ULTRAFILTRI E METODI NONSTANDARD IN TEORIA COMBINATORIA DEI NUMERI

MAURO DI NASSO

2. Teorema di Ramsey

Introduciamo ora la cosiddetta teoria di Ramsey. Vedremo presto come gli ultrafiltri siano uno strumento prezioso in questo ambito della combinatoria. Iniziamo con un esempio.

Supponiamo di essere ad una festa, e scegliamo a caso 6 persone. Allora possiamo essere certi che tra queste ci sono 3 persone che si conoscono tra di loro, oppure ce ne sono 3 che non si conoscono. Vediamo perchè.

Denotiamo con A, B, C, D, E, F le 6 persone, e concentriamoci su una di loro, diciamo A. Di sicuro capita una ed una sola delle seguente due eventualità: (1) A conosce almeno 3 persone; (2) A *non* conosce almeno 3 persone. Supponiamo che valga la prima possibilità (nell'altro caso la dimostrazione è del tutto analoga). Ad esempio, supponiamo che A conosca B, C e D. Se quest'ultime 3 persone non si conoscono tra loro, allora abbiamo già la tesi. Altrimenti almeno 2 di queste 3 persone si conoscono, diciamo B e C. Ma allora A, B e C sono 3 persone che si conoscono tra loro, e la tesi è raggiunta.

Se invece si volessero 4 persone che formano un gruppo *omogeneo*, cioè tali che si conoscono tutte tra loro oppure non si conoscono tra loro, allora occorrerebbe prendere almeno 18 individui. Questo numero è il migliore possibile, perché si può dimostrare che esistono gruppi di 17 persone senza gruppi omogenei di 4 individui.

Può sembrare strano, ma l'analogo problema per gruppi omogenei di 5 persone, non è ancora stato risolto! E si dubita che lo sarà di qui a breve, trattandosi di una questione combinatoria estremamente complessa. Le stime più aggiornate indicano che la soluzione ottimale, cioè il minimo numero di persone da prendere per essere sicuri di trovare un gruppo omogeneo di 5 persone, è compresa tra 43 e 49 persone. Il problema sale vertiginosamente di difficoltà, e diventa diventa presto di una difficoltà pressoché insormontabile. Ad esempio, già per $n = 10$, si conosce soltanto che il numero cercato è tra 798 e 23556.[1]

Il Teorema di Ramsey finito ci dirà – tra l'altro – che quei numeri ottimali esistono sempre per ogni n (anche se non fornisce stime sulla loro grandezza). Lo strumento degli ultrafiltri ci permetterà di dimostrare prima la versione infinita del Teorema di Ramsey, e successivamente di derivarne la versione finita. Dunque per noi, la versione infinita sarà in un certo senso più "semplice" di quella finita.[2]

[1] Gli interessati possono trovare facilmente informazioni in rete. Ad esempio sulla pagina di wikipedia: `http://en.wikipedia.org/wiki/Ramsey's_theorem`, dove i numeri di cui abbiamo parlato sono denotati $R(n, n)$.

[2] C'è chi dice che in matematica, l'infinito è una comoda approssimazione del finito.

Come consuetudine nella teoria di Ramsey, una partizione finita di un insieme $X = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ in r pezzi si dice *r-colorazione*. Inoltre, per indicare che un certo insieme $Y \subseteq C_i$ è incluso in uno dei pezzi della partizione, si dice che Y è *monocromatico*.

Notazione 2.1. Per ogni insieme A e per ogni $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con

$$[A]^k = \{B \subseteq A \mid |B| = k\}$$

la famiglia di tutte le k-uple di A, cioè dei sottoinsiemi di A che hanno esattamente k elementi.

Teorema 2.2 (Ramsey infinito)**.** *Sia X un insieme infinito. Per ogni k, ogni colorazione finita delle k-uple di X:*

$$[X]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$$

ammette un insieme infinito omogeneo*, cioè un insieme infinito $H \subseteq X$ tale che l'insieme $[H]^k$ delle sue k-uple è monocromatico.*

Dim. Notiamo che per $k = 1$, il teorema di Ramsey infinito afferma semplicemente che in ogni partizione finita di un insieme infinito, almeno uno dei pezzi è infinito.

