insiemi "importanti" o "qualificati" rispetto ad un'opportuna qualità che non corrisponde necessariamente ad un'idea di grandezza.

Proposizione 1.4. *Sia $\mathcal{F}$ un filtro su un insieme I. Allora sono proprietà equivalenti:*

(1) $A \notin \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$.
(2) $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow\ \exists i\ A_i \in \mathcal{F}$.
(3) *$\mathcal{F}$ è un filtro* massimale *rispetto all'inclusione.*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supponiamo per assurdo che $A_i \notin \mathcal{F}$ per tutti gli i. Allora per l'ipotesi (1) avremmo che i complementari $A_i^c \in \mathcal{F}$ per tutti gli i. Dunque, per la FIP, anche l'intersezione

$$A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c = (A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c \in \mathcal{F}.$$

Questo assurdo, perchè contraddice l'ipotesi $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se $\mathcal{F}$ non è massimale, esiste un filtro $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ che lo estende propriamente. Prendo allora $X \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$. In particolare, il complementare $X^c \notin \mathcal{F}'$, e quindi anche $X^c \notin \mathcal{F}$. Ma allora $I = X \cup X^c \in \mathcal{F}$ sarebbe l'unione di due insiemi che non appartengono al filtro $\mathcal{F}$, contro la (2).

(3) $\Rightarrow$ (1). Supponiamo per assurdo che $A, A^c \notin \mathcal{F}$, e consideriamo la famiglia di insiemi:

$$\mathcal{G} = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}.$$

Dimostriamo che $\mathcal{G}$ ha la FIP. Se $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$, allora $(F_1 \cap A) \cap \ldots \cap (F_n \cap A) = F \cap A$ dove $F = F_1 \cap \ldots \cap F_n \in \mathcal{F}$. Chiaramente $F \cap A \neq \emptyset$, altrimenti $F \subseteq A^c$ implicherebbe che $A^c \in \mathcal{F}$, contro la nostra assunzione. Consideriamo ora il filtro $\mathcal{F}' = \langle \mathcal{G} \rangle$ generato da $\mathcal{G}$. Notiamo che $\mathcal{F}'$ è un filtro che estende propriamente $\mathcal{F}$. Infatti $F = F \cap I \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$ per ogni $F \in \mathcal{F}$, e inoltre $A = I \cap A \in \mathcal{G} \Rightarrow A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$. Questo contraddice la massimalità di $\mathcal{F}$. □

Definizione 1.5. Un filtro che soddisfi una (e quindi tutte) le proprietà precedenti è detto *ultrafiltro*.

Esercizio 1.6. Due ultrafiltri $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$ sono diversi se e solo se esiste X tale che $X \in \mathcal{U}$ e il complementare $X^c \in \mathcal{V}$.

Su ogni insieme infinito I, il filtro di Frechet $\mathrm{Fr}(I)$ *non* è un ultrafiltro. Infatti, basta prendere un insieme infinito $A \subset I$ il cui complementare A^c sia infinito, ed abbiamo che $A, A^c \notin \mathrm{Fr}(I)$.

Esempio 1.7. Per ogni elemento $i \in I$, il filtro generato dal singoletto $\{i\}$:

$$\mathcal{U}_i \ = \ \mathcal{F}_{\{i\}} \ = \ \{A \subseteq I \mid i \in I\}$$

è un ultrafiltro, detto *ultrafiltro principale* generato da i.

In realtà, questi sono gli unici esempi possibili di ultrafiltri principali. Infatti:

Proposizione 1.8. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su un insieme infinito I. Allora sono proprietà equivalenti:*

(1) *$\mathcal{U}$ è principale.*
(2) *$\mathcal{U} = \mathcal{U}_i$ è l'ultrafiltro principale generato da un elemento $i \in I$.*
(3) *Il filtro di Frechet $Fr(I) \not\subseteq \mathcal{U}$ non è incluso in $\mathcal{U}$.*
(4) *Esiste un insieme finito $F \in \mathcal{U}$.*

Dim. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Una implicazione è banale. Viceversa, sia $\mathcal{U} = \mathcal{F}_X$ principale e supponiamo per assurdo che X contenga almeno due elementi. Allora, preso $x \in X$, da $\{x\} \cup (X \setminus \{x\}) = X \in \mathcal{U}$ seguirebbe per la proprietà di ultrafiltro che $\{x\} \in \mathcal{U}$ o $X \setminus \{x\} \in \mathcal{U}$. Questo contraddice l'ipotesi $\mathcal{U} = \mathcal{F}_X$ perché né $\{x\}$ nè $X \setminus \{x\}$ includono X.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se fosse $\mathrm{Fr}(I) \subseteq \mathcal{U}$ allora per ogni $i \in I$ avremmo $\{i\}^c \in \mathcal{U}$, e dunque $\{i\} \notin \mathcal{U}$ per ogni $i \in I$, cioè $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}_i$ per ogni $i \in I$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Per ipotesi esiste $X \in \mathrm{Fr}(I)$ con $X \notin \mathcal{U}$. Dalla proprietà di ultrafiltro, segue allora che il complementare X^c, che è un insieme finito, appartiene ad $\mathcal{U}$.

