Analisi Matematica II°

2° Prova scritta - 27.06.13

① $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$F(x,y) = (x^2-y^2)e^{2x+y}$$

(a) F è di classe C^∞. Il suo gradiente è

$$\nabla F(x,y) = \left(2e^{2x+y}(x+x^2-y^2),\ e^{2x+y}(-2y+x^2-y^2)\right).$$

I suoi punti stazionari risolvono il sistema

$$\begin{cases} x+x^2-y^2=0 \\ -2y+x^2-y^2=0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$A=(0,0), \quad B=\left(-4/3, 2/3\right)$$

Per determinarne la natura, calcoliamo le derivate seconde di F:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = e^{2x+y}(2+8x+4x^2-4y^2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = e^{2x+y}(2x-4y+2x^2-2y^2)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = e^{2x+y}(-2-4y+x^2-y^2)$$

da cui

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad H(-4/3, 2/3) = -\frac{2}{3e^2}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della prima matrice hessiana sono, ovviamente, 2 e -2. Dunque $A = (0,0)$ è punto di sella per F. Gli autovalori della seconda sono invece entrambi negativi, essendo

$$\det H(-4/3, 2/3) = \frac{4}{e^4} > 0$$

$$\text{e} \quad \operatorname{tr} H(-4/3, 2/3) = -\frac{20}{3e^2} < 0$$

Pertanto $B = (-4/3, 2/3)$ è di massimo locale.

(b) Poiché $F(-2,1) = 3e^{-3}$ e

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-2,1) = 2e^{-3} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-2,1) = e^{-3}$$

l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 3e^{-3}\}$ per il teorema del Dini è, in un intorno del punto $P = (-2,1)$, grafico di una funzione $y = f(x)$ di classe C^1. Inoltre

$$y'(-2) = f'(-2) = -\frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(-2,1) = -2.$$

La retta tangente in P al grafico di f ha quindi equazione

$$y = -2x - 3.$$

(c) Il vincolo di equazione

$$x^2 - y^2 = 1$$

è un'iperbole equilatera i cui due rami I_1 $(x>0)$ e I_2 $(x<0)$ sono così parametrizzabili

$$I_1 : \begin{cases} x_1(t) = \cosh t \\ y_1(t) = \sinh t \end{cases} ; \quad I_2 : \begin{cases} x_2(t) = -\cosh t \\ y_2(t) = \sinh t \end{cases} .$$

Si ha

$$\varphi_1(t) = F(x_1(t), y_1(t)) = e^{2\cosh t + \sinh t}$$

$$\varphi_2(t) = F(x_2(t), y_2(t)) = e^{-2\cosh t + \sinh t}$$

φ_1 e φ_2 sono funzioni di classe C^∞ e inoltre

$$\varphi_1'(t) = 0 \iff 2\sinh t + \cosh t = 0$$

$$\varphi_2'(t) = 0 \iff -2\sinh t + \cosh t = 0$$

cioè

$$\varphi_1'(t) = 0 \iff 3e^{t} = e^{-t} \iff e^{t_a} = 1/\sqrt{3}$$

$$\varphi_2'(t) = 0 \iff 3e^{-t} = e^{t} \iff e^{t_b} = \sqrt{3}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1(t_a) = 2/\sqrt{3} \\ y_1(t_a) = -1/\sqrt{3} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_2(t_b) = -2/\sqrt{3} \\ y_2(t_b) = 1/\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\varphi_1(t_a) = e^{\sqrt{3}}, \quad \varphi_2(t_b) = e^{-\sqrt{3}}.$$

Poiché $\varphi_1(t) > 0$, $\varphi_2(t) > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_1(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to\pm\infty} \varphi_2(t) = 0$$

il punto $A = (2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ è di minimo (assoluto su I_1), ed il punto $B = (-2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ è di massimo (assoluto su I_2). Si ha

$$F(2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = e^{\sqrt{3}}, \quad F(-2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = e^{-\sqrt{3}}.$$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x,y) = (x^2 - y^2)e^{x+2y}$$

(a) $\nabla F(x,y) = \left((2x + x^2 - y^2)e^{x+2y}, \ 2(x^2 - y^2 - y)e^{x+2y}\right)$

punti stazionari

$$A = (0,0), \quad B = (2/3, -4/3)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = (2+4x+x^2-y^2)e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = (2x^2-2y^2+4x-2y)e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = (-2-8y+4x^2-4y^2)e^{x+2y}$$

$\Longrightarrow$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H(2/3, -4/3) = \frac{2}{3e^2}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = (0,0)$ di sella

$\det H(2/3, -4/3) = 4/e^4 > 0$

$\operatorname{tr} H(2/3, -4/3) = \frac{20}{3e^2} > 0$

$\Rightarrow$ $B = (2/3, -4/3)$ di minimo locale.

(b') $F(-2,1) = 3$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-2,1) = -1, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(-2,1) = 4$$

$\Rightarrow$

$y'(-2) = f'(-2) = 1/4$

tangente in $P = (-2,1)$

$$x - 4y + 6 = 0$$

(c') $\quad x^2 - y^2 = -1$

iperbole equilatera $= I_1 \cup I_2$

$I_1 \ (y>0)$, $\quad I_2 \ (y<0)$

$$I_1 : \begin{cases} x_1(t) = \sinh t \\ y_1(t) = \cosh t \end{cases} ; \quad I_2 : \begin{cases} x_2(t) = \sinh t \\ y_2(t) = -\cosh t \end{cases}$$

$$\varphi_1(t) = F(x_1(t), y_1(t)) = -e^{\sinh t + 2\cosh t}$$

$$\varphi_2(t) = F(x_2(t), y_2(t)) = -e^{\sinh t - 2\cosh t}$$

$$\varphi_1'(t) = 0 \iff e^{t_a} = 1/\sqrt{3}$$

$$\varphi_2(t) = 0 \iff e^{t_b} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t_a) = -1/\sqrt{3} \\ y_1(t_a) = 2/\sqrt{3} \end{cases} , \quad \begin{cases} x_2(t_b) = 1/\sqrt{3} \\ y_2(t_b) = -2/\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\varphi_1(t_a) = -e^{\sqrt{3}} , \quad \varphi_2(t_b) = -e^{-\sqrt{3}}$$

$$\varphi_1(t) < 0 , \quad \varphi_2(t) < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi_1(t) = -\infty , \quad \lim_{t\to\pm\infty} \varphi_2(t) = 0$$

$\Rightarrow \ A = (-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ di massimo (assoluto su I_1; $B = (1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3})$ di minimo (assoluto su I_2). $F(-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}) = -e^{\sqrt{3}}$, $F(1/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}) = -e^{-\sqrt{3}}$