Seconda prova in Itinere Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema 1

26 marzo 2019

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$(a)\ \int \sqrt{2-2\sin(x)+\cos^2(x)}\ \cos(x)\,dx; \qquad (b)\ \int \frac{1}{\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)}\,dx.$$

Calcolare poi l'area di grafico compreso tra le funzioni $f(x) = \sqrt{2-2\sin(x)+\cos^2(x)}\cos(x)$ e $g(x) = -\dfrac{1}{\sin(x)+\sqrt{3}\cos(x)}$ per x compreso tra 0 e $\pi/2$.

Soluzione.

(a) Possiamo riscrivere l'integrale usando la relazione $\sin(x)^2+\cos(x)^2 = 1$:

$$\int \sqrt{2-2\sin(x)+\cos^2(x)}\ \cos(x)\,dx = \int \sqrt{3-2\sin(x)-\sin^2(x)}\ \cos(x)\,dx =$$

$$= \int \sqrt{4-(\sin(x)+1)^2}\ \cos(x)\,dx$$

e ponendo $\sin(x)+1 = 2t$ e quindi $\cos(x)\,dx = 2\,dt$ otteniamo $4\int\sqrt{1-t^2}\,dt =$. Calcoliamo quest'ultimo integrale ponendo $t = \sin(y)$, $dt = \cos(y)\,dy$ da cui abbiamo $4\int\cos^2(y)\,dt$ che risolvendo per parti (e facendo le sostituzioni) diventa

$$2(y+\sin(y)\cos(y))+c = 2\left(\arcsin\left(\frac{\sin(x)+1}{2}\right)+\frac{\sin(x)+1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sin(x)+1}{2}\right)^2}\right)+c.$$

(b) Per risolvere il secondo integrale consideriamo l'angolo $\alpha = \pi/3$, che ha $\sin(\alpha) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\alpha) = 1/2$. Dunque l'integrale diventa:

$$\int \frac{1/2}{\sin(x)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin(x+\alpha)}\,dx.$$

Per trovare una primitiva di $1/\sin(x)$ possiamo riscrivere $\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2)$ e quindi $\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x/2)}D(\tan(x/2))$. Quindi otteniamo

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin(x+\alpha)}\,dx = \frac{1}{2}\log(|\tan(x/2+\pi/6)|)+c.$$

Nell'intervallo $(0,\pi/2)$ la funzione $f(x)$ è sempre positiva, mentre la funzione $g(x) = -\frac{1}{2\sin(x+\pi/3)}$ è sempre negativa per cui $f(x)-g(x)\geq 0$ e l'area tra i due grafici è l'integrale della loro differenza. Avendo calcolato le primitive otteniamo che l'area è pari all'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)-g(x))\,dx =$$

$$= \left[2\left(\arcsin\left(\frac{\sin(x)+1}{2}\right)+\frac{\sin(x)+1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sin(x)+1}{2}\right)^2}\right)+\frac{1}{2}\log(|\tan(x/2+\pi/6)|)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\log(\sqrt{3}\tan(5\pi/12))$$

Esercizio 2.

1. Risolvere l'equazione differenziale $y(t)' = -\dfrac{2y(t)}{t} + \cos(t)$ con dato inziale $y(1) = 2$.
2. Dire se la soluzione sopra ammette massimo e minimo su $(0, +\infty)$.

Soluzione.

1. L'equazione è lineare non omogenea. L'equazione omogenea associata è risolta da
$$v(t) = ce^{-2\ln(t)} = ce^{-\ln(t^2)} = ce^{\ln(1/t^2)} = c\frac{1}{t^2}.$$
La soluzione dell'equazione differenziale è della forma
$$y(t) = \frac{a(t)}{t^2}$$
e che $a(t)$ soddisfa l'equazione $a'(t) = t^2\cos(t)$ con $a(1) = 2$. Possiamo integrare per parti il termine di destra:
$$\int t^2\cos(t)\,dt = (t^2-2)\sin(t) + 2t\cos(t) + c$$
e quindi, considerando il valore iniziale,
$$a(t) = (t^2-2)\sin(t) + 2t\cos(t) + 2 + \sin(1) - 2\cos(1)$$
e
$$y(t) = \frac{(t^2-2)\sin(t) + 2t\cos(t) + 2 + \sin(1) - 2\cos(1)}{t^2}$$
che possiamo riscrivere come
$$y(t) = \sin(t) + 2\frac{\cos(t)}{t} + 2\frac{1 + \sin(1)/2 - \cos(1) - \sin(t)}{t^2}$$
2. Notiamo che $1 + \sin(1)/2 - \cos(1) > 0$ perché $\cos(1) < 1$ e $\sin(1) > 0$. Quindi abbiamo che
$$\lim_{t\to 0} y(t) = +\infty$$
perché nella somma scritta sopra i tre termini corrispondono a limiti
$$0 + \infty + \infty.$$
Ne segue che $y(t)$ non può avere massimo in $(0, +\infty)$.