(4) $\Rightarrow$ (2). Prendiamo un insieme finito $F = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{U}$. Per la proprietà di ultrafiltro, da $\{i_1\} \cup \ldots \cup \{i_k\} = F \in \mathcal{U}$ segue che $\{i_s\} \in \mathcal{U}$ per un opportuno i_s. Ma allora $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{i_s}$. $\square$

L'esistenza di ultrafiltri non principali (che sono gli ultrafiltri che estendono il filtro di Frechet) è garantita dal Lemma di Zorn, che è una delle forme equivalenti dell'assioma di scelta.

Teorema 1.9. *Per ogni filtro $\mathcal{F}$ su un insieme I, esiste un ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ che lo estende.*

Dim. Sia $\mathbb{G} = \{\mathcal{G}$ filtro su $I \mid G \supseteq \mathcal{F}\}$. La famiglia $\mathbb{G}$ è parzialmente ordinata per inclusione. Per poter applicare il Lemma di Zorn, occorre dimostrare l'esistenza di un maggiorante per ogni catena. Sia dunque $\langle \mathcal{G}_j \mid j \in J \rangle$ una catena di elementi di $\mathbb{G}$. Banalmente, l'unione $\mathcal{G} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{G}_j$ include tutti i $\mathcal{G}_j$ (e dunque anche $\mathcal{F}$). Perché sia un maggiorante, resta da dimostrare che $\mathcal{G} \in \mathbb{G}$, cioè che $\mathcal{G}$ è un filtro. Se $A, B \in \mathcal{G}$, allora $A \in \mathcal{G}_{j_1}$ e $B \in \mathcal{G}_{j_2}$ per opportuni $j_1, j_2 \in J$. Ma $\langle \mathcal{G}_j \mid j \in J \rangle$ è una catena, dunque sarà $\mathcal{G}_{j_1} \subseteq \mathcal{G}_{j_2}$ (o viceversa). Quindi $A, B \in \mathcal{G}_{j_2} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{G}_{j_2} \subseteq \mathcal{G}$. La verifica che $\mathcal{G}$ è anche chiuso per soprainsieme è immediata. Possiamo finalmente applicare il Lemma di Zorn, ed ottenere l'esistenza di un elemento $\mathcal{U}$ massimale in $\mathbb{G}$, che è l'ultrafiltro cercato. $\square$

In un senso preciso, non si possono definire ultrafiltri non principali.[1] In altre parole, nonostante si possa dimostrare che esistono (e lo abbiamo appena fatto!), nessuno di loro può essere "descritto esplicitamente". Per quanto possa apparire strano, un fenomeno simile si ritrova anche nella combinatoria elementare. Ad esempio, per il cosiddetto *principio dei cassetti*, se abbiamo $n+1$ oggetti distribuiti in n cassetti possiamo concludere che esiste un cassetto contenente almeno due oggetti; ma "descrivere esplicitamente" quale sia un tale cassetto non è possibile.

[1] Più precisamente, non esistono formule $\varphi(x)$ della teoria degli insiemi tali che la teoria ZFC dimostra entrambi gli enunciati: "Se vale $\varphi(x)$ allora x è un ultrafiltro non principale" e "Esiste ed unico x tale che $\varphi(x)$".

Nell'esercizio seguente, vediamo che avere un ultrafiltro non principale equivale ad avere una misura finitamente additiva a due valori, che assegni misura nulla a tutti i punti.

Esercizio 1.10.

(1) Sia $\mu : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ una misura a due valori *finitamente additiva* e non-atomica.[2] Allora la famiglia $\mathcal{U}_\mu = \{A \subseteq I \mid \mu(A) = 1\}$ è un ultrafiltro non principale.

(2) Viceversa, sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su I. Allora la funzione $\mu_\mathcal{U} : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ definita ponendo $\mu_\mathcal{U}(A) = 1 \Leftrightarrow A \in \mathcal{U}$ è una misura a due valori finitamente additiva e non-atomica.

