Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema XY

30 novembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

(1) Dato il polinomio $P(z) = z^4 - z^3 + 2z^2 - 2z + 4$, fare la divisione con il polinomio $z^2 - 2z + 2$.

(2) Trovare tutte le soluzioni (radici) di $P(z) = 0$.

(3) Dette z_1, z_2 le due radici di $P(z) = 0$ con parte reale maggiore e z_1, z_3 le due radici con parte immaginaria positiva, calcolare l'area del triangolo di vertici z_1, z_2, z_3^2.

Soluzione.

(1) Il risultato della divisione è

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + z + 2).$$

(2) Il polinomio $z^2 - 2z + 2$ ha radici $1 \pm i$, mentre il polinomo $z^2 + z + 2$ ha radici $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Quindi le radici di $P(z)$ sono $1 \pm i$, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(3) Le due radici con parte reale maggiore sono $1 \pm i$; le due radici con parte immaginaria positiva sono $1 + i, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Quindi abbiamo

$$z_1 = 1 + i, \qquad z_2 = 1 - i,$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \qquad z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Quindi $z_3^2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Dunque il triangolo di vertici z_1, z_2, z_3^2, considerando come base il lato da z_1 a z_2, ha base di lunghezza 2 e altezza $1 + \frac{3}{2}$. L'area è quindi $\frac{5}{2}$.

Esercizio 2.

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 di $f(x) = \sin(x + x^2)\ln(1 + 2x)$ in $x = 0$.
2. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ esistenza e valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + x^2)\ln(1 + 2x) + \cos(2x) - e^{\alpha x^3}}{\sqrt{1 + 2x^3} - 1}$$

Soluzione. 1. Si ha $\sin(y) = y - \dfrac{y^3}{6} + o(y^3)$ e $\ln(1 = y) = y - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + o(y^3)$, sostituendo $y = x + x^2$ ed $y = 2x$ rispettivamente, si ottiene

$$\sin(x + x^2) = x + x^2 - \frac{1}{6}(x + x^2)^3 + o((x + x^2)^3) = x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e

$$\ln(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3).$$

Moltiplicando si vede che ci si poteva ridurre a sviluppare le funzioni precedenti fino a ordine 2 ed ottenere

$$\sin(x+x^2)\ln(1+2x) = (x+x^2+o(x^2))(2x-2x^2+o(x^2)) = 2x^2+2x^3-2x^3+o(x^3) = 2x^2+o(x^3)$$

2. Si sviluppa $\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)$ e $(1 + y)^{1/2} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$, $e^y = 1 + y + o(y)$, sostituendo $y = 2x$, $y = 2x^3$ ed $y = \alpha x^3$, rispettivamente, e si ottiene

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^3), \quad (1 + 2x^3)^{1/2} = 1 + x^3 + o(x^3), \quad e^{\alpha x^3} = 1 + \alpha x^3 + o(x^3).$$

Si calcola

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(x + x^2)\ln(1 + 2x) + \cos(2x) - e^{\alpha x^3}}{\sqrt{1 + 2x^3} - 1} = \\
&\frac{2x^2 + o(x^3) + 1 - 2x^2 + o(x^3) - (1 + \alpha x^3 + o(x^3))}{x^3 + o(x^3)} \\
&= \frac{-\alpha x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}
\end{aligned}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x + x^2)\ln(1 + 2x) + \cos(2x) - e^{\alpha x^3}}{\sqrt{1 + 2x^3} - 1} = -\alpha.$$

Esercizio 3. Sia $f(x) = e^{\sin(x)} - x$, definita per $x \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare le zone di convessità e concavità di f (senza calcolare in modo decimale gli eventuali punti di flesso).

(2) Determinare il segno di f' e dedurne presenza e collocazione (anche approssimativa) dei punti stazionari (ossia a derivata nulla). Chiarire se si tratta di punti di massimo/minimo locale o flessi per f.

(3) Dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $e^{\sin(x_0)} = x_0$. (Facoltativo: dare una stima della sua collocazione).

(4) Determinare in quali zone di $\mathbb{R}$ la funzione $\ln(e^{\sin(x)} - x)$ definita su $(-\infty, 0)$ è monotona crescente.

