ULTRAFILTRI E METODI NONSTANDARD IN TEORIA COMBINATORIA DEI NUMERI

MAURO DI NASSO

4. Il pre-ordine di Rudin-Keisler

Un'importante nozione nella teoria degli ultrafiltri è la seguente.

Definizione 4.1. Sia $f : I \to J$ una funzione e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. L'*ultrafiltro immagine* $f_*(\mathcal{U})$ su J è l'ultrafiltro definito ponendo per ogni $A \subseteq J$:

$$A \in f_*(\mathcal{U}) \iff f^{-1}(A) \in \mathcal{U}.$$

Esercizio 4.2. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I.

(1) Per ogni f definita su I si ha $(g \circ f)_*(\mathcal{U}) = g_*(f_*(\mathcal{U}))$ (purché la composizione $g \circ f$ abbia senso).
(2) Per ogni f, g definite su I, si ha $f_*(\mathcal{U}) \neq g_*(\mathcal{U})$ se e solo se esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che $f(A) \cap g(A) = \emptyset$.

Definizione 4.3. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Due funzioni f, g con dominio I si dicono $\mathcal{U}$*-equivalenti* o *uguali* $\mathcal{U}$*-quasi ovunque*, se coincidono su un insieme di indici $\mathcal{U}$-grande, cioè se $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$. In questo caso scriviamo $f \equiv_{\mathcal{U}} g$.

Esercizio 4.4. Se $f \equiv_{\mathcal{U}} g$, allora $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$.

Per dimostrare altre importanti proprietà sulle immagini di ultrafiltri, ci occorre il seguente risultato combinatorio.

Proposizione 4.5. *Per ogni $f : I \to I$ esiste una 3-colorazione $I = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ tale che nessuna coppia $\{i, f(i)\}$ con $i \neq f(i)$ è monocromatica.*

Dim. Dimostriamo prima una "versione finita" di quella proprietà.

Lemma 4.6. *Ogni $A \subseteq I$ finito ammette una 3-colorazione $A = C_1^A \sqcup C_2^A \sqcup C_3^A$ tale che se $i, f(i) \in A$ sono diversi, allora hanno colori diversi.*

Dim. Lemma. Procediamo per induzione sulla cardinalità di A. La base è banale. Supponiamo allora $|A| \geq 1$. Notiamo che esiste almeno un elemento $a \in A$ che è l'immagine di al più un elemento di A, cioè $|f^{-1}(a) \cap A| \leq 1$. Considero la 3-colorazione su $A \setminus \{a\}$ garantita dall'ipotesi induttiva. Posso sempre colorare a in modo diverso da $f(a)$, qualora sia $f(a) \in A$, ed anche in modo diverso da b, qualora $b \in f^{-1}(A) \cap A$ sia quell'unico elemento di A con $f(a) = b$. Così facendo ottengo una 3-colorazione di A con la proprietà richiesta. $\square$

Notiamo che per dare una 3-colorazione su I non possiamo direttamente “rincollare” le varie colorazioni che abbiamo sui sottoinsiemi finiti, perché in generale esse non saranno coerenti tra loro (cioè non saranno una estensione dell’altra). Nel caso $I = \mathbb{N}$, possiamo però definire una colorazione su tutto I usando un ultrafiltro e procedendo esattamente come nella dimostrazione del Teorema di Schur finito **??**.

Per ogni n, fissiamo una 3-colorazione $\{1,\dots,n\} = C_1^n \sqcup C_2^n \sqcup C_3^n$ con la proprietà del Lemma. Fissiamo inoltre un ultrafiltro non principale $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$, e definiamo C_1, C_2 e C_3 ponendo:

$$k \in C_j \iff \Gamma_j^k = \{n \in \mathbb{N} \mid k \in C_j^n\}.$$

La 3-colorazione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ ha la proprietà voluta. Infatti, supponiamo per assurdo che esistano k ed j con $f(k) \neq k$ e $\{k, f(k)\} \subseteq C_j$. Prendendo un qualunque $n \in \Gamma_j^k \cap \Gamma_j^{f(k)} \in \mathcal{U}$, si avrebbe allora che $\{k, f(k)\} \subseteq C_j^n$, contro l’ipotesi.

