Correzione scritto di Integrazione del 3/07/2009

1) (i) $S = \varphi(\overline{B})$ è compatto in quanto $\overline{B}$ compatto e φ continua

$\forall P$ fissato $\mathbb{R}^3 \ni Q \longmapsto \|P-Q\| \in \mathbb{R}$ è continua $\Longrightarrow$

per il teorema di Weierstrass $\exists \min\limits_{S} \|P-Q\|$.

(ii) considero $g : \overline{B} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x,y) = \big(\underbrace{\text{dist}(P, \varphi(x,y))}_{\|P-\varphi(x,y)\|}\big)^2$

se $Q = \varphi(x_0,y_0)$ con $(x_0,y_0) \in B$ è tale che $\|P-Q\| = \|P-\varphi(x_0,y_0)\| =$

$= \min\limits_{Q' \in S} \|P-Q'\| = \min\limits_{(x,y)\in B} \|P-\varphi(x,y)\|$

si vede facilmente che $(x_0,y_0) \in B$

è anche pto di minimo per $g(x,y) = \|P-\varphi(x,y)\|^2$

Poiché $\varphi \in C^1(B)$ e $\mathbb{R}^3 \ni Q' \longmapsto \|Q'\|^2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ed (x_0,y_0) è

un pto interno di differenziabilità per g si deve avere

$\nabla g(x_0,y_0) = 0$. Ma $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial}{\partial x}\big(P-\varphi(x,y), P-\varphi(x,y)\big)\Big|_{(x_0,y_0)}$

dove (Q', Q'') = prodotto scalare tra Q' e Q''

$= 2\left(P-\varphi(x,y), \dfrac{\partial}{\partial x}(P-\varphi(x,y))\right)\Big|_{(x_0,y_0)} =$

$= 2\left(P-\varphi(x_0,y_0), -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$

analogamente $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2\left(P-\varphi(x,y), -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)$

Dalla condizione $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ se ne deriva

$(P-Q) \perp \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $(P-Q) \perp \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)$

2) L'integrale si può calcolare con 2 metodi:

1° metodo $\displaystyle\int_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{[-2,2]^3}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz - \int_{B_{(0,1)}}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$

$$\int_{[-2,2]^3}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-2}^{2}dz\int_{-2}^{2}dy\int_{-2}^{2}dx\,(x^2+y^2) = \dots = \frac{512}{3}$$

$$\int_B (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \underset{\substack{\text{coordinate}\\ \text{sferiche}}}{=} \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 \rho^2\sin^2\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho = \dots = \frac{8}{15}\pi$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi & \varphi\in[0,\pi] \\ z = \rho\cos\varphi & \theta\in[0,2\pi] \\ & \rho\in[0,1] \end{cases}$$

2° metodo simmetrie + coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \overset{\text{simmetrie}}{=} 2^4\int_{V\cap\left\{\substack{x,y,z\geq 0\\ 0\leq y\leq x}\right\}} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\overset{\text{coord. cil.}}{=} 2^4\left[\int_1^2 dz\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}}\rho^2\cdot\rho\,d\rho + \int_0^1 dz\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sqrt{1-z^2}}^{\frac{2}{\cos\theta}}\rho^3\,d\rho\right] = \dots$$

3) a) Si verifica facilmente che ω è chiusa e C^∞ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

poiché A è semplicemente connesso ω ammette primitiva su A:

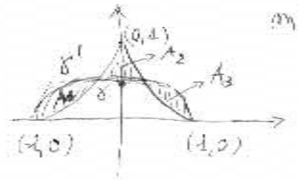
un semplice calcolo mostra che $f(x,y) = -\operatorname{arctg} \frac{2y^2}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+4y^4)$

è una primitiva su A. (se si considerava $\tilde{f}(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2y^2} + \frac{1}{2} \ln(x^2+4y^4)$

questa non è definita in $y=0$ e va estesa in $y=0$ ad una funzione C^1)

b) L'integrale è complicato per cui conviene scegliere una via alternativa al calcolo

<u>1° caso</u>



mi riduco a calcolare $\int_{\gamma'} \omega$ dove

$\gamma'(t) = \left(\cos t, \sqrt{\frac{\sin t}{2}}\right) \quad t \in [0,\pi]$

Poiché ω è chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, applicando Gauss-Green agli insiemi A_1, A_2, A_3 si ottiene che $\int_{\gamma'} \omega = \int_\gamma \omega$

(altrimenti si può vedere che γ e γ' sono omotope)

<u>2° caso</u> utilizzo il potenziale F del pto c) e $\int_\gamma \omega = F(-1,0) - F(+1,0)$

c) vedo se è possibile estendere $f(x,y) = -\operatorname{arctg} \frac{2y^2}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+4y^4)$ da A a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Noto che $\lim_{(x,y) \to (0,y_0),\, y_0 \neq 0} f(x,y) = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ cerco una costante $c \in \mathbb{R}$

tale che $-\operatorname{arctg} \frac{2y^2}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+4y^4) + c$ (primitiva su $x>0$) si raccordi

in modo C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\Rightarrow$ si verifica che

$$F(x,y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\left(\frac{2y^2}{x}\right) + \frac{1}{2} \ln(x^2+4y^4) & x<0 \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \ln(4y^4) & \text{se } x=0 \text{ e } y \neq 0 \\ \pi - \operatorname{arctg} \frac{2y^2}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+4y^4) & x>0 \end{cases}$$

è il potenziale cercato. (b) $\int_\gamma \omega = -\pi = F(-1,0) - F(1,0)$

4) $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = e^{x^2 \sin y} \cdot \cos y \cdot x^2 + \dfrac{1}{(y+x^2+1)^2+1} \Big|_{(0,0)} = 1$

quindi per il teorema del Dini si ha che $\{(x,y) : F(x,y) = F(0,0) = \frac{\pi}{4}\}$

definisce implicitamente in $U(0,0)$ una $y = y(x)$ di classe C^1 tale che

$F(x, y(x)) = 0$. Inoltre $y'(x) = -\dfrac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$

Si verifica induttivamente che $y(x)$ è di classe C^∞.

Poiché $F_x(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{x^2 \sin y} \cdot \sin y \cdot 2x + \dfrac{2x}{(y+x^2+1)^2+1}$

si ha che $y'(0) = -\dfrac{0}{1} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ è un pto stazionario per $y(x)$.

Dato che $y \in C^2$ calcoliamo $y''(0)$:

ri-derivando l'eq. $y'(x) = -\dfrac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}$ si ottiene

$$y''(x) = -\frac{\big(F_{xx}(x,y(x)) + F_{yx}(x,y(x))\,y'(x)\big)F_y(x,y(x)) - F_x(x,y(x))\big(F_{xy}(x,y(x)) + F_{yy}(x,y(x))\,y'(x)\big)}{\big(F_y(x,y(x))\big)^2}$$

$$= \Big|_{(0,0)} -\frac{1}{1^2}\cdot\big(F_{xx}(0,0)+0\big) \quad ; \quad F_{xx}(x,y) = 2e^{x^2\sin y}\sin y + 4x^2\sin^2 y\, e^{x^2 \sin y} + \frac{2}{(y+x^2+1)^2+1} + \frac{4x^2\cdot 2(y+x^2+1)}{((y+x^2+1)^2+1)^2}$$

quindi $y''(0) = -2 \Rightarrow x_0 = 0$ pto di massimo locale per $y(x)$