Soluzione. (1) Si ha $f'(x) = e^{\sin(x)}\cos(x) - 1$ e

$$f'(x) = e^{\sin(x)}(\cos^2(x) - \sin(x)) = e^{\sin(x)}(1 - \sin^2(x) - \sin(x)).$$

Poiché $t^2 + t - 1 \geq 0$ se e solo se $t \geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = t_1$ o $t \leq \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} = t_2$, e $t_2 < 1$, $0 < t_1 < \pi/2$, si ha $f''(x) \leq 0$ solo se $\sin(x) \geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Usando la periodicità di f'', posto $x_1 = \arcsin(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$, risulta $f''(x) \leq 0$ solo per $x_1 + 2k\pi \leq x \leq \pi - x_1 + 2k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. f è quindi concava in ogni intervallo $[x_1 + 2k\pi, \pi - x_1 + 2k\pi]$ e convessa in ogni intervallo $[\pi - x_1 + 2k\pi, x_1 + (2k+1)\pi]$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. I punti di flesso sono i punti $\arcsin(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}) + 2k\pi$, $\pi - \arcsin(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}) + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Dato che la derivata è una funzione 2π periodica studiamo il suo segno solo su $[0, 2\pi]$. Si ha $f'(0) = 0$ ed f' è strettamente crescente su $(0, x_1)$ visto che su questo intervallo $f'' > 0$, per cui $f'(x_1) > 0$ e non ci sono zeri di f' su $(0, x_1)$. f' decresce strettamente su $(x_1, \pi - x_1)$ (infatti $f'' < 0$) ed $f'(\pi - x_1) = e^{(\sqrt{5}-1)/2}\cos(\pi - x_1) - 1 = -e^{(\sqrt{5}-1)/2}\cos(x_1) - 1 < 0$ perché $x_1 \in (0, \pi/2)$ e quindi $\cos(x_1) > 0$. Dato che f' cambia segno negli estremi si ha che f' ha un punto $\bar{x}$ in cui si annulla nell'intervallo $(x_1, \pi - x_1)$. Esso è unico perché su questo intervallo f' è strettamente decrescente. Dal segno di f'' si ha poi che f' è strettamente crescente su $(\pi - x_1, 2\pi)$. Dato che $f'(\pi - x_1) < 0$, $f'(2\pi) = 0$, non ci sono punti stazionari di f in $(\pi - x_1, 2\pi)$. Il punto $\bar{x}$ è un punto di massimo locale ed i punti 0, 2π sono punti di minimo locale perché $f''(0) = f''(2\pi) = 1$.

(3) Si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, per cui dalla continuità di f si deduce l'esistenza di un punto x_0 in cui f si annulla. Dato che $1/e \leq e^{\sin(x)} \leq e$ si deduce che $1/e \leq x_0 \leq e$.

(4) La funzione ln è crescente per cui basta vedere dove f' è non negativa. Per periodicità ci limitiamo a determinare il segno di f' su $[0, 2\pi]$. Per quanto visto prima $f' \geq 0$ su $[0, \bar{x}]$ $f' \leq 0$ su $[\bar{x}, 2\pi]$, ossia $\ln(f(x))$ è crescente su $[-2k\pi, -2k\pi + \bar{x}]$ per $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$.

Prima prova in Itinere Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema ZW

30 novembre 2017

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

(1) Dato il polinomio $P(z) = z^4 + z^3 + 3z^2 + 4z + 6$, fare la divisione con il polinomio $z^2 + 2z + 2$.
(2) Trovare tutte le soluzioni (radici) di $P(z) = 0$.
(3) Dette z_1, z_2 le due radici di $P(z) = 0$ con parte reale maggiore, dette z_1, z_3 le due radici con parte immaginaria positiva, calcolare l'area del triangolo di vertici z_1, z_2, z_3^2.

Soluzione.

(1) Il risultato della divisione è

$$P(z) = (z^2 + 2z + 2)(z^2 - z + 3).$$

(2) Il polinomio $z^2 + 2z + 2$ ha radici $-1 \pm i$, mentre il polinomo $z^2 - z + 3$ ha radici $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$. Quindi le radici di $P(z)$ sono $-1 \pm i$, $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$.
(3) Le due radici con parte reale maggiore sono $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{11}}{2}$; le due radici con parte immaginaria positiva sono $-1 + i$, $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}$. Quindi abbiamo

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}, \qquad z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2},$$
$$z_3 = -1 + i, \qquad z_4 = -1 - i.$$

Quindi $z_3^2 = -2i$. Dunque il triangolo di vertici z_1, z_2, z_3^2, considerando come base il lato da z_1 a z_2, ha base di lunghezza $\sqrt{11}$ e altezza $\frac{1}{2}$. L'area è quindi $\frac{\sqrt{11}}{4}$.

Esercizio 2.

1. Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 di $f(x) = \cos(x + x^2)\ln(1 + 2x)$ in $x = 0$.
2. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ esistenza e valore del limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x + x^2)\ln(1 + 2x) - \sin(2x) + 2x^2 e^{\alpha x^3}}{\sqrt{1 + 2x^3} - 1}$$

Soluzione. 1. Si ha $\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^3)$ e $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$, sostituendo $y = x + x^2$ ed $y = 2x$ rispettivamente, si ottiene

$$\cos(x + x^2) = 1 - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + o((x + x^2)^3) = 1 - \frac{x^2 + 2x^3}{2} + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3)$$

e

$$\ln(1 + 2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3).$$

Moltiplicando si ottiene

$$\begin{aligned}\cos(x + x^2)\ln(1 + 2x) &= (1 - \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3))(2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3))\\ &= 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - x^3 + o(x^3) = 2x - 2x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

