Risoluzione compito ②

Es. 1. Sia $f(x,y) = \ln(1 + |x|y)$.

a) Calcolare il dominio D di f e tracciarne un disegno approssimativo;

il dominio di f è costituito da tutti i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in cui ha senso fare il logaritmo, ossia i punti in cui $1 + |x|y > 0$:

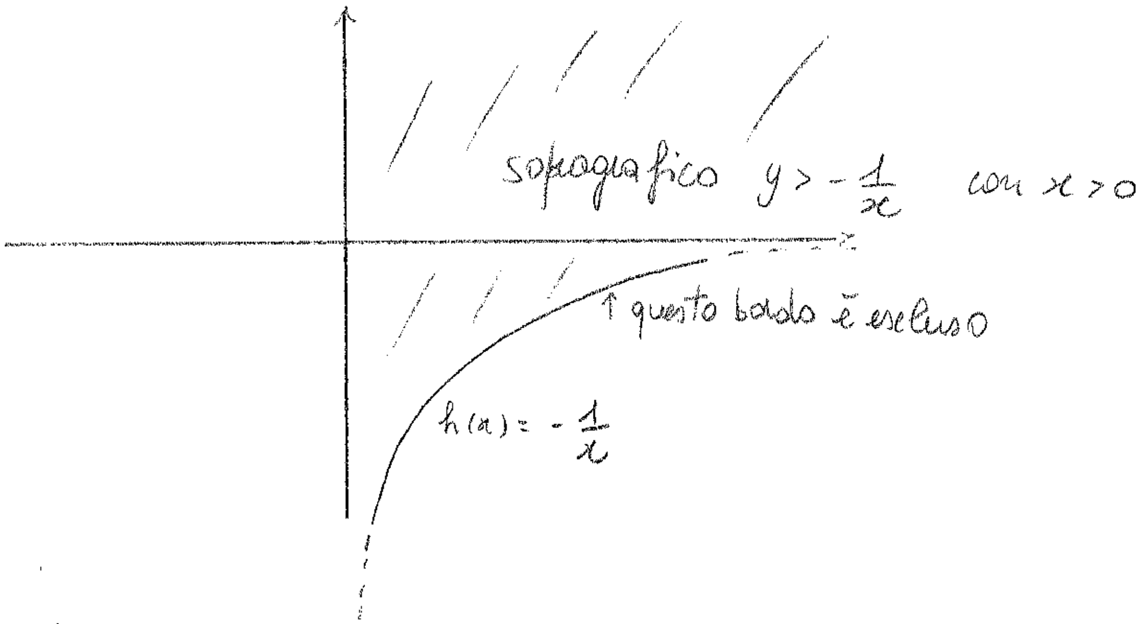
$$D = \{(x,y) : 1 + |x|y > 0\}.$$

Per disegnare D si può notare che esso è simmetrico rispetto all'asse delle y (infatti se $(x,y) \in D$ anche $(-x,y) \in D$) per cui basta determinarlo nel semispazio $x \geq 0$ e poi simmetrizzare il disegno.

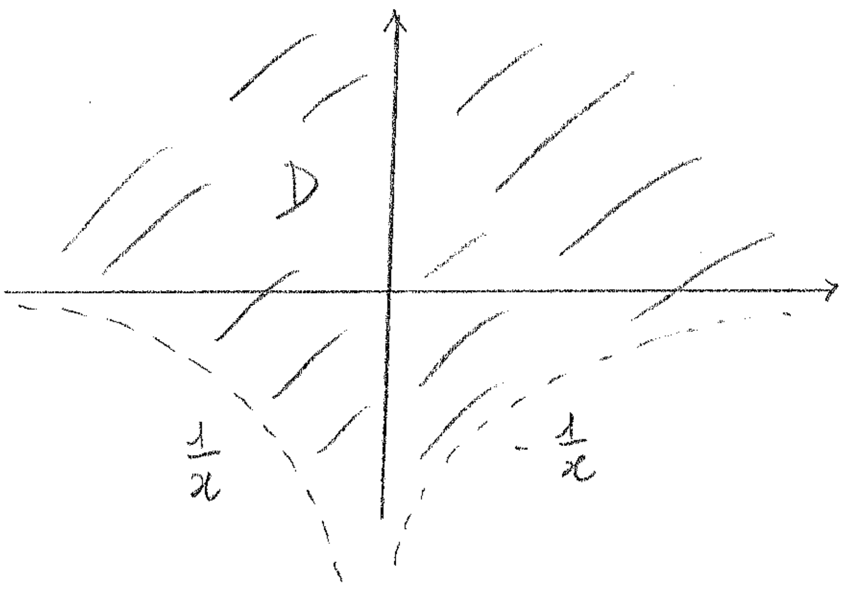
Sui punti (x,y) con $x \geq 0$ D è determinato dalla disuguaglianza $1 + xy > 0$ equivalente a $xy > -1$

