

ULTRAFILTRI E METODI NONSTANDARD IN TEORIA COMBINATORIA DEI NUMERI

MAURO DI NASSO

3. DALL'INFINITO AL FINITO

Mostriamo ora come si possono derivare versioni “finite” da teoremi di tipo “infinito”. Anche per questo useremo lo strumento degli ultrafiltri.

Teorema 3.1 (Schur finito). *Per ogni r esiste n tale che in ogni r -colorazione di $\{1, \dots, n\}$ esiste una tripla di Schur $a < b < a + b$ monocromatica.*

Chiaramente, dalla versione finita del Teorema di Schur segue subito quella infinita. Dimostriamo adesso che vale anche il viceversa.

Dim. Supponiamo per assurdo che *non* valga il Teorema di Schur finito. Dunque esisterà r con la proprietà che per ogni n si può trovare una r -colorazione

$$\{1, \dots, n\} = C_1^n \sqcup \dots \sqcup C_r^n$$

priva di triple di Schur monocromatiche. L'idea è adesso quella di “passare al limite”, ed ottenere una r -colorazione di tutto \mathbb{N} senza triple di Schur monocromatiche, contraddicendo la versione infinita del teorema già dimostrata.

Fissiamo un qualunque ultrafiltro non principale \mathcal{U} su \mathbb{N} . Per ogni k , e per ogni colore i , consideriamo l'insieme $\Gamma_i^k = \{n \mid k \in C_i^n\}$ dei “livelli” n dove il numero k è colorato col colore C_i . Visto che k appartiene a tutti i livelli $n \geq k$, abbiamo che l'unione finita

$$\Gamma_1^k \cup \dots \cup \Gamma_r^k = \{n \mid n \geq k\} \in \mathcal{U}.$$

Dunque, per la proprietà di ultrafiltro, esiste ed unico i_k con $\Gamma_{i_k}^k \in \mathcal{U}$, e coloriamo k col colore C_{i_k} . Così facendo otteniamo una r -colorazione di tutti i naturali

$$\mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r \quad \text{dove} \quad k \in C_i \Leftrightarrow \Gamma_i^k \in \mathcal{U}.$$

Per la versione infinita del Teorema di Schur, esiste una tripla $a < b < a + b$ monocromatica, diciamo $a, b, c \in C_i$. Ma allora $\Gamma = \Gamma_i^a \cap \Gamma_i^b \cap \Gamma_i^{a+b} \in \mathcal{U}$, e prendendo un qualunque livello $n \in \Gamma$ si avrebbe che $a, b, a + b \in C_i^n$, contro l'ipotesi che la r -colorazione $\{1, \dots, n\} = C_1^n \sqcup \dots \sqcup C_r^n$ sia priva di triple di Schur. \square

Come interessante applicazione del teorema di Schur finito si ottiene che l'ultimo teorema di Fermat *non* vale nei campi finiti. Si tratta in effetti del risultato originale per raggiungere il quale Schur dimostrò come lemma la proprietà combinatoria di sopra.

Teorema 3.2. *Per ogni k , esiste n tale che per ogni primo $p \geq n$, l'equazione $x^k + y^k = z^k$ ha soluzioni non banali nel campo finito \mathbb{Z}_p .*

Dim. Fissato k , per ogni primo p consideriamo $\Lambda_p^k = \{x^k \mid x \in \mathbb{Z}_p^*\} \leq \mathbb{Z}_p^*$, il sottogruppo moltiplicativo delle potenze k -esime. Visto che \mathbb{Z}_p^* è ciclico, l'indice $[\mathbb{Z}_p^* : \Lambda_p^k]$ sarà il massimo comun divisore tra $p-1$ e k . Dunque le classi laterali di Λ_p^k determinano una r -colorazione finita di \mathbb{Z}_p^* dove $r \leq k$:

$$\{1, \dots, p-1\} = \mathbb{Z}_p^* = a_1 \Lambda_p^k \sqcup \dots \sqcup a_r \Lambda_p^k.$$

Per il teorema di Schur finito, esiste un n tale che per ogni $p \geq n$, si può sempre trovare una tripla di Schur monocromatica in ogni k -colorazione di \mathbb{Z}_p^* (e a maggior ragione in ogni r -colorazione con $r \leq k$). Dunque per ogni $p \geq n$, esistono $\xi, \zeta, \xi + \zeta \in a_i \Lambda_p^k$ appartenenti alla stessa classe laterale. Abbiamo quindi $\xi = a_i x^k$, $\zeta = a_i y^k$ e $\xi + \zeta = a_i z^k$ per opportuni $x, y, z \in \mathbb{Z}_p^*$. Cancellando a_i , si ricava che $x^k + y^k = z^k$, come voluto. \square

Per ogni $X \subseteq \mathbb{N}$, denotiamo con

$$\text{FS}(X) = \left\{ \sum_{x \in F} x \mid F \subseteq X \text{ finito} \right\}$$

l'insieme di tutte le possibili somme di elementi *distinti* di X . Chiameremo $\text{FS}(X)$ l'*insieme delle somme* di X .