Una dimostrazione valida per ogni insieme di indici I si può ottenere usando la compattezza combinatoria in questo modo. Supponiamo per assurdo che per ogni 3-colorazione di I esista sempre una coppia $\{i \neq f(i)\}$ monocromatica. Questo significa che la famiglia $\mathcal{A} = \{\{i, f(i)\} \mid i \neq f(i)\}$ è 3-regolare su I. Ma allora esisterebbe un insieme finito $A \subset I$ tale che con $\mathcal{A}$ è 3-regolare su A, contro il Lemma. $\square$

Come corollario, si ricava che l’immagine di un ultrafiltro è l’ultrafiltro stesso solo se la funzione è $\mathcal{U}$-quasi ovunque l’identità.

Proposizione 4.7. *Se $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$, allora $f \equiv_{\mathcal{U}} id$.*

Dim. Sia $I = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ una 3-colorazione come nella proposizione precedente. Per la proprietà di ultrafiltro, uno dei colori $C_j \in \mathcal{U}$. Supponiamo ora per assurdo che $B = \{i \in I \mid f(i) \neq i\} \in \mathcal{U}$, e consideriamo l’insieme $A = B \cap C_j \in \mathcal{U}$. Banalmente $f(A) \in f_*(\mathcal{U})$; inoltre $f(A) \cap C_j = \emptyset$ e dunque $f(A) \notin \mathcal{U}$. Concludiamo così che $f_*(\mathcal{U}) \neq \mathcal{U}$, come volevamo. $\square$

Esercizio 4.8. Se f è una funzione iniettiva, allora $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U}) \Rightarrow f \equiv_{\mathcal{U}} g$. Trovare inoltre un esempio dove $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U})$ ma $f \not\equiv_{\mathcal{U}} g$.

C’è una naturale nozione di isomorfismo tra ultrafiltri.

Definizione 4.9. L’ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I e l’ultrafiltro $\mathcal{V}$ su J si dicono *isomorfi*, e scriviamo $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$, se esiste una bigezione $\sigma : I \to J$ tale che $\sigma_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

È immediato verificare che $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ se e solo se $\mathcal{V} \cong \mathcal{U}$, dunque si tratta di una relazione di equivalenza.

Proposizione 4.10. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I e $f : I \to I$. Allora $f_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$ se e solo se esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che la restrizione $f \upharpoonright_A$ è iniettiva.*

Dim. Supponiamo prima che $f_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$, e prendiamo una bigezione $\sigma : I \to I$ tale che $\sigma_*(f_*(\mathcal{U})) = (\sigma \circ f)_*(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$. Per la Proposizione 4.7, l’insieme $A = \{i \in I \mid \sigma(f(i)) = i\} \in \mathcal{U}$. È immediato verificare che allora la restrizione $f \upharpoonright_A$ è iniettiva.

Viceversa sia $f \upharpoonright_A$ iniettiva per un opportuno $A \in \mathcal{U}$. Possiamo supporre A infinito, altrimenti $\mathcal{U}$ è principale e la tesi è banale. Partizioniamo $A = A_1 \sqcup A_2$ in due pezzi aventi la stessa cardinalità di A. Uno (ed uno solo) dei due apparterrà ad $\mathcal{U}$, diciamo $A_1 \in \mathcal{U}$. Notiamo che $|I \setminus A_1| = |I| = |I \setminus f(A_1)|$, sia quando $|A| = |I|$, sia nel caso $|A| < |I|$. Dunque possiamo prendere una bigezione $g : I \setminus A_1 \to I \setminus f(A_1)$. La funzione $\sigma : I \to I$ definita ponendo:

$$\sigma(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i \in A_1 \\ g(i) & \text{se } i \notin A_1 \end{cases}$$

è chiaramente una bigezione. Inoltre σ coincide con f sull'insieme $A_1 \in \mathcal{U}$, e quindi $\sigma \equiv_{\mathcal{U}} f$. Ma allora $f_*(\mathcal{U}) = \sigma_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$, come volevamo. □

Esercizio 4.11. Dimostrare che la Proposizione di sopra si estende al caso generale di $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I e $f : I \to J$, assumendo l'ipotesi $|I| = |J|$.

Una relazione tra ultrafiltri che è molto studiata nella letteratura è la seguente.

Definizione 4.12. Il *pre-ordine di Rudin-Keisler* $\leq_{RK}$ tra ultrafiltri è definito ponendo:

$$\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V} \iff \textit{esiste una funzione } f \textit{ tale che } f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}.$$

Per quanto già visto, la relazione $\leq_{RK}$ è in effetti un pre-ordine parziale, cioè soddisfa le proprietà riflessiva e transitiva. Inoltre, sulle classi di isomorfismo degli ultrafiltri su un insieme fissato, esso determina un ordine parziale. Vale infatti la seguente proprietà.