i punti $(0,y)$ sull'asse delle y verificano la disug. $(0 > -1)$ per cui mi riduco ai punti (x,y) con $x > 0$ che devono soddisfare $y > -\frac{1}{x}$

i punti (x,y) con $x>0$ tali che $y>-\frac{1}{x}$ sono quelli del sopragrafico della funzione $h(x)=-\frac{1}{x}$ ristretta agli $x>0$



simmetrizzando si ottiene subito



IMPORTANTE:

NON si può moltiplicare o dividere i 2 lati di una disuguaglianza (senza cambiarne il segno) per un numero generico NON positivo:

ad esempio sull'insieme (x,y): $x>0$ la disug. $xy>-1$ è equivalente a $y>-\frac{1}{x}$ ma NON è equiv. a $x>-\frac{1}{y}$!!

se voglio risolvere $xy > -1$ isolando x devo distinguere 2 casi:

$$y > 0 \qquad xy > -1 \iff x > -\frac{1}{y} \quad ; \qquad y < 0 \qquad xy > -1 \iff x < -\frac{1}{y}$$

Tenendo conto che i punti $(x,0)$ verificano $1 + xy > 0$

Concludendo $\{(x,y) : 1 + |x|y > 0\} = D =$

$$= \{(x,y) : y = 0\} \cup \{(x,y) : y > 0,\ |x| > -\frac{1}{y}\} \cup$$

$$\cup \{(x,y) : y < 0,\ |x| < -\frac{1}{y}\}$$

b) Determinare il valore ed il campo di esistenza delle derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$;

Discutiamo prima l'esistenza di $\frac{\partial f}{\partial y}$

$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in D$ dominio di f (insieme aperto)

$y \longmapsto f(\bar{x}, y)$ è una funzione di classe C^∞ della variabile y: $\ln(1 + \underset{\uparrow \text{cte}}{|\bar{x}|}\, y)$

Si calcola subito che $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1 \cdot |x|}{1 + |x|y}$

ossia $\frac{\partial f}{\partial y}$ esiste in ogni punto del dominio $D = \{(x,y) : 1 + |x|y > 0\}$ e su questo insieme è anche continua

Discutiamo ora l'esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}$ -

non si può fare lo stesso ragionamento di prima

perché se fisso $y=\bar{y}$ la funzione $x \mapsto f(x,\bar{y}) = \ln(1+|x|\bar{y})$

non è detto che sia derivabile in $x=0$ vista la presenza di $|x|$

mentre è sicuramente derivabile per $x \neq 0$ -

Se ne deduce che $\frac{\partial f}{\partial x}$ esiste sicuramente nei punti $(x,y) \in D$ tali che $x \neq 0$ e vale

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\operatorname{sgn}(x)\cdot y}{1+|x|y} = \begin{cases} \dfrac{y}{1+xy} & x>0 \quad (x,y)\in D \\ \dfrac{-y}{1-xy} & x<0 \quad (x,y)\in D \end{cases}$$

Rimane da indagare l'esistenza di $\frac{\partial f}{\partial x}$ nei punti della forma $(0,y)$ con $y \in \mathbb{R}$ (i punti $(0,y) \in$ dominio D)

calcolo quindi l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,y)-f(0,y)}{t}$$ al variare di $y \in \mathbb{R}$ fissato