2. Si sviluppa $\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$ e $(1 + y)^{1/2} = 1 + \frac{y}{2} + o(y)$, $e^y = 1 + y + o(y)$, sostituendo $y = 2x$, $y = 2x^3$ ed $y = \alpha x^3$, rispettivamente, e si ottiene

$$\sin(2x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3), \quad (1 + 2x^3)^{1/2} = 1 + x^3 + o(x^3), \quad e^{\alpha x^3} = 1 + \alpha x^3 + o(x^3).$$

Si calcola

$$\begin{aligned}&\frac{\cos(x + x^2)\ln(1 + 2x) - \sin(2x) + 2x^2 e^{\alpha x^3}}{\sqrt{1 + 2x^3} - 1} =\\ &\frac{2x - 2x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) - (2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)) + 2x^2(1 + \alpha x^3 + o(x^3))}{x^3 + o(x^3)}\\ &= \frac{3x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x + x^2)\ln(1 + 2x) - \sin(2x) + 2x^2 e^{\alpha x^3}}{\sqrt{1 + 2x^3} - 1} = 3.$$

Esercizio 3. Sia $f(x) = e^{\cos(x)} - \frac{\pi}{2} - x$, definita per $x \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare le zone di convessità e concavità di f (senza calcolare in modo decimale gli eventuali punti di flesso).

(2) Determinare il segno di f' e dedurne presenza e collocazione (anche approssimativa) dei punti stazionari (ossia a derivata nulla). Chiarire se si tratta di punti di massimo/minimo locale o flessi per f.

(3) Dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $e^{\cos(x_0)} = \frac{\pi}{2} + x_0$. (Facoltativo: dare una stima della sua collocazione).

(4) Determinare in quali zone di $\mathbb{R}$ la funzione $\ln(e^{\cos(x)} - \frac{\pi}{2} - x)$ definita su $(-\infty, -\frac{\pi}{2})$ è monotona crescente.

Soluzione.

(1) La risoluzione è analoga alla versione precedente. Si ha $f'(x) = -e^{\cos(x)}\sin(x) - 1$ e

$$f'(x) = e^{\cos(x)}(\sin^2(x) - \cos(x)) = e^{\sin(x)}(1 - \cos^2(x) - \cos(x)).$$

Poiché $t^2 + t - 1 \geq 0$ se e solo se $t \geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = t_1$ o $t \leq \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} = t_2$, e $t_2 < 1$, $0 < t_1 < \pi/2$, si ha $f''(x) \leq 0$ solo se $\cos(x) \geq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Usando la periodicità di f'', posto $x_1 = \arccos(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2})$, risulta $f''(x) \leq 0$ solo per $-x_1 + 2k\pi \leq x \leq x_1 + 2k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. f è quindi concava in ogni intervallo $[-x_1 + 2k\pi, x_1 + 2k\pi]$ e convessa in ogni intervallo $[x_1 + 2k\pi, -x_1 + (2k+1)\pi]$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. I punti di flesso sono i punti $\arccos(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}) + 2k\pi$, $-\arccos(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}) + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.

(2) Dato che la derivata è una funzione 2π periodica studiamo il suo segno solo su $[0, 2\pi]$. Si ha $f'(0) = -1$ ed f' è strettamente decrescente su $(0, x_1)$ visto che su questo intervallo $f'' < 0$, per cui $f'(x_1) < 0$ e non ci sono zeri di f' su $(0, x_1)$. f' cresce strettamente su $(x_1, 2\pi - x_1)$ (infatti $f'' > 0$) ed infatti $f'(3\pi/2) = 0$. Si ha quindi $f'(2\pi - x_1) > 0$ e dato che $f'(2\pi) = -1$ f' cambia segno negli estremi e si ha che f' ha un punto $\bar{x}$ in cui si annulla nell'intervallo $(2\pi - x_1, 2\pi)$. Esso è unico perché su questo intervallo f' è strettamente decrescente. Il punto $\bar{x}$ è un punto di massimo locale ed il punto $3\pi/2$ è un punto di minimo locale perché $f''(3\pi/2) = 1$.

(3) Si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, per cui dalla continuità di f si deduce l'esistenza di un punto x_0 in cui f si annulla. Dato che $1/e \leq e^{\cos(x)} \leq e$ si deduce che $1/e - \pi/2 \leq x_0 \leq e - \pi/2$.

(4) La funzione ln è crescente per cui basta vedere dove f' è non negativa. Per periodicità ci limitiamo a determinare il segno di f' su $[0, 2\pi]$. Per quanto visto prima $f' \geq 0$ su $[3\pi/2, \bar{x}]$, ossia $\ln(f(x))$ è crescente su $[-\pi/2 - 2k\pi, -2(k+1)\pi + \bar{x}]$ per $k \in \mathbb{N}$.