Senza perdere di generalità, possiamo supporre $X = \mathbb{N}$. Infatti la proprietà di Ramsey si estende banalmente ai soprainsiemi e – visto che X è infinito – possiamo senz'altro assumere che X includa (una copia di) $\mathbb{N}$. Identifichiamo le k-uple con la *sopradiagonale*

$$\Delta_k^+ = \{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid n_1 < \ldots < n_k\}.$$

Prendiamo ora un qualunque ultrafiltro non principale $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$ e consideriamo il corrispondente prodotto tensoriale iterato:

$$\mathcal{U}^{\otimes k} = \underbrace{\mathcal{U} \otimes \ldots \otimes \mathcal{U}}_{k \text{ volte}}.$$

Si può verificare direttamente che $\Delta_k^+ \in \mathcal{U}^{\otimes k}$ per ogni $k \geq 1$. Ad esempio, $\Delta_2^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ perché per ogni n, la fibra $\{m \mid (n, m) \in \Delta_2^+\} = \{m \mid n > m\} \in \mathcal{U}$, in quanto insieme cofinito. Per la proprietà di ultrafiltro, da $[\mathbb{N}]^k = \Delta_k^+ = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r \in \mathcal{U}^{\otimes k}$, segue l'esistenza di un colore C_i tale che $C_i \in \mathcal{U}^{\otimes k}$. La tesi si ottiene allora dalla seguente proprietà generale sui prodotti tensoriali iterati di ultrafiltri:

Lemma 2.3. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Per ogni $k \geq 1$ e per ogni $A \in \mathcal{U}^{\otimes k}$, esiste un insieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che*

$$[H]^k = \{(h_1, \ldots, , h_k) \in H^k \mid h_1 < \ldots < h_k\} \subseteq A.$$

Dim. Lemma. Il caso $k = 1$ è banale, perchè un ultrafiltro non principale contiene solo insiemi infiniti. Quando $k = 2$, per definizione

$$A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Leftrightarrow \widehat{A} = \{n \mid A_n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

Sia $h_1 \in \widehat{A}$. Allora la fibra $A_{h_1} \in \mathcal{U}$, e posso prendere $h_2 \in \widehat{A} \cap A_{h_1} \in \mathcal{U}$ con $h_2 > h_1$ (ricordiamo che ogni insieme di un ultrafiltro non principale è infinito). Analogamente, visto che $A_{h_2} \in \mathcal{U}$, posso prendere $h_3 \in \widehat{A} \cap A_{h_1} \cap A_{h_2} \in \mathcal{U}$ con $h_3 > h_2$. Notiamo che $(h_1, h_2), (h_1, h_3), (h_2, h_3) \in A$. Iterando questo procedimento, si ottiene un insieme infinito $H = \{h_1 < h_2 < \ldots < h_k < h_{k+1} < \ldots\}$ tale che $(h_i, h_j) \in A$ per ogni $i < j$, come volevamo.

Per dimostrare il caso generale $k > 2$, si procede in modo simile a sopra. Per capire come si procede, ci limitiamo a vedere qui in dettaglio il caso $k = 3$. Sia dunque $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Per ogni n, n' denotiamo:

$$A_n = \{(n', n'') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (n, n', n'') \in A\} \ \text{ e } \ A_{n,n'} = \{n'' \in \mathbb{N} \mid (n, n', n'') \in A\}.$$

Per definizione, $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \Leftrightarrow \widehat{A} = \{n \mid A_n \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Prendiamo $h_1 \in \widehat{A}$. Questo significa che la fibra bidimensionale $A_{h_1} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, cioè, per definizione di $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, $\widehat{A}_{h_1} = \{h \mid A_{h_1,h} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Prendiamo ora $h_2 \in \widehat{A} \cap \widehat{A}_{h_1} \cap (h_1, +\infty) \in \mathcal{U}$. Quindi $A_{h_2} \in \mathcal{U}$, $A_{h_1,h_2} \in \mathcal{U}$ e $h_2 > h_1$. Al passo successivo, prendiamo $h_3 \in \widehat{A} \cap \widehat{A}_{h_1} \cap \widehat{A}_{h_2} \cap A_{h_1,h_2} \cap (h_2, +\infty) \in \mathcal{U}$, in modo da avere $A_{h_3} \in \mathcal{U}$, $A_{h_1,h_3} \in \mathcal{U}$, $A_{h_2,h_3} \in \mathcal{U}$ e $(h_1, h_2, h_3) \in A$, dove $h_3 > h_2 > h_1$. Per induzione, si definisce così una successione crescente $\langle h_s \mid s \in \mathbb{N}\rangle$ dove

$$h_{s+1} \in \widehat{A} \cap \left(\bigcap_{i \leq s} \widehat{A}_{h_i} \right) \cap \left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq s} A_{h_i,h_j} \right) \cap (h_s, +\infty).$$