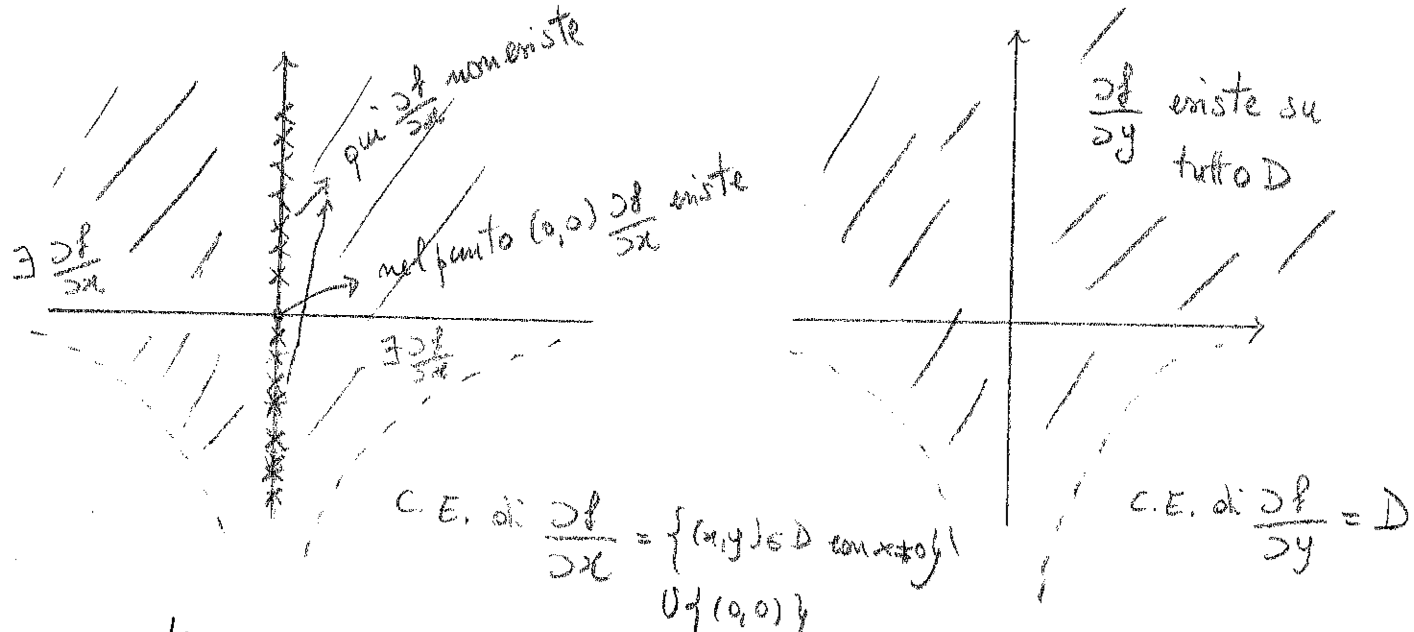
si vede che

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(0+t,y)-f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\ln(1+ty)}{t} = y$$

mentre $$\lim_{t\to 0-} \frac{f(0+t,y)-f(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0-} \frac{\ln(1-ty)}{t} = -y$$

Se ne deduce che il limite esiste solo nei punti $(0,y)$ con $y=-y$ ossia $y=0$; nel punto $(0,0)$ quindi esiste $\frac{\partial f}{\partial x}$ e vale 0. In tutti gli altri punti $(0,y)$ con $y\neq 0$ la derivata $\frac{\partial f}{\partial x}$ NON esiste.

Concludendo:



c) Determinare i punti in cui f è differenziabile;

i punti in cui f è differenziabile sono un sottoinsieme dei punti in cui esistono entrambe le derivate parziali

$\Rightarrow$ f non è sicuramente differenziabile su $\{0\}\times(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Sui due sottoinsiemi aperti $((-\infty,0)\times\mathbb{R})\cap D$ e $((0,+\infty)\times\mathbb{R})\cap D$ le derivate parziali esistono e sono continue (vedi punto precedente) $\Rightarrow$ f è sicuramente differenziabile su

$$(\mathbb{R}-\{0\}\times\mathbb{R})\cap D$$

Resta da indagare solo il punto $(0,0)$ in cui le 2 derivate parziali esistono ma non si può applicare il teorema del differenziale totale.

Dal calcolo precedente si sa che $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Il candidato differenziale di f nel punto $(0,0)$ è perciò l'applicazione nulla. Applicando la definizione f è diff. in $(0,0)$ se e solo se è nullo il limite

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-df(0,0)\binom{x}{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

usando il fatto che $df(0,0)=0$ come applicazione e passando a coordinate polari si ottiene

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{\ln(1+|x|y)-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\ln(1+\rho^2|\cos\theta|\sin\theta)}{\rho}$$

$$= 0 \quad \left(\text{utilizzando il limite notevole } \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1\right)$$

$\Longrightarrow$ f è differenziabile anche in $(0,0)$.

d) Calcolare lo sviluppo di Taylor di f al secondo ordine nel punto $P = (1,0)$;

Poiche' il punto P ha coordinata x positiva in un opportuno intorno di P la funzione f si scrive come $f(x,y) = \ln(1+xy)$.