Proposizione 4.13. *Siano $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ ultrafiltri su un insieme I. Allora $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$ se e solo se $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$.*

Dim. Una implicazione è immediata. Viceversa, supponiamo che $f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ e $g_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ per opportune funzioni f, g. Per la Proposizione 4.7, da $(f \circ g)_*(\mathcal{U}) = f_*(g_*(\mathcal{U})) = f_*(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ segue che $A = \{n \mid g(f(n)) = n\} \in \mathcal{U}$. In particolare, la restrizione $f \restriction_A$ è iniettiva e quindi $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$ per la Proposizione 4.10. □

Esercizio 4.14. Dimostrare che la Proposizione di sopra si estende al caso di $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I e $\mathcal{V}$ ultrafiltro su J, assumendo l'ipotesi $|I| = |J|$.

Nel caso generale in cui *non* si assume $|I| = |J|$, vale la seguente proprietà:

Esercizio 4.15. Siano $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I e $\mathcal{V}$ ultrafiltro su J. Allora si ha $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$ se e solo se esistono $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{V}$ e $f : I \to J$ tali che la restrizione $f \restriction_A : A \to B$ è una bigezione e $f_*(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

Esercizio 4.16. Siano $\pi_1 : I \times J \to I$ e $\pi_2 : I \times J \to J$ le proiezioni canoniche rispettivamente sulla prima e sulla seconda componente. Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I e $\mathcal{V}$ un ultrafiltro su J, allora $(\pi_1)_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U}$ e $(\pi_2)_*(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

Il pre-ordine di Rudin-Keisler non ha elementi massimali, come mostra la seguente proprietà:

Esercizio 4.17. Dimostrare che se $\mathcal{U}$ è non principale, allora $\mathcal{U} <_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, cioè $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ ma $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \not\leq_{RK} \mathcal{U}$. In particolare, $\mathcal{U} \not\cong \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$.

Gli elementi minimali nel pre-ordine di Rudin-Keisler rivestono particolare importanza nella teoria degli ultrafiltri, ed esiste un'estesa letteratura dedicata al loro studio. Qui ci limitiamo a considerarne alcune definizioni equivalenti.

Esercizio 4.18. * Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:

(1) $\mathcal{U}$ è minimale nell'ordinamento di Rudin-Keisler.
(2) Se $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ è una partizione di $\mathbb{N}$ in infiniti pezzi non vuoti tali che $A_k \notin \mathcal{U}$, allora esiste un "selettore" $X \in \mathcal{U}$ tale che ogni intersezione $X \cap A_k$ contiene un solo elemento.
(3) Se una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *non* è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante, allora è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione iniettiva.
(4) Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione debolmente crescente.
(5) ** Per ogni partizione finita $[\mathbb{N}]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ esiste $H \in \mathcal{U}$ omogeneo.

Gli $\mathcal{U}$ che godono delle proprietà elencate sopra si dicono ultrafiltri *selettivi* in virtù della proprietà (2), o anche ultrafiltri di *Ramsey*, in virtù della proprietà (5). La loro esistenza *non* è dimostrabile in ZFC, ma è consistente (ad esempio, segue dall'*ipotesi del continuo*).

La proprietà dell'Esercizio 4.8 vale sempre quando l'ultrafiltro considerato è selettivo.

Esercizio 4.19. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro selettivo. Allora per ogni $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (anche non iniettive) vale l'implicazione: $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U}) \Rightarrow f \equiv_{\mathcal{U}} g$.

Gli ultrafiltri $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$ che godono della proprietà considerata nell'esercizio precedente, cioè tali che $f_*(\mathcal{U}) = g_*(\mathcal{U}) \Rightarrow f \equiv_{\mathcal{U}} g$ per ogni $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sono noti come ultrafiltri di *Hausdorff*. La dimostrabilità in ZFC della loro esistenza è un problema aperto della teoria degli insiemi.

È invece un teorema della teoria degli insiemi il fatto che il pre-ordine di Rudin-Keisler *non* è lineare. Infatti, per ogni insieme infinito I esistono ultrafiltri $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ su I che non sono confrontabili, cioè $\mathcal{U} \not\leq_{RK} \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \not\leq_{RK} \mathcal{U}$. Tuttavia la dimostrazione di questa proprietà è molto complicata e non la presentiamo qui.