Più avanti dimostreremo il seguente rafforzamento del Teorema di Schur.

Teorema 3.3 (Folkman infinito). *Per ogni m e per ogni colorazione finita dei naturali, esiste un insieme X con m elementi il cui insieme delle somme $\text{FS}(X)$ è monocromatico.*

Considerare somme di elementi *distinti* è essenziale. Infatti:

Esercizio 3.4. Trovare una partizione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ ha colore diverso dal suo doppio $n + n$.

Un altro importante risultato che dimostreremo più avanti è il seguente

Teorema 3.5 (van der Waerden infinito). *In ogni colorazione finita dei naturali $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$, esistono progressioni aritmetiche monocromatiche arbitrariamente lunghe (cioè per ogni l , esiste i ed esistono a, d con $a, a+d, \dots, a+(l-1) \cdot d \in C_i$).*

Esercizio 3.6. Trovare una partizione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2$ dove nessuna progressione aritmetica *infinita* è monocromatica.

Esercizio 3.7.

- (1) Il *Teorema di Folkman infinito* è equivalente a questa proprietà apparentemente più forte:
 - In ogni colorazione finita dei naturali $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$, esiste un colore C_i che contiene insiemi di somme $\text{FS}(X)$ per X arbitrariamente grandi (cioè, per ogni m esiste $|X| \geq m$ con $\text{FS}(X) \subseteq C_i$).
- (2) Il *Teorema di van der Waerden infinito* è equivalente a questa proprietà apparentemente più forte:

- In ogni colorazione finita dei naturali $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$, uno dei colori contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe (cioè esiste i tale che per ogni l , esistono a, d con $a, a + d, \dots, a + (l - 1) \cdot d \in C_i$).

Le versioni finite di questi due teoremi sono le seguenti:

Teorema 3.8 (Folkman finito). *Per ogni r e per ogni m , esiste n tale che in ogni r -colorazione $\{1, \dots, n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ esiste un insieme X con m elementi il cui insieme delle somme $FS(X)$ è monocromatico.*

Teorema 3.9 (van der Waerden finito). *Per ogni r e per ogni l , esiste n tale che in ogni r -colorazione $\{1, \dots, n\} = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ esiste una progressione aritmetica monocromatica di lunghezza l .*

Come è evidente, le versioni finite implicano direttamente le rispettive versioni infinite. Inoltre vale anche il viceversa:

Teorema 3.10.

- (1) *Il Teorema di Folkman infinito implica la sua versione finita.*
- (2) *Il Teorema di van der Waerden infinito implica la sua versione finita.*

Esercizio 3.11. Applicando la stessa tecnica usata per dimostrare il Teorema 3.1, dimostrare in dettaglio il teorema qua sopra.

Finalmente, formuliamo la versione finita del Teorema di Ramsey.

Teorema 3.12 (Ramsey finito). *Per ogni r , per ogni k , per ogni m , esiste n tale che ogni r -colorazione $[\{1, \dots, n\}]^k = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ ammette un insieme omogeneo H con m elementi (cioè esiste $|H| = m$ ed esiste i con $[H]^k \subseteq C_i$).*

Esempio 3.13. Il seguente principio è di uso comune nella combinatoria elementare:

- **Principio dei cassetti.** Supponiamo di avere a cassetti nei quali sono posti $a \cdot b + 1$ oggetti. Allora esiste un cassetto che contiene almeno $b + 1$ oggetti.

Il teorema di Ramsey finito con $k = 1$, $r = a$ e $m = b + 1$, garantisce l'esistenza di un numero di oggetti n sufficientemente grande in modo da essere certi di trovare sempre almeno $b + 1$ oggetti nello stesso cassetto. Tuttavia non ci dà alcuna stima sulla grandezza minima di un tale n (in base al *principio dei cassetti*, $n = a \cdot b + 1$).

Esempio 3.14. Applicando il Teorema di Ramsey finito nel caso $k = 2$ e $r = 2$, si ottiene che per ogni fissato m , esiste un numero di persone n sufficientemente grande in modo da essere certi che tra queste se ne trovano sempre m che si conoscono tra loro oppure che non si conoscono tra loro. (Si considera la 2-colorazione determinata dalle coppie che si conoscono e le coppie che non si conoscono.)