Esercizio 3.

(1) Stabilire per quali valori del parametro $\alpha > 0$ converge l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \log^2(x)}.$$

(2) Calcolare il valore dell'integrale del punto precedente per $\alpha = 1$.

]

Soluzione.

(1) Dato che $\ln^2(x) > 1$ in $(e, +\infty)$ si ha che su tale intervallo la funzione $\frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^2}$ è più piccola della funzione $\frac{1}{x^\alpha}$, ossia

$$\frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^2} \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{per } x \geq e.$$

Dato che $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in senso improprio per $\alpha > 1$, per il teorema del confronto $\frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^2}$ è anch'essa integrabile in senso improprio se $\alpha > 1$. Per $\alpha < 1$ si può invece fare un confronto (asintotico, vale a dire per x molto grande) con la funzione $\frac{1}{x^\beta}$ con β scelto tale che $\alpha < \beta < 1$. Infatti preso $\beta > \alpha$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^\beta}}{\frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha(\ln(x))^2}{x^\beta} = 0.$$

Il limite sopra equivale a dire che per esiste $M > 0$ tale che se $x \geq M$ si ha la disuguaglianza

$$\frac{1}{x^\beta} \leq \frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^2}.$$

Dato che $\frac{1}{x^\beta}$ non è integrabile in senso improprio su $(2, +\infty)$ non lo è neanche $\frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^2}$.

Rimane $\alpha = 1$ che è svolto nel punto (2) sotto.

(2) Si usa il cambio di variabile $\ln(x) = t$ e si ha

$$\int_2^M \frac{1}{x(\ln(x))^2}\, dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(M)} \frac{1}{t^2}\, dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln(2)}^{\ln(M)} = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(M)}.$$

Passando al limite per $M \to +\infty$ si ha che l'integrale improprio cercato vale $1/\ln(2)$.

Esercizio 4. Calcolare il volume del solido S ottenuto dalla rotazione intorno all'asse x del sottografico nel piano xy di $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ con $x \in [0, 3]$. Determinare poi il volume del solido S_1 ottenuto intersecando il solido S con il cilindro C di asse parallela all'asse x e di equazione $C = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Soluzione. Si utilizza la formula vista a lezione per il calcolo del volume di un solido S_f ottenuto come rotazione intorno all'asse x del sottografico di una funzione $h(x)$ definita su $[a, b]$. Si ricorda che risulta

$$S_h = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 \leq h^2(x)\} \text{ e Vol } (S_h) = \pi \int_a^b h^2(x)\, dx.$$

Nel caso richiesto si ha quindi

$$\text{Vol } (S) = \pi \int_0^3 f^2(x)\, dx = \pi \int_0^3 (x^2 - 4x + 5)\, dx = \pi\Big(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5\Big)\Big|_0^3 = 6\pi.$$

Per quanto riguarda il solido S_1 si nota che esso è ottenuto come intersezione dei due solidi di rotazione S e C. Infatti si ha che il cilindro (infinito) C è ottenuto come solido di rotazione intorno all'asse x del sottografico della funzione $g(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$ e si ha

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3,\ y^2 + z^2 \leq f^2(x)\},\ C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R},\ y^2 + z^2 \leq 2^2\}.$$

L'intersezione è data quindi dai punti (x, y, z) che verificano tutte le condizioni espresse da C ed S, vale a dire

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 3,\ y^2 + z^2 \leq \min\{f^2(x), g^2(x)\}\}.$$

Dato che $\min\{f^2(x), g^2(x)\} = (\min\{f(x), g(x)\})^2$, S_1 è anch'esso un solido di rotazione rispetto alla funzione $h(x) = \min\{f(x), 2\}$ definita su $[0, 3]$. Si calcola esplicitamente che $f(x) \leq 2$ se $x \leq 2 - \sqrt{3}$. Se ne deduce che $h(x) = 2$ se $0 \leq x \leq 2 - \sqrt{3}$ e $h(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ se $2 - \sqrt{3} \leq x \leq 3$ da cui

$$\text{Vol } (S_1) = \pi \int_0^3 h^2(x)\, dx = \pi \int_0^{2-\sqrt{3}} 4\, dx + \pi \int_{2-\sqrt{3}}^3 (x^2 - 4x + 5)\, dx =$$

$$= \pi(2 - \sqrt{3}) + \pi\Big(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5\Big)\Big|_0^{2-\sqrt{3}} = \frac{17}{3}(2 - \sqrt{3})\pi.$$