In questo modo si ha che $(h_i, h_j, h_t) \in A$ per ogni $i < j < t$, cioè $[H]^3 \subseteq A$, come richiesto. □

□

La proprietà di Ramsey con $k = 1$ afferma che se un insieme infinito viene diviso in un numero finito di pezzi, allora almeno uno di tali pezzi deve necessariamente essere infinito. Per quanto possa apparire banale, già questa semplice proprietà ha importanti applicazioni.

Esempio 2.4. Ricordiamo il *Teorema di Bolzano-Weiestrass*: Ogni successione reale limitata $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ ammette una sottosuccessione convergente. Per dimostrare questa proprietà, si procede come segue. Per comodità (e senza perdita di generalità) supponiamo che l'immagine della successione sia contenuta nell'intervallo $A_0 = [0, 1]$. Come garantisce il *Teorema di Ramsey infinito* nel caso $k = 1$ e $r = 2$, se suddividiamo $[0, 1]$ nei due pezzi $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$, in almeno uno dei due la successione cadrà per un numero infinito di indici. Prendiamo un tale sottointervallo A_1, dividiamolo a sua volta in due parti, e ripetiamo il procedimento per ottenere un intervallo $A_2 \subseteq A_1$ di ampiezza $1/4$ dove la successione cade infinite volte. Iterando, otteniamo una successione descrescente $\langle A_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ di intervalli chiusi di lunghezza $1/2^k$ e tali che $X_k = \{n \mid a_n \in A_k\}$ è infinito per ogni k. Se $n_k = \min X_k$, dalla proprietà di completezza dei reali segue che la sottosuccessione $\langle a_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ converge.

Esercizio 2.5. Usando il Teorema di Ramsey, dimostrare che ogni insieme parzialmente ordinato infinito ammette una catena infinita oppure un'anticatena infinita.[3]

Un'importante applicazione del Teorema di Ramsey in teoria combinatoria dei numeri, è la seguente.

[3] Ricordiamo che una *catena* è un sottoinsieme totalmente ordinato; e un'*anticatena* è un insieme di elementi a due a due non confrontabili.

Teorema 2.6 (delle differenze). *Per ogni colorazione finita dei numeri naturali* $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$, *esiste un insieme infinito* H *tale che l'insieme di differenze*

$$H \ominus H = \{h' - h \mid h, h' \in H, h' > h\}$$

è monocromatico.

Dim. Per ogni $i = 1, \ldots, r$, poniamo $C'_i = \{\{n < m\} \in [\mathbb{N}]^2 \mid m - n \in C_i\}$. Ottieniamo così una r-colorazione finita delle coppie $[\mathbb{N}]^2 = C'_1 \sqcup \ldots \sqcup C'_r$. Per il Teorema di Ramsey, esiste un insieme infinito H con $[H]^2 \subseteq C'_i$ per un opportuno i. Dalla definizione di C'_i segue infine che l'insieme delle differenze $H \ominus H \subseteq C_i$ è monocromatico. □

Come semplice corollario, ricaviamo il

Teorema 2.7 (Schur infinito). *In ogni colorazione finita dei numeri naturali esiste una "tripla di Schur"* $a < b < a + b$ *monocromatica.*

Dim. Sia $H = \{h_1 < h_2 < \ldots h_k < h_{k+1} \ldots\}$ un insieme infinito tale che le differenze $H \ominus H$ sono monocromatiche. Prendiamo $a = h_2 - h_1 \in H \ominus H$ e $b = h_k - h_2 \in H \ominus H$, dove h_k è sufficientemente grande da garantire $b > a$. Notiamo che anche $a + b = h_k - h_1 \in H \ominus H$, e quindi $a < b < a + b$ è una tripla di Schur monocromatica. □

Esercizio 2.8. Dimostrare il seguente rafforzamento del Teorema di Schur: In ogni colorazione finita dei numeri naturali esistono *infinite* triple di Schur monocromatiche $\{a < b < a + b\}$ disgiunte.