Notiamo che – diversamente da quanto accadeva con le versioni finite dei teoremi di Schur e van der Waerden – il teorema di Ramsey finito *non* implica direttamente la sua versione infinita.

Esercizio 3.15. Dimostrare che il Teorema di Ramsey finito implica direttamente la seguente versione più debole del Teorema di Ramsey infinito: “Se X è infinito, in ogni colorazione $[X]^k = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ esiste un colore C_i tale che $[H]^k \subseteq C_i$ per insiemi finiti H di cardinalità arbitrariamente grande.”

Esercizio 3.16. Applicando la stessa tecnica usata per dimostrare il Teorema 3.1, dimostrare che il Teorema di Ramsey infinito implica la sua versione finita.

Vediamo ora un principio generale (di cui diamo due formulazioni equivalenti) che permette di passare da versioni infinite a versioni finite di teoremi in teoria di Ramsey.

Definizione 3.17. Una famiglia \mathcal{A} di insiemi si dice *r-regolare su X* se per ogni r -colorazione $X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ esiste $A \in \mathcal{A}$ monocromatico, cioè $A \subseteq C_i$ per un opportuno i .

Teorema 3.18 (Principio di compattezza combinatoria). *Se una famiglia \mathcal{A} di insiemi finiti è r-regolare su un insieme X , allora è r-regolare anche su un sottoinsieme finito $Y \subseteq X$.*

Dim. Sia X infinito, altrimenti non c'è niente da dimostrare. Per assurdo supponiamo che per ogni $Y \subset X$ finito esista una r -colorazione $Y = C_1^Y \sqcup \dots \sqcup C_r^Y$ per la quale non esistono elementi $A \in \mathcal{A}$ monocromatici. Prendiamo ora l'insieme di indici $I = \text{Fin}(X)$ dato dalle parti finite di X . Per ogni $x \in X$ denotiamo con $\hat{x} = \{Y \in I \mid x \in Y\}$. Chiaramente la famiglia $\mathcal{F} = \{\hat{x} \mid x \in X\}$ ha la FIP perché $\{x_1, \dots, x_k\} \in \hat{x}_1 \cap \dots \cap \hat{x}_k$. Possiamo prendere allora un ultrafiltro \mathcal{U} su I che include la famiglia \mathcal{F} . Per ogni $x \in X$, sia $\Gamma_i(x) = \{Y \in I \mid x \in C_i^Y\}$. Notiamo che $\bigsqcup_{i=1}^r \Gamma_i(x) = \hat{x} \in \mathcal{U}$, e dunque esiste un unico colore $i(x)$ tale che $\Gamma_{i(x)}(x) \in \mathcal{U}$. In questo modo determiniamo una r -colorazione $X = C_1 \sqcup \dots \sqcup C_r$ dove $x \in C_i \Leftrightarrow \Gamma_i(x) \in \mathcal{U}$. Per ipotesi esiste un insieme $A = \{a_1, \dots, a_m\} \in \mathcal{A}$ e un colore i con $A \subseteq C_i$. Ma allora, per ogni $Y \in \bigcap_{s=1}^m \Gamma_i(a_s) \in \mathcal{U}$, abbiamo che $a_1, \dots, a_m \in C_i^Y$, contro la nostra assunzione sulle r -colorazioni di Y . \square

Esercizio 3.19. Dimostrare che il principio di compattezza combinatoria enunciata nel Teorema 3.18 è equivalente al seguente: “Se una famiglia \mathcal{A} di insiemi finiti è r-regolare su un insieme X , allora anche una sottofamiglia finita $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ è r-regolare su X .”

Esercizio 3.20. Dare una dimostrazione topologica del principio di compattezza combinatoria a partire dalla compattezza dello spazio prodotto $\{1, \dots, r\}^X$, dove $\{1, \dots, r\}$ ha la topologia discreta.

Esercizio 3.21. Applicando il principio di compattezza combinatoria, (ri)dimostrare che:

- (1) Il Teorema di Schur *infinito* implica il Teorema di Schur *finito*.
- (2) Il Teorema di Folkman *infinito* implica il Teorema di Folkman *finito*.
- (3) Il Teorema di van der Waerden *infinito* implica il Teorema di van der Waerden *finito*.
- (4) Il Teorema di Ramsey *infinito* implica il Teorema di Ramsey *finito*.

Esercizio 3.22. Formulare la versione finita del *teorema delle differenze* e dimostrarla.