Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema 1

18 settembre 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Data l'equazione differenziale

$$D^4 y(x) - 8Dy(x) = 4x + 9\cos(x) + 7\sin(x) \qquad (*)$$

(1) determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata;
(2) determinare una soluzione particolare di $(*)$;
(3) determinare le soluzioni di $(*)$ che hanno sviluppo di Taylor in $x = 0$ uguale a $1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Soluzione. (1) Per risolvere l'equazione differenziale omogenea associata è necessario trovare le soluzioni complesse di $\lambda^4 - 8\lambda = 0$. Esse sono $\lambda = 0, 2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$. Le soluzioni v dell'eq. omogenea sono quindi generate dalle funzioni $e^{\lambda x}$ e date al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ da

$$v(x) = Ae^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + Be^{-x}\sin(\sqrt{3}x) + Ce^{2x} + D, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(2) Si cerca una soluzione particolare di tipo polinomio di grado minore od uguale a 5 (grado della derivata piú alta+ grado del polinomio a destra) e combinazione lineare di $\sin(x)$ e $\cos(x)$. Imponendo che risolva l'equazione si ottiene che una soluzione particolare y_p è data da

$$y_p(x) = \cos(x) - \sin(x) - \frac{x^2}{4}.$$

(3) La soluzione generale di $(*)$ è

$$y(x) = y_p(x) + v(x) = \cos(x) - \sin(x) - \frac{x^2}{4} + Ae^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + Be^{-x}\sin(\sqrt{3}x) + Ce^{2x} + D$$

al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{R}$. Avere lo sviluppo di Taylor assegnato equivale a $y(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, ossia $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1$. Si può quindi riderivare y e mettere a sistema A, B, C, D con queste condizioni oppure sviluppare y attraverso gli sviluppi noti delle funzioni esponenziali, seno e coseno ed uguagliare i coefficienti degli sviluppi. Si ottiene

$$\begin{aligned} A + C + D &= -1 \\ -1 - A + \sqrt{3}B + 2C &= 0 \\ -1 - \frac{1}{2} - 2A - 2\sqrt{3}B + 4C &= -1 \end{aligned}$$

e si risolve ottenendo 3 dei parametri in funzione di uno degli altri 4.

Esercizio 2. Al variare dei parametri $\alpha, x \in \mathbb{R}$ determinare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^\alpha} \left(\frac{x^2 - x + 1}{1 + x^2} \right)^n .$$

Determinare poi insieme di convergenza e somma della serie per $\alpha = 0$ ed $\alpha = 1$.

Soluzione. Si tratta di una serie di potenze in dipendenza da $\alpha \in \mathbb{R}$. Posto $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{1 + x^2}$ si studia

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^\alpha} y^n .$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n!)^\alpha}}$ vale 0 se $\alpha > 0$, 1 se $\alpha = 0$ e $+\infty$ se $\alpha < 0$ si deduce che la serie data converge per ogni y (e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$) se $\alpha > 0$; essa poi non converge in alcun punto se non $y = 0$ se $\alpha < 0$. Visto che $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{1 + x^2}$ non è mai un valore nullo si ha che per $\alpha < 0$ la serie non converge in alcun punto $x \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = 0$ la serie converge sicuramente se $-1 < y < 1$, questa condizione equivale a $\dfrac{x^2 - x + 1}{1 + x^2} < 1$ ossia $x^2 - x + 1 < 1 + x^2$, cioè $x > 0$. Rimane da vedere cosa succede nei punti $y = \pm 1$: l valore $y = -1$ non è raggiunto per alcun x, mentre $y = 1$ per $x = 0$ ma in questo punto la serie diventa $\sum_{n=0}^{+\infty} 1$ e diverge positivamente.

Nel caso $\alpha = 0$ è anche possibile calcolare la somma della serie perchè si tratta di una serie geometrica di ragione $\dfrac{x^2 - x + 1}{1 + x^2}$. La sua somma è uguale a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{1 + x^2} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x^2 - x + 1}{1 + x^2}} = \frac{x^2 + 1}{x}, \qquad x > 0.$$

Analizziamo ora il caso $\alpha = 1$: abbiamo visto prima che l'insieme di convergenza è tutto $\mathbb{R}$ e la serie coincide con la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} y^n = e^y, \quad y = \frac{x^2 - x + 1}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3.

(1) Determinare la primitiva F della funzione $\dfrac{1}{1+e^x}$ che vale 0 in $x=0$ e determinarne il limite per $x \to +\infty$. Dire poi se F è integrabile su $(0,+\infty)$.

(2) Calcolare il valore $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2^x-1}\,dx$.

Soluzione. (1) Si integra facilmente usando ad esempio l'identità $1=(1+e^x)-e^x$ e si ha la famiglia di primitive

$$F_c(x)=\int \frac{1}{1+e^x}\,dx=\int \frac{1+e^x}{1+e^x}\,dx-\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = x-\ln(1+e^x)+c.$$

Risulta $F_c(0)=c-\ln(2)$, per cui fissato $c=\ln(2)$, $F(x)=x-\ln(1+e^x)+\ln(2)$ è la primitiva cercata.

Si calcola (usando $1+e^x=e^x(1+1/e^x)$)

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\ln(e^x)-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)+\ln(2)\right]=\ln(2).$$

Avendo limite $\ln(2)$ la funzione F è strettamente positiva (ad esempio $>\ln(2)/2$) a partire da un certo valore $M>0$. La funzione data è quindi non integrabile su $(0,+\infty)$ perchè il suo integrale risulta somma di un integrale finito, $\displaystyle\int_0^M F(x)\,dx$, (dato che F è continua e quindi limitata su $[0,M]$), e di un integrale di valore $+\infty$ sulla semiretta $(M,+\infty)$.

(2) Si effettua il cambio di variabile $\sqrt{2^x-1}=t$ da cui $x=\log_2(t^2+1)$ e si ha

$$dx=2\log_2(e)\frac{t}{t^2+1}dt$$

da cui

$$\int_0^2 \sqrt{2^x-1}\,dx=\log_2(e)\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2t^2}{t^2+1}\,dt=2\log_2(e)(t-\arctan(t))\Big|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=2\log_2(e)(\sqrt{3}-\arctan(\sqrt{3}))=\frac{2}{\ln(2)}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right).$$