Dunque un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su un insieme I è in realtà una misura su I, sia pure di tipo molto speciale. Per questo, data una qualunque proprietà $P(i)$ relativa ad elementi $i \in I$, a volte diremo che P vale $\mathcal{U}$-*quasi ovunque* o vale per $\mathcal{U}$-*quasi ogni* i per intendere che $\{i \in I \mid P(i)\} \in \mathcal{U}$.

Introduciamo ora un prodotto naturale tra ultrafiltri, che useremo in seguito per dimostrare il teorema di Ramsey.

Definizione 1.11. Il *prodotto tensoriale* $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ di due ultrafiltri su I è l'ultrafiltro su $I \times I$ definito ponendo per ogni $A \subseteq I \times I$:

$$A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \iff \{i \mid A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Con $A_i = \{j \in I \mid (i,j) \in A\}$ abbiamo denotato la fibra verticale di A corrispondente all'ascissa i.

Dunque, un sottoinsieme A del prodotto cartesiano $I \times I$ è "$\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$-grande" se e solo se per una quantità "$\mathcal{U}$-grande" di indici i, la corrispondente fibra verticale A_i è "$\mathcal{V}$-grande".

Esercizio 1.12.

(1) Verificare che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è in effetti un ultrafiltro.

(2) Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono non principali, allora anche $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è non principale. Mostrare che l'implicazione inversa non vale.

(3) Vale la proprietà *associativa*: $\mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) = (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W}$.

(4) Non vale la proprietà *commutativa*: infatti, esistono ultrafiltri non principali $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ tali che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$.

Concludiamo questo paragrafo con un esempio di applicazione dei filtri e degli ultrafiltri in topologia. Per definizione, il limite di una successione reale $\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\epsilon > 0$, l'insieme di indici $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - l| < \epsilon\}$ per i quali la successione è "ϵ-vicina" ad l è un insieme cofinito, cioè appartiene al filtro di Frechet $\mathrm{Fr}(\mathbb{N})$. Generalizzando, si ottiene un'utile nozione di limite che si applica a spazi topologici qualunque.

[2] Cioè μ soddisfa le proprietà: (1) $\mu(I) = 1$, (2) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B)$, (3) $\mu(\{i\}) = 0$ per ogni $i \in I$.

Definizione 1.13. Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{F}$ un filtro su un insieme I. Diciamo che una I-successione $\langle x_i \mid i \in I \rangle$ di elementi di X ha come *$\mathcal{F}$-limite* il punto $x \in X$, e scriviamo $\mathcal{F}\text{-}\lim x_i = x$ oppure $\lim_{\mathcal{F}} x_i = x$, se per ogni intorno U di x si ha

$$\{i \in I \mid x_i \in U\} \in \mathcal{F}.$$

Esercizio 1.14. Sia X uno spazio topologico. Allora:

(1) (Chiusura) Se $\langle x_i \mid i \in I \rangle$ è una I-successione di elementi di un sottospazio $Y \subseteq X$ che ha $\mathcal{F}$-limite, allora $\lim_{\mathcal{F}} y_i \in \overline{Y}$ appartiene alla chiusura di Y.
(2) (Unicità) Se X è di Hausdorff, allora per ogni insieme I e per ogni filtro $\mathcal{F}$ su I, ogni I-successione di elementi di X ha al più un $\mathcal{F}$-limite.
(3) (Esistenza) Se X è compatto, allora per ogni insieme I e per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I, ogni I-successione di elementi di X ha un $\mathcal{U}$-limite.[3]

Considerando insiemi I di cardinalità sufficientemente grande, valgono anche le implicazioni inverse.

Esercizio 1.15. * Sia X uno spazio topologico, e sia κ la più piccola cardinalità di una sua base di aperti.

(1) Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio e sia $x \in \overline{Y}$. Allora esiste una κ-sequenza $\langle y_i \mid i \in \kappa \rangle$ di elementi di Y e un filtro $\mathcal{F}$ su κ tali che $\lim_{\mathcal{F}} y_i = x$.
(2) Se X *non* è di Hausdorff, allora esiste un filtro $\mathcal{F}$ su κ ed una κ-successione di elementi di X avente due $\mathcal{F}$-limiti diversi.
(3) Se X *non* è compatto, allora esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su κ ed una κ-successione di elementi di X che non ha alcun $\mathcal{U}$-limite.

Esercizio 1.16. In base ai due esercizi precedenti, si ottiene l'equivalenza: X è compatto se e solo se per ogni I-successione $\langle x_i \mid i \in I \rangle$ di elementi di X e per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I, esiste $\mathcal{U}\text{-}\lim x_i \in X$. Usando questa caratterizzazione dimostrare il Teorema di Tychonoff: "Un prodotto topologico di spazi compatti è compatto".

[3] Nella definizione di spazio topologico compatto *non* si assume la proprietà di Hausdorff.