Compito di Istituzioni di Matematica, Seconda parte

13 settembre 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = 2x\sqrt{y} + 6\frac{y}{x}$$

con condizionale iniziale $y(1) = 4$.

Soluzione. Si tratta di una equazione di Bernoulli, si riduce ad una eq. diff. lineare con il cambio $\sqrt{y} = v$ con v che soddisfa $v' = x + 3v/x$. La soluzione dell'omogenea è cx^3 una soluzione particolare può essere ricercata come polinomio della forma $ax^2 + bx + c$ e si ottiene che $-x^2$ è una soluzione particolare. La soluzione generale è quindi $v(x) = cx^3 - x^2$. Dall'identità $\sqrt{y(x)} = v(x)$ si deduce che $v(1) = \sqrt{y(1)} = 2$ da cui $c = 3$. Si conclude poi che $y(x) = (3x^3 - x^2)^2$. Si noti che se si imponeva subito $\sqrt{y(x)} = v(x)$ ottenendo $y(x) = (cx^3 - x^2)^2$ e si provava ad ottenere c sembrava che venissero due soluzioni possibili relative a $c = 3$ ed a $c = -1$. Si poteva poi verificare che la scelta relativa a $c = 1$, ossia la funzione $\tilde{y}(x) = (-x^3 - x^2)^2 = (x^3 + x^2)^2$ non soddisfaceva l'equazione. Il motivo per cui $c = 1$ non era possibile risiede anche nel fatto che la funzione v cercata deve essere positiva coincidendo con la radice di $y(x)$.

Esercizio 2.

Data la funzione $f(x) = \ln(4 + x^2) - 3x$

1. determinare le zone in cui f è convessa/concava ed eventuali asintoti;
2. calcolarne la primitiva che in $x = 2$ vale $\ln(64)$;
3. calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\ln(e^{2x}+3)}$.

Soluzione. 1. La derivata di f è $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4} - 3$ e la derivata seconda vale

$$f''(x) = 2\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2},$$

da cui si deduce che f è convessa su $[-2, 2]$ e concava (separatamente) sui due restanti intervalli $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Si ha $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = -3$. Poichè $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) + 3x = +\infty$, f non ha asintoti a $+\infty$. Lo stesso avviene con conti analoghi a $-\infty$.

2. Integrando per parti si ha

$$\int (\ln(4+x^2) - 3x)\, dx = x\ln(4+x^2) - 2\int \frac{x^2}{x^2+4}\, dx - \frac{3x^2}{2}$$
$$= x\ln(4+x^2) + 4\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 2x - \frac{3x^2}{2} + c$$

da cui la primitiva cercata è la funzione sopra in cui $c = 10 - \pi$.

3. Visto che il limite è della forma infinito su infinito si può usare l'Hopital ed ottenere che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\ln(e^{2x}+3)} = \text{(a posteriori)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)(e^{2x}+3)}{2e^{2x}} = -\frac{3}{2}.$$

Esercizio 3. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$, sia E il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3t-2 \\ 1-4t \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2t+1 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

e sia F il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ descritto dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} (s+3)x - y + z = 0 \\ 4x - 3y + (s+2)z = 0. \end{cases}$$

(1) Al variare di t trovare la dimensione di E.
(2) Trovare delle equazioni cartesiane per E quando $t = -1$ e quando $t = 4$.
(3) Al variare di s trovare la dimensione di F e scrivere una base di F.
(4) Per $t = -1$ e $s = 1$, trovare la dimensione dello spazio generato da v_1, v_2 e dai vettori della base di F trovata sopra.

Soluzione:

(1) Consideriamo la matrice data dai vettori v_1, v_2. Il determinante del minore 2×2 con prima e seconda riga è e si annulla per $t = \frac{1}{6}$ e $t = 4$, mentre il determinante del minore 2×2 con prima e terza riga è $-3t^2 + 5t + 28$ e si annulla per $t = -\frac{7}{3}, 4$. Quindi lo spazio E ha dimensione 2 per $t \neq 4$ e 1 per $t = 4$.

(2) Per $t = -1$ otteniamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ e } v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Un vettore $v = (x, y, z)$ appartiene ad E solo se è combinazione lineare di v_1, v_2 ossia se è nullo il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 & x \\ 5 & -1 & y \\ 5 & 2 & z \end{pmatrix}$$

ovvero i punti (x, y, z) di E sono identificati dall'equazione $15x - 20y + 35z = 0$.

Per $t = 4$ lo spazio E è generato dal vettore $v = (10, -15, 5)$ e dunque ha dimensione 1 ed è definito da due equazioni lineari indipendenti che si annullino su v, ad esempio:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

(3) La matrice

$$\begin{pmatrix} s+3 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & s+2 \end{pmatrix}$$

ha sempre rango 2. Infatti il determinante del minore con le prime due colonne si annulla per $s = -\frac{5}{3}$ e il determinante del minore con seconda e terza colonna si annulla per $s = 1$. Non ci sono quindi $s \in \mathbb{R}$ per cui tutti i minori 2×2 siano nulli e dunque F ha sempre dimensione 1 per ogni valore di s. Per trovare una base basta scrivere un vettore non nullo che soddisfi entrambe le equazioni. Per

$s = 1$ abbiamo $v = (0, 1, 1)$, mentre per $s \neq 1$ risolviamo il sistema in dipendenza dal parametro $s \neq 1$ e troviamo $v = (1, \frac{s^2 + 5s + 2}{s - 1}, \frac{3s + 5}{s - 1})$.

(4) Dobbiamo calcolare il rango della matrice fatta con i vettori v_1, v_2 ed il vettore della base $v = (0, 1, 1)$ trovato sopra

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sapendo che il rango della sottomatrice fatta con le prime due colonne è 2. Ci basta quindi calcolare il determinante della matrice. Usando il calcolo fatto nel punto (2) otteniamo

$$15 - 20 + 35 = 15 \neq 0$$

ossia i vettori v_1, v_2, v sono linearmente indipendenti e dunque la dimensione dello spazio generato è 3.