Soluzioni del Compito di Istituzioni di Matematica, Seconda parte

10 febbraio 2020

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Si consideri al variare di $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y - kz = 1 \\ 2x + (1+k)y - (1+k)z = 2 \\ 2x + y + 2z = k^2 - 3 \end{cases}$$

a) Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango delle matrice completa e della matrice incompleta del sistema;
b) trovare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, una base del nucleo della matrice incompleta associata al sistema;
c) determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se il sistema ammette una, nessuna o infinite soluzioni;
d) determinare l'insieme S_k delle soluzioni del sistema per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

a) Applichiamo l?eliminazione alla matrice completa del sistema e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -k & 1 \\ 2 & 1+k & -1-k & 2 \\ 2 & 1 & 2 & k^2-3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -k & 1 \\ 0 & k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2+k & k^2-4 \end{pmatrix}$$

Se $k \neq 0, -2$ entrambe le matrici hanno rango 3. Per $k = -2$ ci sono solo due pivot nelle prime due colonne, quindi entrambe le matrici hanno rango 2. Se $k = 0$ proseguiamo l'eliminazione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ci sono 2 pivot nella matrice incompleta e 3 in quella completa, quindi la prima ha rango 2 e la seconda 3 per $k = 0$.

b) Per $k \neq 0, -2$ la matrice incompleta ha 3 pivot e dunque il suo nucleo ha dimensione $3 - 3 = 0$ ovvero è costituito dal solo vettore $(0, 0, 0)$. Per $k = 0$ la matrice ha 2 pivot e dunque il nucleo ha dimensione $3 - 2 = 1$. Si vede facilmente che il vettore $(1, -2, 0)$ appartiene al nucleo e dunque ne è una base. Per $k = -2$ il vettore la matrice ha nuovamente rango 2 e dunque il nucleo ha dimensione $3 - 2 = 1$. Si vede che $(3/2, 1, -2)$ appartiene al nucleo e ne è dunque una base.

c) Per $k \neq 0, -2$ le matrici completa ed incompleta hanno entrambe rango massimo, quindi per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ammette un'unica soluzione. Per $k = -2$ entrambe le matrici hanno rango 2, quindi il sistema ammette infinite soluzioni. Per $k = 0$ le due matrici hanno rango diverso, quindi il sistema non ammette soluzioni.

d) Per $k \neq 0, -2$ possiamo risolvere direttamente il sistema a gradini ottenuto con l'eliminazione. Otteniamo $x = (k^3 - 2k^2 + 1)/2k$, $y = (k-1)/k$ e $z = k-2$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Per $k = -2$ possiamo risolvere il sistema rispetto ad x e y, lasciando libera di variare la z. Utilizzando la matrice a gradini ottenuta con l'eliminazione per $k = -2$ si trova $y = -(1+z)/2$ e $x = 3(1-z)/4$. Quindi l'insieme delle soluzioni per $k = -2$ è $\{ \begin{pmatrix} 3(1-h)/4 \\ -(1+h)/2 \\ h \end{pmatrix} h \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x) = \ln|4e^x - 3e^{2x}|$, definita su $\mathbb{R} \setminus \{\ln(4/3)\}$:

a) determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali o obliqui;
b) determinare eventuali punti di massimo o minimo relativo;
c) al variare di $t \in \mathbb{R}$ calcolare il numero di soluzioni di $f(x) = t$.

Soluzione.

a) I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to\ln(4/3)^{\pm1}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Quindi $x = \ln(4/3)$ è un asistoto verticale. Inoltre per $x \to +\infty$ c'é l'asintoto obliquo $y = 2x + \ln(3)$:

$$f(x) = \ln(3e^{2x} - 4e^x) = 2x + \ln(3 - 4e^{-x}) = 2x + \ln(3) + o(1).$$

Mentre per $x \to -\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = x + \ln(4)$:

$$f(x) = \ln(4e^x - 3e^{2x}) = x + \ln(4 - 3e^x) = x + \ln(4) + o(1).$$

b) La derivata prima è $f'(x) = \frac{4-6e^x}{4-2e^x}$ pertanto $f(x)$ è crescente in $(-\infty, \ln(2/3)]$ e in $[\ln(4/3), +\infty)$, mentre è decrescente in $[\ln(2/3), \ln(4/3)]$. Quindi $x_M = \ln(2/3)$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono massimi o minimi assoluti, né minimi relativi.

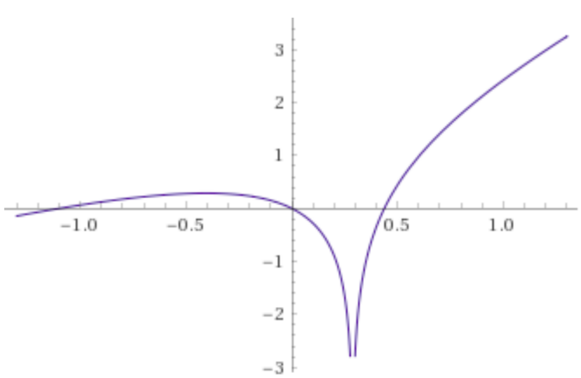

Grafico di $f(x)$

c) Considerato il punto di massimo relativo $x_M = \ln(2/3)$ abbiamo $f(x_M) = \ln(4/3)$. Dunque per $t > \ln(4/3)$ l'equazione ha solo una soluzione, per $t = \ln(4/3)$ l'equazione ha 2 soluzioni, per $t < \ln(4/3)$ l'equazione ha 3 soluzioni.

Esercizio 3. Risolvere l'equazione differenziale:

$$\sqrt[4]{x}yy' + y^2 - 1 = 0$$

con valore iniziale $y(1) = 2$.

Soluzione. L'equazione è di Bernoulli, pertanto possiamo porre $w = y^2$ e la nostra equazione diventa

$$w' = 2\frac{-w+1}{\sqrt[4]{x}}$$

con valore iniziale $w(1) = 4$. La soluzione generale di questa equazione lineare del primo ordine è

$$w(x) = Ae^{-8/3\sqrt[4]{x^3}} + 1$$

e dunque $A = 3e^{8/3}$ e dunque $w(x) = 3e^{-8/3(\sqrt[4]{x^3}-1)} + 1$. Si ricava quindi

$$y = \sqrt{3e^{-8/3(\sqrt[4]{x^3}-1)} + 1}.$$