Per calcolare lo sviluppo di Taylor è sufficiente calcolare il valore del gradiente e della matrice Hessiana in P.

f ammette sicuramente lo sviluppo di Taylor perche' in un intorno di P è di classe C^∞. Ci restringiamo a qs intorno:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+xy} \quad \text{in } U(P)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) = \frac{-y^2}{(1+xy)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -\frac{x^2}{(1+xy)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1+xy-x\cdot y}{(1+xy)^2} = \frac{1}{(1+xy)^2}$$

da cui $\nabla f(1,0) = (0,1)$, $Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\leadsto f(x,y) = f(1,0) + \left\langle \nabla f(P), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle Hf(P)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ o\left((x-1)^2 + y^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \underbrace{xy - \frac{y^2}{2}}_{\text{polinomio di Taylor}} + \underbrace{o\left((x-1)^2+y^2\right)}_{\text{resto}}$$

Lo stesso sviluppo poteva essere calcolato utilizzando lo sviluppo noto in $t=0$ di $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ ed usando il fatto che se (x,y) è vicino a $(1,0)$ allora

$$x = \underbrace{(x-1)}_{\text{infinitesimo}} + 1 \qquad e \quad y = \underbrace{y-0}_{\text{infinitesimo}} + 0$$

e) Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ dove v è la direzione $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

Dato che f è differenziabile in P ed è stato calcolato al punto precedente che $\nabla f(P) = (1,0)$ basta utilizzare la formula $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \langle \nabla f(P), v \rangle$

$$= \left\langle (1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La risoluzione dell'es. 1 del compito 1 è del tutto analoga, basta scambiare il ruolo di x ed y.

Risoluzione compito ②

Es. 2. Si consideri il campo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x,y,z) = (y+z,\ z+x,\ x+y).$$

(a) Dimostrare che F è conservativo;

Poiche' F è definito su $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso ed è di classe C^∞, è sufficiente verificare che F è irrotazionale, cioè $\text{rot}\, \underline{F} = 0$.

A riprova del fatto che è conservativo è facile esibire un suo potenziale, ossia una funzione $U: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla U = \underline{F}$

Infatti imponendo che $\dfrac{\partial U}{\partial x} = y+z$ $\quad \dfrac{\partial U}{\partial z} = x+y$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = z+x$$

ed integrando una ad una si ottiene che

$$U(x,y,z) = xy + yz + xz$$ verifica le eq..

(b) calcolare il lavoro di F per andare da $A = (2,1,3)$ a $B = (4,1,2)$;

