Quarta prova in Itinere Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema XY

6 giugno 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x) = e^{-x^2}(2x^3 + 3x)$.

(1) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di f in $x = 1$.
(2) Determinare le zone in cui f è convessa.
(3) Individuare gli eventuali punti di massimo/minimo (locali/assoluti) e di flesso (ascendente/discendente).
(4) Tracciare un grafico approssimativo di f.

Soluzioni.

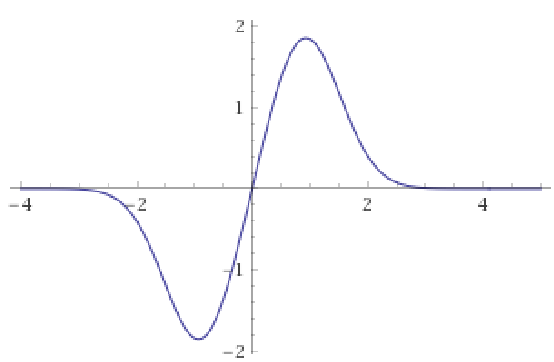
(1) Si ha $f'(x) = e^{-x^2}(3-4x^4)$ ed $f''(x) = e^{-x^2}(8x^5 - 16x^3 - 6x))$ da cui $f'(1) = -e^{-1}$, $f''(1) = -14e^{-1}$ ed $f(1) = 5e^{-1}$

$$f(x) = e^{-1}(5 - (x-1) - 7(x-1)^2) + o((x-1)^2).$$

(2) Si ha $f''(x) = e^{-x^2}2x(4x^4 - 8x^2 - 3))$ e l'equazione di secondo grado $4y^2 - 8y - 3 = 0$ ha una radice positiva $y_1 = 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$ ed una negativa $y_2 = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}$, equivale a dire che si fattorizza $4x^4 - 8x^2 - 3 = 4(x^2 - y_1)(x^2 - y_2)$ con $x^2 - y_2$ sempre positivo per cui $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x\left(x^2 - \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)\right) \geq 0$. Risolvendo si deduce che f è convessa separatamente sugli intervalli $\left[-\sqrt{1 + \frac{\sqrt{7}}{2}}, 0\right]$ e $\left[\sqrt{1 + \frac{\sqrt{7}}{2}}, +\infty\right)$.

(3) Si ha $f'(x) = (\sqrt{3} - 2x^2)(\sqrt{3} + 2x^2)$ da cui f ha un punto di massimo locale in $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ e di minimo locale in $-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$. Questi sono anche punti di amssimo e minimo assoluti perchè f ha limite 0 a $\pm\infty$. f ha poi un flesso ascendente in $x = 0$ e due flessi discendenti in $x = \pm\sqrt{1 + \frac{\sqrt{7}}{2}}$.

(4)



Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T(x, y, z) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y).$$

(1) Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$.
(2) Calcolare la dimensione dell'immagine di T e determinarne una base.
(3) Calcolare la dimensione del nucleo di T e determinarne una base.
(4) Dire se esiste un vettore non nullo tale che $T(v) = v$.

Soluzioni.

(1) La matrice associata è data da

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) La matrice sopra ha rango 2 in quanto le ultime due righe sono linearmente indipendenti (basta prendere il minore 2×2 contenente "seconda e terza colonna/riga") mentre il determinante è sicuramente nullo visto che la differenza tra prima e seconda riga da' la terza riga della matrice. La dimensione dell'immagine di T coincide con il rango, ossia 2. E' noto che le colonne sono un insieme di generatori dell'immagine di T per cui una base dell'immagine è data ad esempio dal sottoinsieme di generatori costituito dalla seconda e terza colonna ossia $v_1 = (-4, -3, -1)$ e $v_2 = (-4, -4, 0)$, infatti i due vettori sono linearmente indipendenti (si verfica usando lo stesso minore di prima).

(3) La dimensione del nucleo è $3 - 2 = 1$ e per trovarne una base basta considerare la seconda e terza equazione e ridurle in forma canonica di Gauss: i vettori del nucleo sono dati dai $v = (x, y, z)$ tali che $x = y = 2z$ per cui una base e' data da $w = (2, 2, 1)$.

(4) L'equazione $T(v) = v$ equivale a trovare un vettore v del nucleo dell'applicazione $S(v) = T(v) - v = (T - Id)(v)$ rappresentata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 5 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poichè il determinante di B è uguale a zero ci sono vettori non nulli nel nucleo; si deduce subito che non esistono soluzioni non nulle di $T(v) = v$, in particolare tutti i multipli di $(0, 1, -1)$ verificano l'equazione data.

Esercizio 3.

(i) Calcolare $\displaystyle\int_1^3 \frac{1+2x}{x+\sqrt{x}}\,dx$

(ii) Trovare la soluzione di $y' + \sin(x)y(x) = \sin(x)$ tale che $y(\pi) = 2$.

Soluzioni.

(i) Si può fare il cambio di variabile $x = t^2$ e, tenendo conto che $dx = 2tdt$, ottenere

$$\int_1^3 \frac{1+2x}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+2t^2}{t^2+t} 2t\,dt = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+2t^2}{t+1}\,dt.$$

Facendo la divisione si ha $1 + 2t^2 = 2(t-1)(t+1) + 3$ e

$$\int \frac{1+2t^2}{t+1}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \Big(2(t-1) + \frac{3}{t+1}\Big)\,dt = (t-1)^2 + 3\ln(t+1) + c$$

da cui

$$\int_1^3 \frac{1+2x}{x+\sqrt{x}}\,dx = 2\Big((t-1)^2 + 3\ln(t+1)\Big)\Big|_1^{\sqrt{3}} = 4(2-\sqrt{3}) + 6\ln\Big(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\Big).$$

(una primitiva della funzione data è $2x - 4\sqrt{x} + 6\ln(\sqrt{x}+1)$.

(ii) Una soluzione v dell'equazione omogenea verifica $v'(x) = -\sin(x)v(x)$ da cui una di queste soluzioni è $v(x) = e^{\cos(x)}$. Cercando y della forma $u(x)v(x)$ si ottiene che u deve verificare $u'(x) = \sin(x)/v(x) = \sin(x)e^{-\cos(x)}$. Integrando si ha $u(x) = e^{-\cos(x)} + c$ con $c \in \mathbb{R}$ da cui $y(x) = (e^{-\cos(x)} + c)e^{\cos(x)} = 1 + ce^{\cos(x)}$.

Imponendo $y(\pi) = 1 + ce^{-1} = 2$ si ha $c = e$ e

$$y(x) = 1 + e^{1+\cos(x)}.$$

Esercizio 4. Trovare tutte le soluzioni complesse di

$$\frac{3z + 3 + 9i}{z + 3} = \bar{z}$$

Soluzioni.

Moltiplicando per $z + 3$ si ottiene

$$3z + 3 + 9i = (z + 3)\bar{z} = |z|^2 + 3\bar{z}$$

e scrivendo $z = a + ib$ si ha

$$3a + 3ib + 3 + 9i = a^2 + b^2 + 3a - 3ib$$

vale a dire

$$a^2 + b^2 = 3 \quad \text{e} \quad ib + 3i = -ib$$

ossia $b = -\frac{3}{2}$ e $a = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Concludendo le soluzioni sono date

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i, \quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$