Correzioni scritto di Calcolo Diff. del 31/07/2008

1) $f(x,y) = 2(x^4+y^4+1) - (x+y)^2$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow$ gli eventuali punti di massimo o minimo relativi devono essere ricercati tra i punti stazionari per f.

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x - 2y = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 8y^3 - 2y - 2x = 0 \end{cases}$$

Sottraendo le 2 equazioni si ottiene $x^3 = y^3 \Longrightarrow x = y$

e sostituendo nella 1ª eq. $8x^3 - 4x = 4x(2x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}$

i punti stazionari sono quindi

$$P_0 = (0,0), \quad P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Si calcola facilmente che

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2-2 & -2 \\ -2 & 24y^2-2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$Hf(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad Hf(P_1) = Hf(P_2) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det Hf(P_1)$ e $tr(Hf(P_1)) > 0 \Rightarrow Hf(P_1)$ è definita positiva

$\Rightarrow P_1$ e P_2 sono punti di minimo locale poiché $\det Hf(P_0) = 0$ e $Tr(Hf(P_0)) = -4 < 0$

Si può solo escludere che $P_0 = (0,0)$ sia un pto di minimo locale

Per escludere che sia un pto di massimo locale basta considerare la restrizione di f alla retta $y = -x$:

$$f(x,-x) = 2(2x^4+1) - 0 = 4x^4+2 = h(x)$$

che ha in $x=0$ un pto di minimo locale contraddicendo la possibilità che $(0,0)$ sia un pto di massimo locale per f.

Rimane da stabilire se f ammetta massimo o minimi assoluti: i possibili candidati sono gli eventuali valori assunti da f nei pti di massimo o minimo locali. Poiché non esistono pti di massimo locale a maggior ragione f non ha massimo assoluto. In effetti $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$ dato che $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$

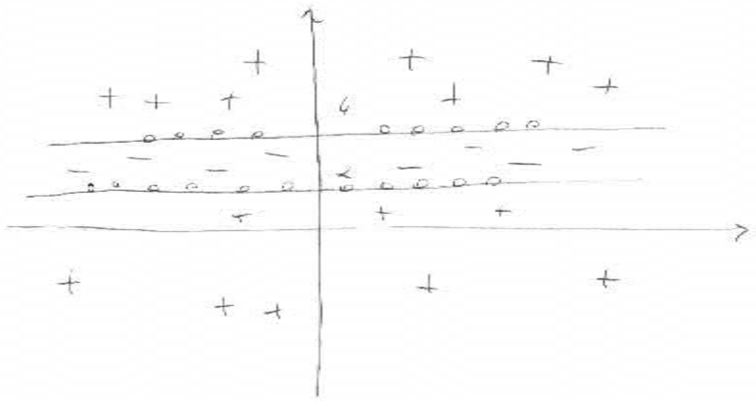
(si vede facilmente usando la disug. $|2xy| \leq x^2+y^2$).

Visto che f è continua su $\mathbb{R}^2$ e $\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x,y) = +\infty$ se ne deduce (applicando la variante del Teorema di Weierstrass) che f ammette minimo assoluto su $\mathbb{R}^2$. Esso deve coincidere con il valore di f in uno dei pti di minimo locale: poiché P_1 e P_2 sono gli unici pti di minimo locale ed $f(P_1) = f(P_2) = 1$

$\Rightarrow$ P_1 e P_2 pti di minimo assoluto e $\min_{\mathbb{R}^2} f = 1$

2) $f(x,y) = (y^2 - 6y + 8)^3 = (y-4)^3 (y-2)^3 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow$ sono verificate le ipotesi di $\exists!$ locale del pb. di Cauchy in ogni (x_0, y_0) $\Rightarrow$ le soluzioni massimali sono ben definite e distinte e nel loro intervallo di esistenza, sono di classe C^∞. L'eq. diff. è a variab. separabili e si potrebbe integrare ma non è richiesto ed appare un minimo complesso. Poiche' l'eq. è autonoma (non dipende da x) le soluzioni sono ottenute una dall'altra per traslazione in x. Denotiamo $y_\alpha(x)$ la soluzione massimale ed I_α il suo intervallo di esistenza. Studiamo segno y'



si ha

$y_2(x) \equiv 2$ e $y_4(x) \equiv 4$. Poiche' le soluzioni sono distinte $\forall \alpha \in (2,4)$ si ha $2 < y_\alpha(x) < 4$ $\forall x \in I_\alpha \Rightarrow y_\alpha$ è limitata a priori sul suo intervallo di esistenza $\Rightarrow y_\alpha$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ $(I_\alpha = \mathbb{R})$.