il lavoro $L = U(B) - U(A) = U(4,1,2) - U(2,1,3) = 3$

Risoluzione compito ②

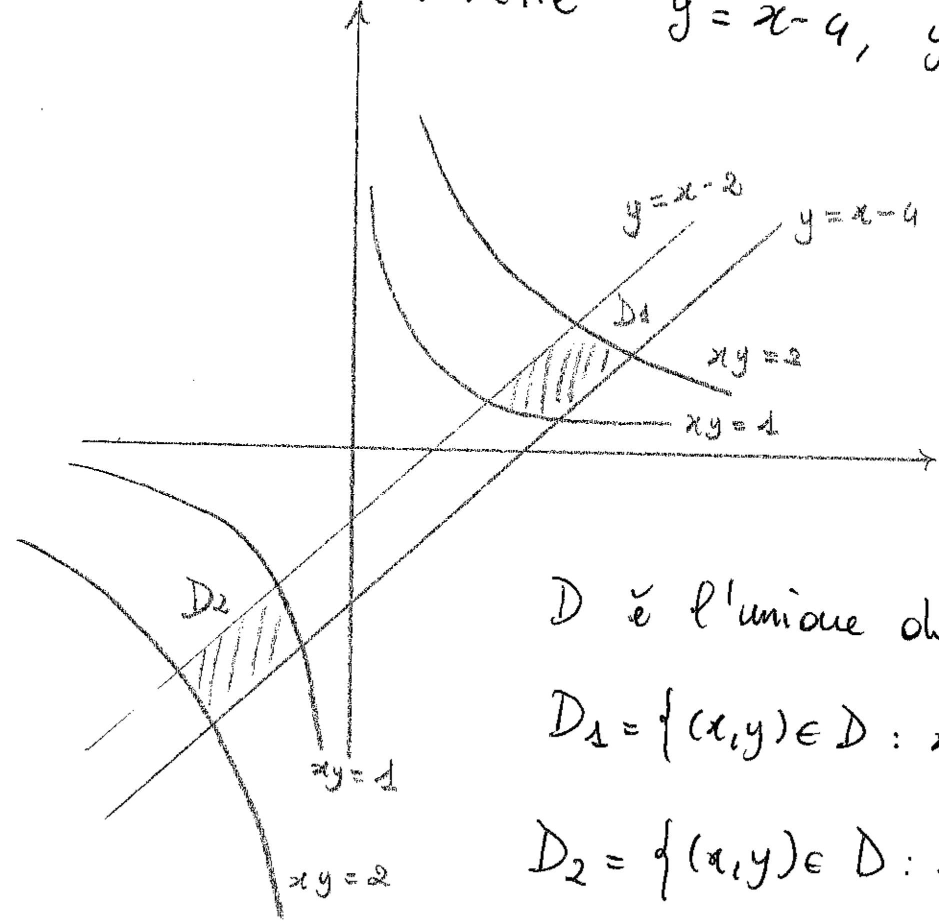
Es. 3. Sia D il sottoinsieme del piano dato da

$$D = \{(x,y) : 1 \leq xy \leq 2 \text{ e } 2 \leq x-y \leq 4\}.$$

Si calcoli

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy.$$

D rappresenta l'area compresa tra le 2 iperboli $xy=1$, $xy=2$ e le 2 rette $y=x-4$, $y=x-2$



D è l'unione di

$$D_1 = \{(x,y) \in D : x,y > 0\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in D : x,y < 0\}$$

Se si prova a fare il cambio di variabile

$$u = x \cdot y$$
$$v = x - y$$

con $\Phi : D \to [1,2] \times [2,4]$

$$\Phi(x,y) = (xy,\, x-y)$$

Si vede che la funzione Φ è sicuramente surgettiva ma non iniettiva su D (ed in effetti la esplicitazione di x o di y in termini di u e v dà 2 soluzioni/radici).

Questo deriva dal fatto che $\Phi(x,y) = \Phi(-y,-x)$
$= ((-y)(-x), -y-(-x)) = (xy, x-y)$ e

si verifica che se $(x,y) \in D$ anche $(-y,-x) \in D$.
In effetti l'insieme D è simmetrico rispetto alla trasformazione $T(x,y) = (-y,-x)$ ed in particolare
$T(D_1) = D_2$.

Utilizzando che $\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} (x+y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (x+y)\,dx\,dy$

e la formula di cambio di variabile con $T: D_1 \to D_2$,
$f(x',y') = x'+y'$ si ha

$$= \iint_{D_2} f(x',y')\,dx'\,dy' = \iint_{D_1} f \circ T(x,y)\,|\det JT(x,y)|\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D_2} (x'+y')\,dx'\,dy'$$

poiché $JT(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad |\det JT(x,y)| = 1$

ed $f(T(x,y)) = -y-x$

da cui $$\iint_{D_2} (x'+y')\,dx'dy' = \iint_{D_1} (-y-x)\,dx\,dy$$

sostituendo questa identità nel calcolo $\iint_D (x+y)\,dx\,dy$ si ottiene

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} (x+y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} (x'+y')\,dx'dy' =$$

$$= \quad '' \quad - \iint_{D_1} (x+y)\,dx\,dy = 0 .$$

Se si voleva utilizzare il cambio di variabile con Φ invece era necessario applicare 2 volte la formula con Φ ristretta a D_1 e poi con Φ ristretta a D_2:

$$2 = 1\cdot 2 = \iint_{[1,2]\times[2,4]} du\,dv = \iint_{D_1} |\det J\Phi(x,y)|\,dx\,dy$$

$$\left(= \iint_{D_2} |\det J\Phi(x,y)|\,dx\,dy \right)$$

Poiche'
$$J\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J\Phi(x,y) = -y-x$$

da cui $$|\det J\Phi(x,y)| = \begin{cases} y+x & \text{su } D_1 \\ -y-x & \text{su } D_2 \end{cases}$$