Inoltre se $\alpha \in (2,4)$ y_α è monotona decrescente $\Rightarrow$ ammette limite a $+\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} y_\alpha(x) = 2$. Ciò deriva dal fatto che $\exists \lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = L \in \bar{\mathbb{R}}$ ed esiste $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha'(x) = "(L-4)^3(L-2)^3" \in \bar{\mathbb{R}}$, come conseguenza del

t... ... ... $\to$ Y si esclude y_α ...

Per $\alpha < 2$ si ha invece che y_α è monotona crescente su I_α e che $\sup I_\alpha = +\infty$. Infatti su $[0, +\infty)$ si ha la maggiorazione a priori $\alpha = y_\alpha(0) \le y_\alpha(x) < 2$. Analogamente a prima si verifica che $\lim_{x \to +\infty} y_\alpha(x) = 2$.

Per $\alpha > 4$ y_α è ancora monotona crescente ma $\sup I_\alpha < +\infty$, ossia $y_\alpha \to +\infty$ in "tempo" finito. Integrando a variabili sep. si ha infatti

$$\int_0^{\tilde{x}} \frac{y'(x)\,dx}{(y^2(x) - 6y(x) + 8)^3} = \int_0^{\tilde{x}} dx = \tilde{x}$$

$y(x) = y$

$$= \int_{\alpha = y_\alpha(0)}^{y_\alpha(\tilde{x})} \frac{dy}{(y^2 - 6y + 8)^3} = \tilde{x}$$

se ne deriva che $\forall\, \tilde{x} \in I_\alpha$ $\quad |\tilde{x}| \le \int_\alpha^{+\infty} \frac{dy}{(y^2 - 6y + 8)^3} \in \mathbb{R}^+$

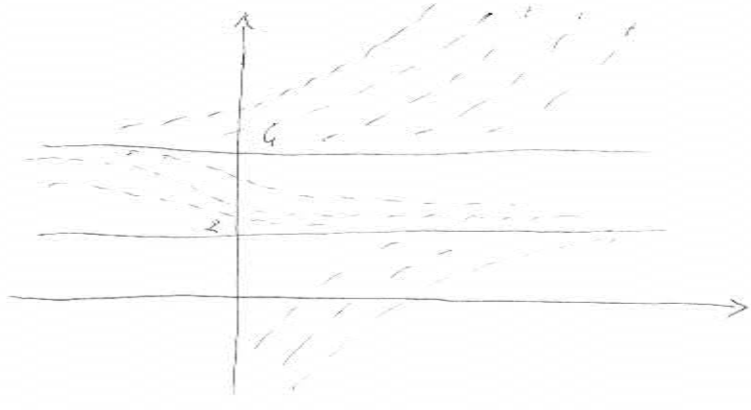
è int. in s. g. su $(\alpha, +\infty)$ $\alpha > 4$

$\Rightarrow \sup I_\alpha < +\infty$.

Si può anche calcolare $y''(x) = 3(y^2 - 6y + 8)^2 (2y - 6)\, y'$

da cui: y_α convessa per $\alpha > 4$, y_α concava per $\alpha < 2$,

y_α convessa su $y_\alpha^{-1}((2, 3))$, concava su $y_\alpha^{-1}((3, +\infty))$



3) $f(x) = e^{2x+1}$ per $x \in [-\pi, \pi]$ estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$.

Poiché $f \in C^1[-\pi, \pi]$ ma non è periodica è noto che la sua serie di Fourier $S(f)$ converge ad $f(x)$ $\forall x \in (-\pi, \pi)$ e converge a $\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2} = \frac{e^{2\pi+1} + e^{-2\pi+1}}{2}$ se $x = -\pi$ o $x = \pi$.

E' noto anche che si ha converge totale e quindi uniforme all'interno di ogni compatto strettamente contenuto in $(-\pi, \pi)$.

Non si può avere convergenza uniforme su $[-\pi, \pi]$ perché la somma della serie $S(f)$ è una funzione discontinua in $x = \pi$ e $x = -\pi$.

Calcoliamo $Sf(x) = \sum_{k \neq 0}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$b_0 = 0$ e $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{e}{4\pi}(e^{2\pi} - e^{-2\pi})$

$a_k = \frac{1 \cdot e}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t} \cos kt\,dt$ $\qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t} \cos kt\,dt = \frac{e^{2t}}{2} \cos kt \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2t}}{2} k \sin kt\,dt$

$$= \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2}(-1)^k + 0 - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2t}}{4} k^2 \cos kt\,dt$$

$\leadsto$ $a_k = \frac{2e(-1)^k (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{\pi(4+k^2)}$

$b_k = \frac{e}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t} \sin kt\,dt$ $\qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{2t} \sin kt\,dt = \frac{e^{2t}}{2} \sin kt \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2t}}{2} k \cos kt\,dt$

$$= 0 - k\left[\frac{(-1)^k 2(e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{4+k^2}\right]$$

$\leadsto$ $b_k = -\frac{e \cdot k(-1)^k (e^{2\pi} - e^{-2\pi})}{\pi(4+k^2)}$